

Mc
Graw
Hill Education

工商管理优秀教材译丛

管理学系列

I

Introduction
to Operations Research
Ninth Edition

运筹学导论

第 9 版

(美) 弗雷德里克·S. 希利尔 (Frederick S. Hillier) 著
杰拉尔德·J. 利伯曼 (Gerald J. Lieberman)

胡运权 等 译

清华大学出版社

I ntroduction to Operations Research Ninth Edition

运筹学导论

第 9 版

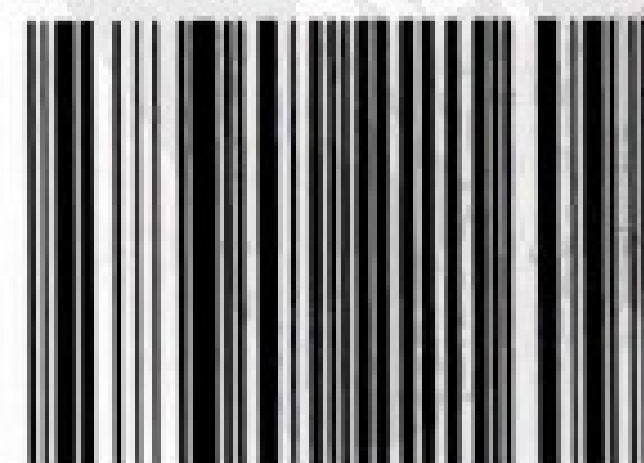
本书是运筹学经典著作，在美国高校有很高的采用率。两位作者是运筹学领域的大师。本书内容丰富，覆盖运筹学各个分支，主要内容包括：运筹学建模方法、线性规划、对偶理论与灵敏度分析、网络优化模型、动态规划、整数规划、决策分析等。本书在讲述上深入浅出，具有高等数学和线性代数、概率基础知识的读者均能读懂。书中有大量案例，可供自学及复习。

本书可作为管理类及工科类本科生运筹学课程的教材。

**Mc
Graw
Hill** Education

<http://www.mheducation.com>

ISBN 978-7-302-22160-9



9 787302 221609 >

定价：66.00元

运筹学导论

第 9 版

(美) 弗雷德里克·S·希利尔 (Frederick S. Hillier) 著
杰拉尔德·J·利伯曼 (Gerald J. Lieberman)

胡运权 等



(Ninth Edition)

清华大学出版社

北京

Introduction to Operations Research

运筹学导论

PDG

Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman
Introduction to Operations Research, 9th Ed.
EISBN: 978-0-07-337629-5

Copyright © 2010 by The McGraw-Hill Companies, Inc.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including without limitation photocopying, recording, taping, or any database, information or retrieval system, without the prior written permission of the publisher.

This authorized Chinese abridgement is jointly published by McGraw-Hill Education (Asia) and Tsinghua University Press Limited. This edition is authorized for sale in the People's Republic of China only, excluding Hong Kong, Macao SAR and Taiwan.

Copyright © 2010 by McGraw-Hill Education (Asia), a division of the Singapore Branch of The McGraw-Hill Companies, Inc. and Tsinghua University Press Limited.

版权所有。未经出版人事先书面许可,对本出版物的任何部分不得以任何方式或途径复制或传播,包括但不限于复印、录制、录音,或通过任何数据库、信息或可检索的系统。

本授权中文简体字删减版由麦格劳-希尔(亚洲)教育出版公司和清华大学出版社有限公司合作出版。此版本经授权仅限在中华人民共和国境内(不包括香港特别行政区、澳门特别行政区和台湾)销售。

版权©2010由麦格劳-希尔(亚洲)教育出版公司与清华大学出版社有限公司所有。

本书封面贴有 McGraw-Hill 公司防伪标签,无标签者不得销售。

北京市版权局著作权合同登记号 图字:01-2010-0585

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

运筹学导论:第9版/(美)希利尔(Hillier, F. S.), (美)利伯曼(Lieberman, G. J.)著;
胡运权等译. —北京:清华大学出版社, 2010. 5

(工商管理优秀教材译丛·管理学系列)

书名原文: Introduction to Operations Research: 9e

ISBN 978-7-302-22160-9

I. ①运… II. ①希… ②利… ③胡… III. ①运筹学—高等学校—教材 IV. ①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 031929 号

责任编辑:王青

责任校对:王凤芝

责任印制:李红英

出版发行:清华大学出版社

地址:北京清华大学学研大厦 A 座

<http://www.tup.com.cn>

邮编:100084

社总机:010-62770175

邮购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印装者:北京鑫海金澳胶印有限公司

经销:全国新华书店

开本:185×260 印张:38 插页:2 字数:853千字

版次:2010年5月第1版 印次:2010年5月第1次印刷

印数:1~5000

定价:66.00元

产品编号:034816-01

Mc
Graw
Hill

Education

工商管理优秀教材译丛

管理学系列 →

译 序

运筹学导论

Introduction to Operations Research

由美国斯坦福大学弗雷德里克·S. 希利尔和杰拉尔德·J. 利伯曼(已故)编著的《运筹学导论》是国际上权威的运筹学经典著作。本书初版于1967年,1980年我们有幸得到其第2版,这是由斯坦福大学到哈尔滨工业大学访问的代表团赠送的。本书的内容叙述和体系安排曾对我国1982年由清华大学出版社出版的《运筹学》及国内随后出版的同类教材产生过重大影响。鉴于本书在世界范围内对运筹学发展做出的贡献,1995年出版的第6版获得了该年度兰切斯特奖的荣誉提名奖,该奖项是运筹学英语出版物的最高奖项。2006年以来清华大学出版社影印了本书英文原版(第8版)的缩减版,并组织翻译出版了全书的中译本。

正如作者在前言中指出的,第9版较之以前各版突出的有两条:一是更加强调实际的应用。在全书中增加了29个应用案例,在各章末尾增加了71篇运筹学应用获奖的参考文献,增加了描述100项应用的刊物论文,相应增加了很多要求学生认真钻研实际应用案例并写出心得体会的习题。二是对相关软件的更新,引进了很多软件的最新版本。此外,书中还补充了新的章节及对一些章节进行内容体系的重组,并进一步完善了理论体系。本书还设置了一个专用的网站(www.mhhe.com/hillier),从中可以找到链接的刊物论文、书中的补充内容及供选择的软件资源。

考虑到本书第8版的中译本出版时间不长,并考虑到我国大学本科运筹学的教学内容要求,第9版的翻译略去了一些难度相对较大的章节。

第9版的翻译工作是在本书第8版的基础上进行的,着重组织了其修改部分的翻译工作。参加第8版译校工作的有哈尔滨工业大学管理学院胡运权、冯玉强、张庆普、孙文俊、钱国明、王健、叶强、闫相斌、麦强及部分博士生和硕士生,参加第9版翻译工作的有胡运权、钱国明和麦强。

由于译者水平有限,加之时间比较仓促,书中难免有翻译不当、不正确之处,欢迎广大读者批评指正。我们衷心希望本书的翻译出版能对我国运筹学的教学、应用和推广起到促进作用。

清华大学出版社为本书的出版付出了辛勤的劳动,哈尔滨工业大学管理学院的领导给予译者很多支持和鼓励,在此一并表示感谢。

译 者

2009年10月于哈尔滨工业大学

关于作者

弗雷德里克·S. 希利尔(Frederick S. Hillier)在美国华盛顿州的阿伯丁出生和成长,曾在全州高中的作文写作、数学、辩论和音乐比赛中获奖。作为斯坦福大学的本科生,他在300多名学生的工程学班级中名列第一。他还曾获技能写作 McKinsey 奖,大二学生杰出辩论奖,参加过斯坦福木管五重奏小组的演出,并因在工程学和人文社会科学结合上的优异成绩获汉密尔顿奖。他在大学毕业并获工业工程理学学士学位时,获得了三项国家奖学金(国家科学基金奖学金、陶·贝塔·派奖学金和丹福斯奖学金)用于在斯坦福大学运筹学专业的研究生学习。获博士学位后,他留在斯坦福大学任教,于28岁时获该校终身教职,32岁时被聘为正教授。他还获得了康奈尔大学、卡内基·梅隆大学、丹麦技术大学、新西兰坎特布里大学、英国剑桥大学的访问邀请。在斯坦福大学任教35年后,他于1996年提前退休以便集中精力从事专著的写作,现为斯坦福大学运筹学的名誉教授。

希利尔博士的研究涉及很多领域,包括整数规划、排队论及其应用、统计质量管理以及将运筹学应用于资金预算与生产系统设计。他的论著领域广泛,一些充满活力的论文至少10次被选入有关专著重新出版。他是由美国管理科学研究所(TIMMS)和美国海军研究署资助的“互相关联项目资金预算”研究竞赛的首位获奖者。他和杰拉尔德·J. 利伯曼博士还因本书第6版获美国运筹学和管理科学学会1995年度的兰切斯特(Lanchester)奖的荣誉提名奖,该奖项是各类运筹学英语出版物的最高奖。

希利尔博士在他所在的领域专业协会中担任过很多领导职务,例如曾任美国运筹学会(ORSA)的司库、TIMMS会议的副主席、1989年在日本大阪举行的TIMMS国际会议的合作总主持人、TIMMS出版委员会主席、美国运筹学会运筹学选题编委会主席、美国运筹学会资源计划委员会主席、美国运筹学会和美国管理科学研究所联合会议委员会主席、美国运筹学与管理科学研究会(IMFORMS)John von Neumann理论奖评选委员会主席。他一直担任斯普林格(Springer)运筹学与管理科学国际系列丛书的编辑,这是他1993年创建的著名的图书系列。

除了《运筹学导论》和其他两本配套出版物——《数学规划导论》(第2版,1995)和《运筹学随机模型导论》(1990)外,他的著作还有《风险关联的投资评估》(North Holland, 1969)、《排队论的表和图》(Elsevier North Holland, 1981,合著者有O. S. 尤、D. M. 爱维斯、L. D. 福赛特、F. D. 罗和M. I. 雷曼)及《管理科学导论:运用电子表格的建模与案例研究方法》(第2版,McGraw-Hill/Irwin,2003,合著者有M. S. 希利尔)。

杰拉尔德·J. 利伯曼(Gerald J. Lieberman)于1999年去世,曾任斯坦福大学运筹学和统计学的名誉教授,是该校运筹学系的创建者和系主任。他同时具有工程和运筹统计的背景(拥有库伯大学机械工程学士学位,哥伦比亚大学数理统计学硕士学位和斯坦福大学统计学博士学位)。

利伯曼博士是斯坦福大学近几十年来最著名领导人之一。继出任运筹学系主任之后,他历任人文和理学院副院长、副教务长和研究主任、副教务长和研究生部主任、教职员

评议会主席、大学顾问委员会成员和百年庆祝委员会主席,在斯坦福三任校长期间任教务长或代理教务长。

在担任大学领导期间,他仍然积极从事教学研究。他的研究领域主要是运筹学的随机部分,通常是应用概率和统计学的交叉界面,出版物涉及可靠性与质量管理、复合系统建模、包括资源有限条件下的优化设计等广泛的领域。

作为运筹学领域深受尊敬的资深元老——利伯曼博士担任过一系列领导职务,包括被选为管理科学研究所的主席。他的专业荣誉包括被选为国家工程院院士,获美国质量管理协会的 Shewart 奖,因在斯坦福大学和在行为科学高级研究中心任研究员期间做出的卓越贡献获 Cuthberston 奖。1996 年 INFORMS 因利伯曼在运筹学和管理科学方面的杰出贡献授予他具有极高声誉的 Kimball 奖章。

除《运筹学导论》和其他两本配套出版物——《数学规划导论》(第 2 版,1995)和《运筹学随机模型导论》(1990)以外,他的著作还有《工业统计手册》(Prentice-Hall,1995,合著者为 A. H. Bowker)、《非中心 t 分布表》(斯坦福大学出版社,1957,合著者为 G. J. Resnikoff)、《超几概率分布表》(斯坦福大学出版社,1961,合著者为 D. Owen)、《工程统计学》(第 2 版)(Prentice-Hall,1972,合著者为 A. H. Bower)、《管理科学导论:运用电子表格的建模与案例研究方法》(McGraw-Hill/Irwin,2000,合著者有 F. S. 希利尔和 M. S. 希利尔)。

关于案例作者

卡尔·斯凯梅德(Karl Schmedders)是西北大学凯洛格(Kellogg)管理研究生院管理经济与决策科学系的副教授,讲授管理决策数量方法课程。他的研究兴趣包括运筹学在经济理论中应用、不完全市场的一般平衡理论、资产定价和计算经济学。斯凯梅德在斯坦福大学获得运筹学博士学位。他在该校为本科生及研究生讲授运筹学,包括一门运筹学的案例研究课。他曾被邀请在一个由 INFORMS 发起的会议上讲述自己开设案例课的成功经验。在斯坦福大学他多次获教学奖,包括该校知名的 Walter J. Gores 教学奖。在凯洛格管理学院时他被任命为 L. G. Lavengood 教授。2003 年在 WHU Koblenz(一所知名的德国商学院)任访问教授时,他获得了一项教学奖。

莫莉·斯蒂芬斯(Molly Stephens)是 Quinn、Emanuel、Unquhart、Oliver & Hedges 公司洛杉矶事务所的合伙人。她毕业于斯坦福大学,获工业工程学学士学位和运筹学硕士学位。斯蒂芬斯曾在斯坦福大学工程学院讲授公共演讲课,并担任运筹学案例研究课的助教。作为助教,她分析了现实世界中的运筹学问题,并将其转化成课堂教学的案例。她的研究工作得到了回报,她获得了一项本科研究的资助,并应邀在 IFORMS 会议上讲述她成功课堂案例的教学经验。毕业后在重新开始奥斯汀得克萨斯法学院为获取法学博士学位(荣誉性)的研究生学习之前,斯蒂芬斯女士在 Anderson 咨询公司担任系统集成成员,从内部亲历了很多真实的案例。

前言

运筹学导论

Introduction to Operations Research

45年前,当 Jerry Lieberman 和我着手编写本书的第 1 版时,我们的目标是写一本有开创性的参考书,它将有助于明确运筹学这一新生领域的未来教育方向。本书出版后,我们一直不清楚这个目标的实现程度,但有一点是肯定的,对本书的需求量远超出我们的预料。我们谁也无法想象随着时间的推移,世界范围内这样的高需求能否继续。

这本书前 8 版所受到的热烈追捧非常令人喜悦。特别兴奋的是本书第 6 版获得了 INFORMS(运筹学界最高的职业学会)的兰切斯特奖的荣誉提名(该奖项用于奖励每年运筹学领域最优秀的英语出版物)。

在第 8 版刚出版后,特别高兴的是收到了对本书具有很高评价的论著写作奖,包括下面的褒奖函。

37 年来本书的各个版本已引领了超过 50 万大学生熟悉运筹学,并吸引了更多的人进入这个领域从事科学活动和就职。很多运筹学领域的领军人物及教师就是首次通过本书进入这个领域的。通过本书国际版的广泛应用和翻译的 15 种其他语言的文本,为运筹学在世界范围内的扩展作出了贡献。本书在出版 37 年后仍然保持超群的地位。虽然第 8 版刚发行,其第 7 版在该类图书市场上的占有率高达 46%,在麦格劳-希尔工程类出版物的国际销售量中名列第二。

这些成就的特征可概述为:第一,从学生的角度来看,本书有很强的引导力、清晰而直观的解释、用于职业训练的很好的例子、有条理的材料,非常有用的软件支持,适度的数学知识。第二,从教师的角度来看,其吸引力在于生动的材料以及十分清晰易懂的语言表达,例如在第 8 版中新增加的元启发一章。

45 年前着手编写本书时, Jerry 已经是运筹学领域的杰出成员,一位有成就的作者和斯坦福大学运筹学科的主席,而我则是刚开始职业生涯的年轻助理教授。我非常幸运能有机会同他一起工作并向他学习,我永远感激 Jerry 给我的这个机会。

现在 Jerry 永远离开了我们,9 年前他因病去世时,我就决定用高的标准继续本书的后续各版,用以纪念 Jerry。所以我从斯坦福大学提前退休,以便全力完成本书的写作,使我有更多的时间用于准备每一个新的版本,同时也使我能更好地掌握运筹学的发展和新的趋势,使新版本的内容及时得到更新,并据此确定了下面列出的一些主要修订。

第 9 版的主要修改点

- 更加强调实际应用。并非所有人都了解,运筹学的研究仍然极大地影响着世界上很多公司和组织的成败。所以这第 9 版的一个特别任务是着力强调运筹学已取

得成效的成功案例,以此激发学生们对运筹学的学习兴趣。我们通过四种方式来实现上述目标:第一,增加了多个应用案例,这些案例用于描述该章中研究的运筹学方法在公司和组织中的实际应用带来的巨大影响。第二,在各章末尾增加了多篇运筹学获奖性应用的参考文献。第三,通过国际运筹学和管理科学学会的专门安排,增加了充分描述 100 项应用的期刊论文。第四,增加了很多习题,完成这些习题时需要阅读一篇或多篇上述论文。因此教师可以通过让学生钻研实际应用的案例材料,更加生动地讲授课程。

我们非常满意与卓越的本专业学会——国际运筹学与管理科学学会的新的合作关系。该学会提供了描述运筹学应用的 100 篇论文。运筹学与管理科学学会是针对学生、科学工作者和实践工作者在数量分析领域的一个学术性的专业学会。有关该学会的学报、会议、工作情况、学者得奖和教学资料等有关信息可登录 www.informs.org 查询。

- 约 200 道新的或修改过的习题。新的习题包括上面提到的实际应用的案例,其他新的习题包括大量支持后面将介绍的话题。在决策分析一章增加了两个新的案例,较之原来已有的两个案例要稍复杂一些。我们对第 8 版中的很多习题做了修改,可以为教师们提供更多的选择。
- 本书相关软件的更新。下一节将简单介绍结合新版提供的软件选择。新版与第 8 版的主要区别是采用了很多新的经过改进的软件版本。例如 Excel 2007 包括了多年来 Excel 及其用户界面的主要修改,这个新的 Excel 版本及其 Solver 完全被引入本版(它与老版本中所应用的软件的差别在书中也有提及)。另一个重要的例子是,TreePlan 和 Senslt 的新版本 10 年来首次在决策分析一章中被采用。在第 9 版中还提供了其他软件包的最新版本。
- 有关收益管理的新的一节。本书每一个新版本的一个标志是逐渐增加运筹学实践领域某些具有革命性的最新成果。例如在第 8 版中增加了有关元启发的一章,关于约束规划及梯度存贮模型的新章节。第 9 版中增加了另一个重要话题——在存贮论一章增加了一个完整的节,即收益管理。这是非常及时的补充,因为收益管理在航空产业中产生了重大影响,目前在其他产业领域也开始得到应用。
- 单纯形法理论一章内容的重新组织。某些教师不希望讲授改进的单纯形法,但仍希望介绍单纯形法的矩阵形式并希望包括有关单纯形法的“基础的审视”。所以,我们在新版 5.2 节中先简要介绍单纯形法的矩阵形式,然后在 5.3 节中直接引入基础的审视,再在 5.4 节中将改进单纯形法作为一个选择的内容。
- 确定效用值的简化的方法。在全书其他较小的修改中,可能最值得关注的是在 15.6 节有关效用值的简化表达式。这主要是通过一个简单的“等价抽奖法”来实现的。
- 材料的重新组织以缩减本书篇幅。之前本书各版的一个不良趋势是每次新版本

都比上一版增加篇幅,延续到第7版其篇幅已远远超过一本导论性的教材。因此我们努力缩减第8版的篇幅并决定在随后各版中避免任何篇幅的增加。在第9版中这个目标已经实现,这主要是通过以下手段:首先是认真控制不让增加很多新的内容。其次是第8版中有关实际应用的两节,因为新版中增加了应用案例,故这两节不再需要。再次是原版附录3.1因篇幅较长,将有关LINGO的构模语言和OptQuest优化移至本书网站的补充内容中(关于OptQuest移出的决定还因为一个新的版本即将推出,操作起来非常简单,但本版中还无法用上,需随后补充);最后,相当数量的节被缩写。除此之外,虽然本书作了很多修改,但希望总体结构形式上仍与第8版类似。

- 反映当今的进展方面的更新。本书特别注意内容的及时更新,主要包括各章末的参考文献,各页的脚注,以反映有关话题的最新研究进展。

可选用的软件资源

可供选择的软件资源见本书网站(www.mhhe.com/hillier),学生需付费并注册后才能使用。现概述如下。

- Excel 电子表格:目前电子表格的形式见本书有关例子的Excel文本。
- 一些Excel的补充:包括用于教学的Premium Solver(基本Excel Solver的扩展)、TreePlan(用于决策分析)、Senslt(用于概率的灵敏度分析)、RiskSim(用于模拟)和Solver Table(用于灵敏度分析)。
- 很多用于求解基本模型的Excel模板。
- LINDO(一种传统的优化软件)和LINGO(一种普及的代数建模语言)的学生版,应用于全书有关例子的建模与求解中。
- MPL(一种居于领先地位的代数建模语言)及其初级的Solver CPLEX(当今应用最广泛的优化软件)的学生版。有关教学及MPL/CPLEX构模和求解见书中的有关例子。
- 某些补充的MPL的Solver:包括CONOPT(用于凸规划)、LGO(用于全局优化)、LINDO(用于数学规划)、CoinMP(用于线性和整数规划)和BendX(用于某些随机模型)的学生版。
- 排队模拟器(可用于模拟排队系统)。
- 用于讲解不同算法的OR Tutor。
- IOR。用于学习和执行相互交叉的程序,通过Java2在独立平台上实现。

很多学生发现,OR Tutor和IOR Tutor对学习运筹学算法十分有用。当转移至下阶段自动求解OR模型时,研究发现教师教会学生应用软件通常采用下列方案之一:

- (1) Excel 电子表格,包括Excel Solver和其他附加软件;
- (2) 方便的传统软件(LINDO或LINGO);

(3) 尖端的运筹学软件(MPL 和 CPLEX)。所以第 9 版我们仍按照上一版的做法,对上述三方面都给予充分介绍,并在本书网站中对每种选择提供充分支持。

补充的在线资源

补充的在线资源中有很大大一部分需要付费后才能使用。

- 几乎书中每章都有若干包含一个本书网站中工作例子的节,以便对一些有需求的学生提供帮助,而又不打断教材的叙述及不对其他学生添加多余的篇幅(当存在一个与所讨论内容有关的补充例子时,用粗体字标记)。
- 本书每章有一个专用词汇表。
- 对各个例子均有数据文件,以保证学生集中精力作分析,而不必输入大量数据。
- 一个内容丰富的补充参考材料(包括 8 个完整的章)。
- 一个具有适当难度的测试题库。该题库内容覆盖全书范围,可用于检验学生对课程掌握的程度。题库中的大部分习题此前作者均成功地试用过。
- 教师还可获得习题答案和电子课件。

本书的使用

所有修改方面的努力都是为了使本书能更好地满足今天大学生的需求,更适合作为能反映当代运筹学实践的现代课程。软件的应用与运筹学的实践活动整合在一起,书中有关多种软件方案,为教师选择学生使用的软件提供了很大灵活性。本书提供的所有教学资源进一步扩大了学习的范围。所以本书适用于这样的课程教学,即教师希望学生手中的课本能支持和补充课堂教学中遇到的各种问题。

我和麦格劳-希尔的编辑团队认为,这次修改的努力已使第 9 版更适合用来作为大学生课本——清晰、有趣,组织有序的有用的例子和解释,更好的诱导和前景,易于寻找到重要的材料和有意思的家庭作业,没有过多的概念、术语和数学。我们确信大多数使用过本书以前版本的教师将会同意这是迄今为止最好的版本。

应用本书作为一门课程教学的前提要求我们做慎重考虑。同前面几版一样,数学保持在相对初等的水平,第 1 章~第 14 章中的大部分(导论、线性规划和数学规划)要求的数学不超出高中的代数,微积分仅在第 10 章(动态规划)的一个例子中用到。矩阵的概念用于第 5 章(单纯形法理论),第 6 章(对偶理论与灵敏度分析)和 7.4 节(内点算法),但用到的仅限于附录 4 中的内容。第 15 章的内容需要先学习一些概率理论,有些部分用到微积分。总的来说,为学习第 15 章中更高深的内容,先学习初等微积分是有用的。

本书的主要读者对象为本科高年级学生(包括有很好基础的二年级学生)及一年级的研究生。本书内容组合上有很大灵活性,可以有很多方案来组合一门课程。第 1 章和第 2 章是运筹学课程的介绍。第 3 章~第 11 章,除了用到第 3 章和第 4 章中的基础内容外,各章几乎完全独立,第 6 章和第 7.2 节均由第 5 章导出,7.1 节和 7.2 节用到第 6 章的

部分内容,学习第 9.6 节需要先熟悉 8.1 节和 8.3 节中的问题构建的内容,掌握 9.7 节需先学习 7.3 节和 8.2 节。

本书的网站将提供本书不断更新的内容,包括勘误表。要进入该网站请访问 www.mhhe.com/hillier。

正如很多人已为本书的这一版做出了重要贡献,我将诚邀你们中的每一个人为本书的下一版作贡献。可以通过下面给出的电子信箱发送你们的评论、建议和勘误表。在给出我电子信箱地址的同时,我再次向老师们保证,我将仍然不会向任何人(包括你们的学生)提供本书中习题和案例的答案。

弗雷德里克·S.希利尔
斯坦福大学 (fhillier @ stanford. edu)
2008 年 5 月

目 录

运筹学导论

Introduction to Operations Research

译序	1
前言	5
第 1 章 绪论	1
1.1 运筹学的起源	1
1.2 运筹学的性质	2
1.3 运筹学的影响	3
1.4 算法和运筹学课程软件	5
参考文献	6
习题	6
第 2 章 运筹学建模方法综述	7
2.1 定义问题和收集数据	7
2.2 数学建模	9
2.3 模型求解	12
2.4 检验模型	14
2.5 准备应用模型	15
2.6 实施	16
2.7 结论	17
参考文献	17
习题	18
第 3 章 线性规划导论	21
3.1 原形范例	22
3.2 线性规划模型	27
3.3 有关线性规划的假设	32
3.4 补充例子	38
3.5 使用电子表格建立和求解线性规划模型	54
3.6 建立大型的线性规划模型	61

3.7 结论	67
参考文献	67
习题	68
案例 汽车装配	83
第 4 章 求解线性规划问题——单纯形法	85
4.1 单纯形法的实质	85
4.2 构建单纯形法	89
4.3 单纯形法的代数	92
4.4 单纯形法的表格形式	98
4.5 单纯形法的突破	102
4.6 改造适用于其他模型形式	105
4.7 优化后分析	122
4.8 在计算机上的实施	129
4.9 求解线性规划问题的内点算法	132
4.10 结论	136
附录 LINDO 和 LINGO 的使用介绍	136
参考文献	140
习题	140
案例 纺织面料与秋季时装	153
第 5 章 单纯形法理论	156
5.1 单纯形法基础	156
5.2 单纯形法的矩阵形式	166
5.3 基础的审视	173
5.4 改进单纯形法	176
5.5 结论	179
参考文献	179
习题	179
第 6 章 对偶理论与灵敏度分析	190
6.1 对偶理论的实质	190
6.2 对偶的经济解释	198
6.3 原问题与对偶问题的关系	200
6.4 改造适用于其他原问题形式	205
6.5 对偶理论在灵敏度分析中的作用	209

6.6	灵敏度分析的实质	211
6.7	应用灵敏度分析	217
6.8	应用电子表格进行灵敏度分析	236
6.9	结论	250
	参考文献	250
	习题	251
	案例 控制空气污染	272
第 7 章	线性规划的其他算法	274
7.1	对偶单纯形法	274
7.2	参数线性规划	277
7.3	上界法	282
7.4	内点算法	284
7.5	结论	294
	参考文献	295
	习题	295
第 8 章	运输和指派问题	301
8.1	运输问题	302
8.2	用于运输问题的单纯形法	313
8.3	指派问题	328
8.4	求解指派问题的特殊算法	336
8.5	结论	339
	参考文献	339
	习题	339
	案例 向市场运送木材问题	351
第 9 章	网络优化模型	353
9.1	原形范例	354
9.2	网络术语	355
9.3	最短路径问题	358
9.4	最小支撑树问题	362
9.5	最大流问题	366
9.6	最小费用流问题	372
9.7	网络单纯形法	379
9.8	一个项目时间—费用平衡优化的网络模型	386

9.9 结论	396
参考文献	397
习题	397
案例 资金流动	409
第 10 章 动态规划	412
10.1 动态规划的范例	412
10.2 动态规划问题的特征	416
10.3 确定性动态规划	418
10.4 随机性动态规划	436
10.5 结论	441
参考文献	441
习题	441
第 11 章 整数规划	450
11.1 范例	451
11.2 0-1 整数规划的应用	453
11.3 0-1 变量在模型构建中的创新应用	458
11.4 一些建模例子	463
11.5 求解整数规划问题的若干展望	471
11.6 分支定界法及其在求解 0-1 整数规划中的应用	475
11.7 用于混合整数规划的分支定界算法	486
11.8 求解 0-1 整数规划的分支-切割法	492
11.9 同约束规划的结合	498
11.10 结论	502
参考文献	503
习题	504
案例 能力的担忧	520
第 15 章 决策分析	523
15.1 原形范例	524
15.2 不进行试验的决策制定	524
15.3 进行试验时的决策制定	530
15.4 决策树	535
15.5 使用电子表格对决策树进行敏感性分析	540
15.6 效用理论	548

15.7 决策分析的实际应用	554
15.8 结论	555
参考文献	556
习题	556
案例 智能商务	571
附录 4 矩阵和矩阵运算	575
附录 5 正态分布表	582
部分习题答案	584

绪 论



1.1 运筹学的起源

产业革命以来,组织的规模和复杂性有了显著的增长。早些时候的小作坊已经演变成今天的大规模公司。结果是显而易见的,这个革命性变化的一个组成部分就是组织中劳动和管理职能的分配有了巨大的增长。然而,在这个增长中产生了新的问题,而且是在许多组织中存在的问题。其中一个问题是组织的各个部门都有发展成具有自己目标和评价系统的、相对独立的部门的趋势,因而各个部门的行动和目标就有可能与组织的整体目标相矛盾。对一个部门是最好的做法对另一个部门常常是有害的,因此各部门的目标可能会发生冲突。另一个问题是,随着组织复杂性和特殊性的增长,对于组织来说,如何最有效地分配有用资源给不同部门将变得越来越困难。这些问题需要找到一个好的方法来解决。在这样的需求环境下,产生了**运筹学**(operations research, OR)这一学科。

现代运筹学的起源可以追溯到几十年前在某些组织的管理中最先试用科学手段的时候^①。然而,现在普遍认为,运筹学的真正活动是从第二次世界大战初期的军事任务开始的。当时迫切需把各项稀少的资源以更有效的方式分配给各种不同的军事作业及在每一作业内的各项活动,所以英国及随后美国的军事管理当局都号召大批科学家运用科学手段来处理战略与战术问题。这实际上是要求它们对各种(军事)作业进行研究,这些科学家小组就是最早的运筹小组。这些小组创造的有效使用雷达工具的新方法,对英国空军在战役中取胜发挥了重要作用。通过研究如何更好地管理护航和反潜作业,这些小组在北大西洋舰队反潜战中发挥了重要作用。在之后的太平洋岛屿的战役中也发挥了同样的作用。

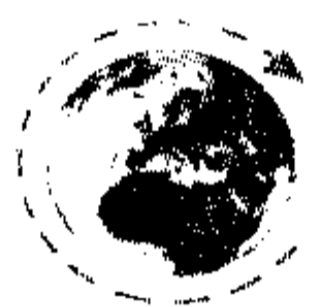
战争结束后,运筹学在战争中获得的成功引起了在军事行业以外的其他行业应用运筹学的兴趣。第二次世界大战结束后的工业复苏时期,由于组织内与日俱增的复杂性和

^① 参考文献 2 提供了一直追踪到 1564 年的一段有趣的历史,它描述了 1564—1935 年的影响后来运筹学发展的大量科学贡献。

专门化所产生的问题,人们认识到这些问题基本上与战争中所面临的问题类似,只是具有的现实环境发生了变化,运筹学就这样被引入工商企业和政府部门,在20世纪50年代以后得到了广泛的应用。

另外,至少还有两个因素对运筹学的飞速发展起到了重要作用。一是在改进运筹学方法方面有了实质性的进步。战后许多参加过运筹学小组或者听说过这项工作的科学家都主动对相关领域进行研究,这直接推动了运筹学方法在技术上的巨大进步。1947年,George Dantzig提出了用单纯形法求解线性规划问题的一般数学模型。20世纪50年代末,运筹学的许多基本理论和工具都已形成,比如线性规划、动态规划、排队论和存储论。

另一个重要因素来自电子计算机革命对促进运筹学发展所带来的巨大冲击。运筹学中的复杂问题通常需要有效地处理大量的计算工作,手工完成这项工作显然是不可能的。借助计算机的能力完成数学计算要比手工计算快几千倍甚至几百万倍,因而计算机的发展对运筹学研究起到了极大的促进作用。20世纪80年代个人计算机及相关软件的快速普及推动了运筹学的进一步发展,这都使运筹学更易于被人们大量地使用。今天,已有数百万人使用运筹学软件,大量的计算机包括大型机和家用计算机被用来解决运筹学问题。



1.2 运筹学的性质

正如它的名字所蕴含的,运筹学包含了运作研究的意思。因而,运筹学主要应用于引导和调整一个组织内的工作。事实上,运筹学被广泛地应用于各个领域,比如制造业、运输业、建筑业、通信业、金融业、卫生保健、军事领域和公共服务业等。因而运筹学的应用范围是非常广泛的。

运筹学的第一个特征是它运用的研究方法类似于已有的科学领域所采用的科学方法。在相当大的程度上,科学方法被用于对所关注的问题进行调查(事实上,管理科学有时被当作运筹的同义词)。运筹学的运算过程开始于仔细的观察和阐明问题,同时收集所有相关数据;接下来构建一个可以概括真正问题本质的数学模型;然后假设这个模型可以充分精确地表示问题的本质特征,并且从模型中获得的结论也是有效的;最后用适当的案例来验证这种假设,并且按照需求调整,并最终证明这种假设是正确的(这一步通常被称为模型的验证)。因而,在某种意义上,运筹学包括对业务的基本特性进行创造性的科学研究。然而,运筹学所涉及的内容远不止这些,运筹学还参与组织的实际管理。因而,为了成功,运筹学也必须为决策者提供他们所需要的正确的、易于理解的结论。

运筹学的第二个特征是它的广泛视野。正如上一节所述,运筹学着眼于组织整体的利益。因而,运筹学试图用一种方法解决组织中各成员利益的冲突以实现整个组织的最优。这不仅意味着每个问题的研究都要清楚地考虑到组织的所有部分,而且所要实现的目标必须与组织的整体利益保持一致。

运筹学的第三个特征是它常常会考虑寻求问题的最优解。它的目标是确定最可行的运作过程,而不是简单地改善现状。虽然它会根据管理的实际需要被详细地解释,但在运筹学中寻求最优解是一个重要的主题。

上述特征很自然地导引出运筹学的另一个特征。众所周知,没有任何一个人可以是运筹学工作各个方面的专家,这就需要一群具有不同背景和技能的人才。因此,当执行一个新问题的运筹学研究时,利用一个小组的方式通常是十分必要的。这样一个运筹学小组需要包括受过以下高级培训的人才:数学、统计学、概率论、经济学、工商管理、计算机科学、工程学、物理学、行为科学以及运筹学的专业技巧。这些团队也需要有必要的经验和各种技能,以适当地考虑贯穿整个组织的许多分支问题。



1.3 运筹学的影响

运筹学对于提高全球许多组织的效率都有很大影响,同时,运筹学在提高各国的生产率方面也起到了重要作用。国际运筹学联合会(IFORS)目前有几个成员国,每个国家也有自己的运筹学会。亚、欧两洲都有自己的运筹学联合会,分别举办国际会议和出版国际学刊。运筹学与管理科学学会(INFORMS)是一个国际性的运筹学社团。在它出版的多种刊物中,有一名为 *Interfaces* 的刊物,定期发表一些运筹学研究的成果及其对各类组织带来的效益。

为了更好地了解运筹学的广泛应用,我们在表 1.1 中列举出了一些实际应用的例子。注意表中前两列显示了组织和应用的多样性,第 3 列为对应的应用案例所在的章节。案例提供了该项应用的一个简短描述,在其参考文献的相关文章中还将提供详细的研究内容(你可以在本节中看到这些应用案例中的第一个),最后一列指出这些应用带来的每年成百万美元的节约额。需要指出的是,很多附加的效益未在表中列出(例如对顾客服务的改进和管理的改善),并且还需考虑比财务节省更重要的事(你将在习题 1.3-1~1.3-3 中有机会考虑这些不能明显看到的效益)。有关这些应用的详细描述的文章可以从本书网站(www.mhhe.com/hillier)中找到。

表 1.1 在应用案例中描述的运筹学的应用

组 织	应用的领域	所在节	每年的节约额 /百万美元
联邦快递	物流计划和运输	1.3	未估算
大陆航空公司	当原有计划安排被打乱时重新分配航班的 机组人员	2.2	40
Swift 公司	改善销售与制造业绩	3.1	12
纪念斯隆·凯特琳 癌症研究中心	放射治疗的设计	3.4	459
联合航空公司	对机场和后备部门职员的工作计划安排	3.4	6
Welch's 公司	原材的搬运和优化利用	3.6	0.15
三星电子	缩减制造时间和存贮量	4.3	增收 200
太平洋木材公司	森林的长期生态管理	6.7	净利润 398
宝洁	生产与分配系统的重新设计	8.1	200
加拿大太平洋铁路	铁路货运的日常安排	9.3	100
联合航空公司	当计划被打乱时重新对航班分配飞机	9.6	未估算
美国军方	“沙漠风暴”中的后勤计划	10.3	未估算

续表

组 织	应用的领域	所在节	每年的节约额 /百万美元
新西兰航空公司	航空公司机组的安排	11.2	6.7
塔可钟	安排餐厅雇员的工作计划	11.5	13
废品管理	建立一个废品收集与处理的日常管理系统	11.7	100
工人银行	建立投资咨询的决策支持系统	12.1	31
西尔斯	安排内部服务和货物运送的车辆、路线	13.2	42
Conoco-Phillips 公司	石油勘探项目评价	15.2	未估算
工人补偿委员会	管理具有高风险的残疾理赔和康复的费用	15.3	4
西屋电器	研究与发展项目的评估	15.4	未估算
美林公司	管理信用流程变动对流动性的风险	16.2	流动性超 4000
标致雪铁龙	指导高效率汽车装配厂的设计过程	16.8	利润增加 130
科凯国际集团	改进银行出纳员的服务效率	17.6	20
通用汽车	提高生产线效率	17.9	90
迪尔公司	对整条供应链进行存货管理	18.5	存贮减少 1000
时代公司	对杂志分配渠道的管理	18.7	利润增加 3.5
第一银行公司	管理信用卡的信用流程和利率	19.2	利润增加 75
美林公司	对提供金融服务的价格分析	20.2	收入增加 50
美国电报电话公司	呼叫中心的设计与运营	20.5	利润增加 750

虽然大部分运筹学的日常研究提供比表 1.1 中应用要小得多的效益,但表 1.1 中最右端的列正确地反映了大型的计划完善的运筹学的研究有可能带来的重要影响。

应用案例

联邦快递(Federal Express FedEx)是世界上最大的快递公司。每个工作日,联邦快递都要将超过 650 万件的信件、包裹及其他货物递送到美国各地及全世界的 220 多个国家或地区。在一些特殊情况下,有些货物要保证在第二天早上 10:30 之前送到目的地。

要提供这种服务,物流面临巨大的挑战。每天的递送过程中,这些上百万件的货物要单独分拣,正确地运送(通常是用飞机),并在规定的极短时间内递送到准确的目的地(通常是用汽车)。这一切是如何办到的呢?

运筹学是驱动该公司的技术引擎。自从 1973 年联邦快递成立以来,运筹学就一直在帮助该公司制订主要的经营决策,包括设备投资、路径结构、调度、融资及设备布局。由于在公司早期应用运筹学真正节约了大量成本,负责运筹的人参加每周的高级管理会议已经成为一种惯例。实际上,一些高级公司副总裁也是从表现出色的联邦快递运筹团队中提升起来的。

联邦快递已经成为世界级的公司。在每年财富杂志公布的“全球最受尊敬的公司”中,联邦快递均会位列前几名。该公司还是声望最高奖——现在称为 INFORMS 奖,每年它被用来表彰将运筹学以开创性的、变化的、新颖的及持久性的方式有效地、反复地应用于组织决策制订的公司——的首位获得者(1991)。

资料来源: R. O. Mason, J. L. McKenney, W. Carlson, and D. Copeland; “Absolutely, Positive Operations Research: The Federal Express Story,” *Interfaces*, 27(2): 17-36, March-April 1997. (以下网址提供本文的链接: www.mhhe.com/hillier.)



1.4 算法和运筹学课程软件

本书的很大一部分都讲述了运筹学的主要算法,以解决一定类型的问题。有些算法是非常有效率的,一般可处理含数百或数千个变量的问题。书中将介绍如何使用算法工作,并使它们更有效率。然后,你将通过计算机使用这些算法来解决不同的问题。本书网站(www.mhhe.com/hillier)上提供的运筹学课程软件是完成上述工作的一个重要工具。

运筹学课程软件的一个特征是它包含一个名为 OR Tutor 的程序。该程序是帮助你学习算法的家庭教师。它由许多案例组成,以显示和解释这些算法,这些案例是对书上例子的补充。

运筹学课件还包括一个名为 IOR Tutorial 的用 Java 语言编写的专用软件包。这个创新的软件包专门用来提供学生们使用本书的学习经验。当你集中学习和运用算法的逻辑性时,计算机会完成全部常规的计算。这都补充了书中的案例,而且你会发现这些互动的程序是一个求解许多家庭作业问题的有效方法。IOR Tutorial 也包括其他很多有用的程序、一些自动执行算法的程序和一些提出如何解决随问题数据变化的算法的图解展示程序。

实际上,算法通常由商业软件包来执行。让学生们熟悉软件包的种类是很重要的,以便他们毕业后可以更好地使用这些软件包。因此,IOR 专用软件包括以下三种普遍使用软件包的有用材料。这些软件包将会帮助你有效地求解书中几乎全部的运筹学模型。由于书中有几个原有的软件包不适用的案例,我们还在运筹学指导软件中增加了自己的自动运算程序。

Microsoft Excel 是一个当今普遍使用的重要的电子表格包,它用电子表格的格式来建立小的运筹学模型。然后 Excel Solver(或者是这个插件的一个加强版,比如运筹学课件包括的对于教育用的 Premium Solver)被用来求解模型。你的运筹学课件基于较新的 Excel 2007,包括书中几乎所有章节的 Excel 文件。每章提出一个使用 Excel 求解问题的案例,该章的 Excel 文件给出了完整的电子制表软件规范和解决方案,并对书中的许多模型提供了一个包括求解模型的所有必要方程的 Excel 模板。本书网站也提供了一些 Excel 插件。

虽然已过了许多年,LINDO 和 LINGO 仍然是受欢迎的运筹学软件包。现在,LINDO 和 LINGO 的学生版本可以从网络上自由下载。运筹学课件也提供了这个学生版本。对于 Excel,每次可以用这个软件解决一个案例,在运筹学课件每章的 LINGO/LINDO 文档里都提供了所有细节。

CPLEX 是一个尖端的软件包,已经被广泛应用于解决高难运筹学问题。在处理这种问题时,通常使用一个建模系统来有效表达数学模型然后将其输入计算机。MPL 是一个用户界面友好型的建模系统,它使用 CPLEX 作为主要求解工具。但是还有其他很多求解工具,包括 LINDO, CoinMP(在 4.8 节中介绍), CONOPT(在 12.9 节中介绍), LGO(在 12.10 节中介绍)和 BendX(求解某些随机模型时使用)。MPL 的学生版及最新的 CPLEX 及其求解工具的学生版可以通过付费的方式从网站下载。为了方便,运筹学课

件也包括了这个软件。在相应的章节里,运筹学课件在 MPL/CPLEX 文档里详细解释了刻意求解的案例。

我们将在后文更详细地描述这三个软件包,并介绍如何使用它们(特别是第 3 章、第 4 章结尾处)。附录 1 还提供了运筹学课件的文件,包括 OR Tutor 和 IOR Tutorial。每章习题开始处有说明,习题题号左边有标记或部分有标记的(包括示范性的或具交互式过程)提示会很有帮助。

本书网站中包含了每章的词汇表。

参考文献

1. Bell, P. C., C. K. Anderson, and S. P. Kaiser: "Strategic Operations Research and the Edelman Prize Finalist Applications 1989–1998," *Operations Research*, **51**(1): 17–31, January–February 2003.
2. Gass, S. I., and A. A. Assad: *An Annotated Timeline of Operations Research: An Informal History*, Kluwer Academic Publishers (now Springer), Boston, 2005.
3. Gass, S. I., and C. M. Harris (eds.): *Encyclopedia of Operations Research and Management Science*, 2d ed., Kluwer Academic Publishers (now Springer), Boston, 2001.
4. Horner, P.: "History in the Making," *OR/MS Today*, **29**(5): 30–39, October 2002.
5. Horner, P. (ed.): "Special Issue: Executive's Guide to Operations Research," *OR/MS Today*, Institute for Operations Research and the Management Sciences, **27**(3), June 2000.
6. Kirby, M. W.: "Operations Research Trajectories: The Anglo-American Experience from the 1940s to the 1990s," *Operations Research*, **48**(5): 661–670, September–October 2000.
7. Miser, H. J.: "The Easy Chair: What OR/MS Workers Should Know About the Early Formative Years of Their Profession," *Interfaces*, **30**(2): 99–111, March–April 2000.
8. Wein, L. M. (ed.): "50th Anniversary Issue," *Operations Research* (a special issue featuring personalized accounts of some of the key early theoretical and practical developments in the field), **50**(1), January–February 2002.

习题

- 1.3-1 从表 1.1 中选择一个应用运筹学的例子,仔细阅读其应用运筹学研究的文章(从表中第 3 列所示年份的 *Interfaces* 的 1 月~2 月号查找)。然后写一篇应用运筹学及其好处(包括非经济利益)的总结(篇幅为两页)。
- 1.3-2 从表 1.1 中选择 3 个应用运筹学的例子,仔细阅读表中第 3 列给出的应用案例中所提示的应用运筹学研究的文章。然后对于这 3 个例子分别写一篇应用运筹学及其好处(包括非经济利益)的总结(篇幅为一页)。
- 1.3-3 阅读 1.3 节中完整描述运筹学应用的文章及概要归纳的应用案例,列出上述研究的所有财务与非财务的效益。

运筹学建模方法综述

本书的大部分篇幅被用来阐述运筹学的数学方法。这种写法是非常恰当的,因为这些数学定量技术构成了运筹学的主体。然而,这并不意味着实际的运筹学研究主要是数学练习。事实上,数学分析通常只代表研究总工作量相对较小的一部分。本章的目的是通过对典型运筹学研究所有主要阶段的描述,得到一个全局性的概念。

以下是概括运筹学研究常见(且相互重叠的)阶段的一种方式。

1. 定义感兴趣的问题并且收集相关数据。
2. 构建表示问题的数学模型。
3. 开发一个计算机程序,通过它从模型中求得问题的解。
4. 检验模型,如果有必要,对模型进行调整。
5. 根据管理层的要求,准备模型的后续应用。
6. 实施。

以上每个阶段将在以下各节中依次讨论。

每章末的参考文献包括一些获奖的运筹学研究成果,这些成果提供了如何执行上述 6 个步骤的优秀例子。我们将这些例子分散在各章中,假如你想从这些获奖应用中学到更多东西,相关论文请查阅本书网站 www.mhhe.com/hillier。



2.1 定义问题和收集数据

与教科书中的例子相反,运筹学研究团队遇到的大部分实际问题最初是以模糊的、不精确的方式被描述出来的。因此,首先要做的是研究相关系统,并使被研究的问题得到明确说明。详细来说,这包括确定合适的目标、实际操作的约束、被研究领域和组织的其他领域间的相互关系、其他可能的行动路线、制订决策的时间限制等。问题定义过程是至关重要的,因为它对研究结论的意义有重大影响。从“错误”的问题中,很难得出“正确”的答案。

首先要认识到,一个运筹学研究团队通常扮演顾问的角色。并没有一个现成的问题

在那里等着团队成员,然后让他们用某一种方法来解决它。相反,他们为管理层提供建议(通常是向某个关键的决策者)。团队对问题进行详细的技术分析,然后向管理层提供建议。通常,向管理层提供的报告包含多个候选方案,在不同的假设条件下或者是在一些只能由管理层来评价的政策参数(如成本与收益之间的折中)值的不同范围上颇具吸引力。管理层评价该项研究以及由它提出的建议,考虑各种无形因素,基于最佳判断做出最终的决策。因此,团队和管理层步调一致是非常重要的,包括从管理层的角度确定“合适”的问题,并且使研究进行的方向得到管理层的支持。

确定合适的目标是问题定义一个非常重要的方面。为了做到这一点,首先需要确定真正对所研究的系统做出决策的管理层成员,然后查明该管理人员对相关目标的想法(从一开始就让决策者参与进来,对于获得他对实施这项研究的支持也是很重要的)。

由于运筹学的特点,它关心的是整个组织而不仅是它的特定部分的福利。运筹学寻求对整个组织最优的解决方案,而不是那些只对部分最好的次优方案。因此,理想化的目标应该是整个组织的目标。然而,这并不总是很方便的。很多问题只涉及组织的一部分,因此如果表述的目标太宽泛或者考虑到对组织其他部分的所有副作用,那么分析将变得不实用。相反,用于研究的目标应该尽可能明确,而且它们仍能够包含决策者的主要目标并且与组织更高层次的目标保持一定程度的一致性。

对于营利性组织,避免局部最优化的可行方法是使用长期收益最大化作为唯一的目标(考虑到金钱的时间价值)。“长期”一词表明这个目标具有灵活性,以考虑那些不能马上带来收益但是最终值得做的行动(例如,研究和开发项目)。这个方法具有相当大的优点。这样的目标充分明确,能够被方便地使用,而且看起来也足够宽泛到能够涵盖营利组织的基本目标。事实上,有人相信,其他所有合理目标都能够被转换成这个目标。

然而,真实的情况是很多营利组织并不使用这个方法。针对美国企业的大量研究发现,管理层趋向于采用满意利润目标与其他目标相结合的方式代替长期收益最大化。其他目标通常包括维持稳定收益、增加(或者维持)市场份额、实现产品多样化、维持稳定价格、提高工人士气、维持对企业的家族控制以及提高企业声望等。实现这些目标可能实现长期收益最大化,但是这些关系是非常不明显的,可能很难将它们融入单一的目标。

另外,存在包含与营利动机不相吻合的社会责任的其他考虑。在单个国家内的商业企业一般涉及五方:①所有者(股东等),渴望赢利(分红、股票增值等);②雇员,期望合理工资水平上的稳定雇用;③客户,期望以合理价格获得可信赖的产品;④供应商,期望企业守信并且自己的产品能以合理的价格出售;⑤政府以及国家,期望公正的税收和顾及国家利益。所有五方都对企业做出重大贡献,企业不应该被看成任何一方剥削其他方的专有工具。出于同样的原因,跨国企业负有采用对社会负责的手段的额外责任。因此,尽管我们承认管理层的主要责任是赢利(最终所有五方都获利),我们注意到其更广泛的社会责任也必须被承认。

通常,运筹学研究团队会花费大量的时间收集问题的相关数据。大部分数据既用于获得对问题的充分理解,又为下一阶段研究建立的数学模型提供所需的输入。很多时候,许多数据在研究的开始阶段并不能被获得,可能是因为数据从来就没有被保存或者是被保存的数据过时了,或者是以错误的形式保存的。因此,经常需要安装新的基于计算机的

管理信息系统,得以经常地、按所需的形式收集数据。运筹学研究团队一般需要组织中其他关键人员的辅助,来追踪所有的重要数据。即使付出了这样的努力,很多数据仍然是非常“不精确的”,只是基于粗略的猜测。因此,运筹学研究团队需要花费大量的时间来提高数据的准确度,然后使用可能获得的质量最好的数据。

近几年来,随着数据库的大量使用,以及它们爆炸式的容量增长,运筹学研究团队通常会发现,现在最大的数据问题并不是所获得的数据太少,而是拥有太多的数据。可能有成千上万的数据源,数据总量将以千兆字节甚至是万亿字节为单位来计算。在这样的环境下,定位相关数据以及确认这些数据中令人感兴趣的模式,会变成一项不可承受的任务。运筹学研究团队的新工具之一——**数据挖掘**(data mining),可以用来解决这个问题。数据挖掘方法在大型数据库中搜索可能产生有用决策的有用模式(本章参考文献2提供了有关数据挖掘的进一步背景)。

例 20世纪90年代后期,全方位服务的金融服务企业受到收取极低交易费用的电子经纪企业的威胁。美林公司为此进行了一项庞大的运筹学研究,如何将基于对资产完整服务按资产值固定百分比收费的方案,拆分为完全按服务内容收取较低费用的方案。这里数据收集和处理起到关键作用。为了分析各个客户行为对不同方案的影响,运筹学工作组需要组合200千兆字节客户的数据库。数据库中含有500万客户、1000万个账户、1亿单交易和2.5亿条底账记录,这些需要从大量产品的数据库中经过合并、过滤和清理得到。对这项研究建议的采用带来了一年增加近500亿客房资产的吸引量和近8000万美元的收益。(参考文献A2详细描述了这项研究)



2.2 数学建模

在决策者的问题被定义之后,下一阶段就是将这个问题以容易分析的形式进行表示。传统的运筹学方法主要是建立表示问题实质的数学模型。在讨论怎样建立这类模型之前,我们首先对模型性质做一个普遍性的探讨,并且对数学模型的性质进行特殊的探讨。

模型或者理想化表示是日常生活的一个组成部分。常见的例子包括模型飞机、肖像、地球仪等。类似地,模型在科学和商业领域中起到了重要作用。例如,原子模型、遗传结构模型、描述物理运动定律或者化学反应的数学等式、地图、组织图以及工业会计系统等。这些模型在抽象问题本质、表明相互关系以及促进分析等方面的价值是无法估量的。

数学模型也是理想化的表示,但是它们采用数学符号和表达式来表示。物理定律,例如 $F=ma$ 和 $E=mc^2$ 是熟悉的例子。类似地,商业问题的数学模型,是描述问题实质的等式和相关数学表达式的系统。因此,如果要制订 n 个相关的可量化的决策,可以将它们表示成**决策变量**(decision variables) (x_1, x_2, \dots, x_n) , 其中各个变量值需要被确定。效果(例如,收益)的合理度量被表示成这些决策变量的数学函数(例如, $P=3x_1+2x_2+\dots+5x_n$)。这个函数被称为**目标函数**(objective function)。任何对决策变量值的约束也能够用数学方法表示,一般是通过等式或者不等式(例如, $x_1+3x_1x_2+2x_2\leq 10$)。这些用于限

制的数学表达式通常被称为**约束**(constraints)。约束和目标函数中的常数(也就是,系数和右端的常数项)被称为模型的**参数**(parameters)。因此,数学模型可能指出,问题是在特定约束下选择最大化目标函数的决策变量值。这类模型以及它的轻微变体代表了运筹学中常用到的模型。

确定模型参数的合适赋值(一个参数一个值)是模型构建过程中重要的以及具有挑战性的部分。与教科书中参数值被预先给定的问题相反,确定现实问题的参数值需要收集相关数据。正如前面小节所讨论的,收集准确的数据通常是困难的。因此,参数的赋值通常必然只是一个粗略的估计。由于参数真实值的不确定性,分析模型解怎样随着参数值的变化而变化是重要的。这个过程通常被称为**敏感性分析**(sensitivity analysis),将在下一节(以及第6章的大部分)中进一步讨论。

虽然我们指的是商业问题的数学模型,但是现实问题通常不只有单一的“正确”模型。2.4 小节将描述验证模型的过程怎样产生一连串模型,提供对问题越来越好的表示,甚至有可能建立两个或者多个完全不同类型的模型,帮助分析相同的问题。

在本书的其他部分你将会见到大量的数学模型例子。在接下来的几章中,所研究的一类特别重要的模型是**线性规划模型**(linear programming model),该模型中的目标函数和约束都是线性函数。在第3章中建立的线性规划模型适合以下各类问题:①最大化收益的产品组合的确定;②放射性疗法的设计,在有效杀死肿瘤的同时最小化对周围健康组织的影响;③最大化整体纯收益的农作物面积的分配;④以最小成本实现空气质量标准的污染消除方法的组合。

数学模型与对问题的口头描述相比,具有很多优势。其中之一就是数学模型以更为准确的方式描述了问题。这使得问题的整体结构更为全面,并且帮助揭示重要的因果关系。这样,模型更清楚地表明了什么样的数据与分析相关,促进了以整体方式处理问题,以及同时考虑所有的相互依赖关系。最后,数学模型架起了高性能数学技术和用于分析问题的计算机之间的桥梁。确实,可用于个人计算机和大型计算机软件包已经被广泛地用于求解很多数学模型。

然而,在使用数学模型时需要避免一些错误。模型是问题的理想化抽象。因此,如果想要使问题能够被求解,一般需要进行近似和简化假设。必须注意确保模型是对问题的有效表示。判断模型有效性的正确准则是模型是否以充分的准确度预测候选行动的相对效果并允许合理地决策。所以没有必要包括对所考虑的候选行动具有大致相同影响的不重要的细节或者因素。只要效果度量的相对值(也就是,它们值之间的差)充分准确,甚至没有必要在各种可能路线中要求它们的绝对大小大概正确。因此,所需的是模型的预测与现实世界真实发生的情况具有高度的相关性。为了确认这个需求是否被满足,有必要进行合适的检验以及对模型进行调整,这将在2.4 小节进行讨论。虽然这个检验阶段被放在本章的后面,但是模型验证的大部分工作实际上是在模型构建的过程中进行的,帮助引导数学模型的建立。

在建立模型时,一个好方法是从非常简单的模型开始,然后以演化的方式逐渐产生更为精炼、更为近似地反映现实问题复杂性的模型。只要保持模型能够被求解,模型充实过程可不断持续。但需要不断考虑模型准确性与模型可求解性之间的折中(对这个过程的

详细叙述可参考本章参考文献 8)。

构建运筹模型的一个关键步骤是建立目标函数。这需要相对于问题被定义时确定的每个决策者的最终目标建立效果的定量度量。如果具有多个目标,那么它们各自的度量通常被转换以及结合成组合度量,被称为**效果的整体度量**(overall measure of performance)。这个整体度量相对于组织更高层的目标可能是有形的(例如,收益),也可能是抽象的(例如,效用)。在后面的例子中,建立这种度量的任务通常是复杂的,需要详细地比较目标以及它们的相对重要性。在效果的整体度量被建立之后,目标函数将以决策变量数学函数的形式表示这种度量。另外,也有方法明确地同时考虑多个目标,这类方法中的一个(目标规划)将在第7章的补充部分进行讨论。

应用案例

大陆航空公司(Continental Airlines)是美国一个主要的航空运输企业,业务范围包括客运、货运和邮递。大陆航空公司每天要处理 2 000 架次以上的飞机起降,其中,国内航线 100 个以上,国外航线将近 100 个。

像大陆航空公司这样的公司每天都面临由于无法预测时间引起的航空时刻表被打乱的紧急事件,原因包括恶劣的天气、飞机机械故障及员工的无效工作。造成的结果是员工可能无法到岗为其他的定期航班提供服务。航空公司必须重新安排员工以满足航班的需求并将打乱的时刻表恢复正常,该过程既要考虑成本的节约,又要遵守所有的政府规定、合同义务并保证基本生活条件需求。

为了解决该问题,大陆航空公司的一个运筹团队开发了一个详细的数学模型,一旦发生紧急情况,应用该模型可以很快将员工分配给所有的航班。由于航空公司有数千名员工,每日的航班也有数千个,因此该模型需要能够考虑所有可能的员工和航班匹配。该模型有上百万个决策变量,同时有几个千个约束。在该模型应用的第一年(主要是 2001 年),该模型被成功应用了 4 次,拯救了航空时刻表被打乱的紧急情况(两次暴风雪、一次洪水及“9·11”恐怖袭击事件)。该模型大约节约了近 4 000 万美元。随后的应用被扩展到了许多日常性的小型紧急事件中。

尽管其他的航空公司随后应用运筹学来解决类似的问题,但是大陆航空公司的模型较其他航空公司能够更快地从被打乱的时刻表中恢复正常,并且延迟和取消的航班也较少。这种优势使大陆航空公司在 21 世纪最初几年整个航空业艰苦时期的竞争中保持了相对较为有利的地位。由于在该领域的创新,大陆航空公司于 2002 年在表彰运筹学和管理学成就的 Franz Edelman 奖的竞争中获得了令人瞩目的一等奖。

资料来源:G. Yu, M. Arguello, C. Song, S. M. McGowan, and A. White; "A New Era for Crew Recovery at Continental Airlines," *Interface*, 33(1): 5-12, Jan. -Feb. 2003. (以下网址提供本文的链接: www.mhhe.com/hillier.)

例 负责用水控制和公共工作的荷兰政府部门 Rijkswaterstaat 进行了一项大型的运筹学研究,建立了新的国家水资源管理政策。这个新政策在投资花费方面节约了上千万美元,并且将每年的农业损失降低了大约 1 500 万美元,同时也降低了温度和海藻污

染。这项运筹学研究没有采用单一的数学模型,而是建立了一个拥有 50 个模型的综合集成系统。另外,其中一些模型的简单和复杂版本均已建立。简单版本被用于获得基本情况,包括折中分析;复杂版本则被用于分析的关键部分或者需要更加准确、详细的输出。整个运筹学研究直接包含 125 人·年的努力(1/3 以上用于数据收集),建立了大量的计算机程序并构建了庞大的数据(这项研究的详细描述见参考文献 A7)。



2.3 模型求解

在所考虑问题的数学模型被建立之后,运筹学研究的下一个阶段是开发程序(通常是基于计算机的程序),来求解模型。你可能认为这肯定是研究的主要部分,但是事实上在大多数事例中并非如此。有时,它是一个相对简单的步骤,是运筹的标准算法(algorithms)之一(系统的求解过程),在装有大量软件包的计算机上运行。对于有经验的运筹学者,求解是有趣的工作。然而真正的工作在于先前和以后的阶段,包括后面小节中讨论的优化后分析。

由于本书的大部分内容讲述的是怎样获得各种重要数学模型的解,所以在这里不需要多讲。但是,我们仍需要讨论这些解的特点。

运筹学的一个共同主题是搜索最优(optimal)或者最好的解(solution)。确实,很多程序已经被建立,并在本书列出,以找出特定类型问题的解。然而,需要认识到这些解仅仅对所使用的模型来讲是最优的。由于模型是理想化的而不是问题的真实表示,所以不能不切实际地保证模型的最优解是对现实问题能够实施的最好可能解。现实问题有太多无法估量的因素和不确定性。然而,如果模型被很好地定义和检验,那么产生的解应该是对现实问题理想行动的良好近似。因此,不要沉浸在不可能性里,你应该检验运筹学的现实成果,它能否比其他方式提供对行动更好的引导。

杰出的管理科学家、诺贝尔经济学奖获得者赫伯特·西蒙(Herbert Simon)指出满意(satisficing)比最优化在现实应用中更切合实际。单词“满意”由单词“满足”(satisfactory)和“优化”(optimizing)结合而成。西蒙描述了管理者在处理手头问题时寻求“足够好的”解决方案的趋势。更为实用的方法可能被采用,而不是试图建立效果的整体度量以最优化地处理各种期望目标(包括判断组织不同部分效果所明确定义的准则)之间的冲突。在各个领域内可以基于效果的过去水平或者竞争者正在达成的水平将目标设定成效果的最低满足水平。如果能够找出使得所有的目标均被满足的解,那么该解可以直接被采用。这就是满意的本质。

最优和满意之间的差别反映了将理论应用到现实时经常面对的理论 and 现实之间的差别。正如英国著名运筹学者塞缪尔·艾伦(Samuel Eilon)所说:“优化是最终的科学,满意是可行的艺术。”^①

运筹学研究团队试图让决策过程尽可能实现“最终的科学”。然而,成功的团队会意

^① S. Eilon, "Goals and Constraints in Decision-making," *Operational Research Quarterly*, 23: 3-15, 1972-Address given at the 1971 annual conference of the Canadian Operational Research Society.

识到决策者压倒性的需求,在合理的时间内获得对行动的满意指导。因此,运筹学的目标应该是以最优的方式进行调查和研究,而不管这能否发现模型的最优解。因此,除了追求最终的科学,运筹学研究团队也应该考虑研究的成本以及延期完成的不利因素,确保从研究中产生的纯收益最大化。按照这个理念,运筹学研究团队有时会采用启发式程序(heuristic procedures)(也就是,直觉设计的程序不能够保证最优解)找出好的次优解(suboptimal solution)。这种方法常常用于对问题的模型找出最优解所需要的时间和成本非常大的情况下。近年来,大量研究建立了有效的元启发(metaheuristics),为设计适合特定类型问题的启发式程序提供了一般结构和策略指导。元启发(参见第13章)的使用在不断地增长。

到目前为止的讨论似乎表明运筹学寻求找出唯一解,它可能是最优的也可能不是。事实上,通常并非如此。原有模型的最优解可能与现实问题的理想解相距甚远,所以必须进行附加分析。因此,优化后分析(postoptimality analysis)(找出最优解之后的分析)对于大部分运筹学研究是非常重要的组成部分。这部分分析有时也被称为 what-if 分析,因为它包含解决一些有关在将来情况的不同假设下最优解将发生什么变化的问题。这些问题通常由制订最终决策的管理者而不是运筹团队提出。

电子表格软件的出现使得电子表格在优化后分析中经常起到核心作用。电子表格的一个最大优势在于它能够很容易地被任何人(包括管理者)使用,可以方便地查看当模型发生变化时最优解将会发生什么变化。针对模型变化的实验过程也有利于帮助理解模型的行为以及增加对模型有效性的信心。

优化后分析包括进行敏感性分析(sensitivity analysis),确定在求解时哪些模型参数是最重要的(敏感性参数)。敏感性参数一般定义为:

对于所有参数具有给定值的数学模型,模型的敏感性参数(sensitive parameters)是指那些参数值的变化引起最优解变化的参数。(确定敏感性参数是重要的,确定这些参数的赋值时需要特别注意避免破坏模型的输出。)

参数值只是对一些数量的估计(例如,单位收益),精确值只有在模型被实施之后才能确定。因此,在敏感性参数被确定之后,应该特别注意更为接近地估计每个值或者至少是可能值的范围。所以要寻求那些对敏感性参数可能值的各种组合都充分好的解。

如果模型解不断得到实施,那么随后敏感性参数值的任何变化意味着需要立即改变模型解。

在一些情况下,模型的特定参数代表了策略决策(例如,资源分配)。如果是这样的话,那么对这些参数的赋值通常需要一些灵活性。可能通过降低另一些参数来增加其中的一些参数。优化后分析包括研究这些折中关系。

与2.4小节(检验模型)讨论的研究阶段一样,优化后分析也包括获得一系列的解,组成了对理想行动过程不断改进的估计。因此,初始解的明显缺点能够被用于改进模型、它的输入数据以及求解过程。然后获得新的解,这个循环不断重复。这个过程一直持续到对后续解的改进已经小得不能保证延续性。即使是这样,大量的候选解(可能是对模型的

几个合理版本之一以及它的输入数据最优的解)被提供给管理层做出最终选择。正如 2.1 小节所提到的,候选解经常被提出,无论什么时候在这些候选解中的最终选择都应该留给管理层去判断。

例 重新考虑 2.2 小节最后部分 Rijkswaterstaat 有关荷兰水资源管理策略的运筹学研究。这项研究并没有在推荐单一的解决方案之后结束。相反,大量有吸引力的方案被确认、分析和比较。最终的选择权留给了荷兰的行政过程,由议会表决通过。敏感性分析在这项研究中起到了关键作用。例如,模型的特定参数代表环境标准。敏感性分析包括评估如果这些参数值从当前的环境标准变化到其他合理的值时对水资源管理问题的影响。敏感性分析也被用于评估模型假设变化的影响,例如,有关未来国际条约对进入荷兰的污染数量影响的假设。带有合适概率值的大量场景(例如,极度干旱的年份以及具有丰富降水的年份)也被分析到了。



2.4 检验模型

建立大量的数学模型在某种程度上类似于开发大量的计算机程序。当计算机程序的第一个版本被完成时,不可避免地会存在很多错误。程序必须被完全检验并尽可能地找出和纠正这些错误。最终,经过对程序的连续改进之后,编程者(或者编程小组)认为现在的程序一般能够给出合理的和有效的结果。虽然一些小的错误毫无疑问地仍然会隐藏在程序中(很多从未被检测到),但是主要的错误已经被充分地排除,程序已经能够被可靠地使用。

类似的,大规模数学模型的第一个版本不可避免地包含很多缺陷。一些相关因素或者相互关系毫无疑问地还没有被结合入模型中,一些参数还没有被正确地估计。联想到交流和理解复杂运筹学问题所有方面和细节的困难以及收集可靠数据的困难,这是不可避免的。因此,在使用模型之前,模型必须被完全地检验以尽量找出和纠正尽可能多的缺陷。最终,在对模型进行了一连串的改进之后,运筹学研究团队得出结论:当前的模型能够给出合理有效的结果。虽然一些小的缺陷毫无疑问地仍然隐藏在模型里面(很多从未被发现),但主要的缺陷已经被解决,模型已经能够被可靠地使用。

为了增加模型有效性而进行的检验和改进模型的过程通常被称为**模型审核**(model validation)。

很难描述模型审核是怎样进行的,因为这个过程依赖于被考虑的问题以及所使用的模型。我们将给出一些一般性建议,然后再给出一些例子(参考文献 3 中有详细的讨论)。

由于运筹学研究团队可能花费数月的时间建立模型的所有细节部分,很容易“只见树木,不见森林”。因此,在模型初始版本的细节(“树木”)被完成之后,开始模型审核的好方式是以全新的角度看待整个模型(“森林”)以检验明显的错误或者疏忽。团队在进行这项工作时最好至少有一个人没有参与过模型的构建。重新检验模型的定义

并且与模型相比较可以帮助查找错误。确保所有数学表达式在使用的单位内维度一致也是有用的。其他对模型有效性的验证有时能够通过改变参数值或者(以及)决策变量检验模型的输出是否合理来获得,尤其是观察参数或者变量达到它们最小或者最大极限值时的情况。

检验模型更为系统的方法是使用回溯检验(retrospective testing)。当该检验适用时,使用历史数据重现过去,然后确定应用该模型和导出的解同实际的吻合程度,比较假定执行该模型时的有效性,如应用该模型使现实情况得到的改善等。它也表明了模型的哪个部分存在缺点需要改进。另外,通过使用模型的候选解以及估计它们假定的历史效果,能够收集相当多的证据,这些证据反映了模型预测候选行动相对结果的有效性。

另外,回溯检验的缺点在于它使用了用于建模的数据。重要问题在于它的过去能否真实地代表将来。如果不能,那么模型在未来的执行情况 and 过去相比可能非常不同。

为了克服回溯检验的这个缺点,有时暂时维持现状是有用的。这提供了当模型建立时还不存在的新数据。这些数据以在这里说明的相同方式被用于评价模型。

文档化模型审核的过程是重要的。它帮助提高随后用户对模型的信任。另外,如果将来出现有关模型的问题,那么这些文档对于诊断问题所在是有用的。

例 考虑一项由 IBM 进行的运筹学研究。用于集成备用组件存货的国际网络,提高对 IBM 客户的服务支持。这项研究产生了新的库存系统,提高了服务质量,将 IBM 的库存占用降低为 25 000 多万美元,并且通过提高运作效率每年还节约了 2 000 多万美元。这项研究的模型审核阶段特别有趣的地方在于库存系统的未来用户被结合到检验过程中。由于这些未来用户(职能领域的 IBM 管理者负责对库存系统的实施)对所建立的系统持怀疑态度,所以由用户代表组成的用户小组作为运筹学研究团队的顾问。在新系统的最初版本被建立之后(基于多层次库存模型),进行了系统的实施前检验。来自用户小组的反馈带来了系统的重大改进(这项研究的详细描述见参考文献 A5)。



2.5 准备应用模型

在检验阶段已经完成并且可接受模型已经建立之后会发生什么呢?如果模型被重复使用,那么接下来将按管理层的要求装入应用模型的系统。这个系统包括模型、求解程序(包括优化后分析)以及用于实施的操作程序。即使人员发生变化,系统仍会定期提供特定的数值解。

系统通常是基于计算机的。事实上,大量的计算机程序需要被使用和集成。数据库和管理信息系统可以为模型提供每次所使用的最新输入,因此需要接口程序。当求解程序(另一个程序)被应用到模型之后,其他计算机程序可以自动触发结果的实施。在其他情况下,交互式计算机系统,又称决策支持系统(decision support system),被用于辅助管理者使用数据和模型,支持(而不是代替)他们的决策。另一个程序可以产生管理报告(采用管理语言)解释模型输出及其应用含义。

在重要的运筹学研究中,需要几个月(甚至更长)的时间建立、检验和装入这个计算机

系统。其中包括建立和实施在它未来使用中维护系统的过程。当条件随着时间发生变化时,这个过程应该相应地调整计算机系统(包括模型)。

例 2.2 小节的应用案例中介绍了大陆航空公司进行的运筹学研究。该项研究建立了大型的数学模型,用于在调度失败时对航班机组人员的再分配。由于模型需要在失败发生时被及时应用,所以建立了被称为 CrewSolver 的决策支持系统,用于整合模型与表示当前运作情况的大量内部存储数据。CrewSolver 由一个机组人员协调者输入有关调度失败的数据,然后使用图形用户界面寻求航班人员再分配的解决方案。



2.6 实施

在应用模型的系统被建立之后,运筹学研究的最后阶段是按管理层的指示实施模型系统。这个阶段是重要的,因为只有这样研究才能够有所收获。因此,运筹学研究团队应参与发起这个阶段,并确保模型的解能够被准确地转换成操作程序并且修正任何被发现的缺陷。

实施阶段的成功依赖于大量来自高级管理层以及运作管理层的支持。如果在整个研究阶段,运筹学研究团队能够与管理层保持很好的联系并鼓励管理层的主动引导,那么它们可能获得更多的支持。好的交流能够确保研究满足管理层的需求,也能够给管理层带来对这项研究的主人翁感,鼓励他们对实施的支持。

实施阶段包括很多步骤。首先,运筹学研究团队为运作管理层提供新系统的详细解释以及它怎样与实际运作相联系。接下来,双方分担系统实施过程中的责任。运作管理层中的相关人员将得到具体培训,新的行动过程才得以启动。如果成功,新系统将在以后多年中使用。秉承这一目标,运筹学研究团队通过这个行动过程获得初始经验并且确定在未来应该进行的任何改动。

在新系统被使用的整个周期内,必须持续获得系统的运作情况以及模型假设是否继续被满足的反馈信息。当发生对原有假设的重要偏离时,模型应该被重新检验以确定是否需要对其进行一些改动。前面(2.3 小节)进行的优化后分析可用于引导这个复查过程。

研究的最后,运筹学研究团队应清楚而准确地记录所使用的方法,从而确保这项工作能够被重复。可重复性应该是运筹学研究者专业道德标准的一部分。当研究有争议的公共政策问题时这个条件尤为重要。

例 这个例子说明了在执行新过程之前成功的实施阶段可能需要包含上千名雇员。三星电子公司在 1996 年 3 月开始了一项主要的运筹学研究,建立新方法和调度应用以使整个半导体制造过程更加简化且有效率,并且降低半成品的库存。这项研究持续了 5 年,在 2001 年 6 月完成,主要是由于实施阶段所需要的广泛努力。运筹学研究团队需要得到大量管理者、制造人员以及工程师的支持,培训他们有关新制造过程的原理和逻辑。最终,超过 3 000 人参与了培训过程。新过程分阶段逐渐建立了信任。然而,这个艰难的实施过程花费了大量的资金。新过程将企业从半导体产业最没有效率的制造者转变成了最具效率的制造者。在运筹学研究实施完成的时候,该项研究的收入将超过 10 亿美元(参考文献 A11 详细描述了这项研究)。



2.7 结论

虽然本书的大部分篇幅主要集中在构建和求解数学模型上,但是本章我们已经尽量强调这只是典型运筹学研究整个过程的一个组成部分。这里所描述的其他阶段对于研究的成败也是非常重要的。学习后续章节时尽量记住模型和求解过程在整个过程中的作用。在获得对数学模型更加深入的了解之后,我建议你们复习本章的内容,进一步加强这个观点。

运筹学与计算机的使用紧密相连。以前一般使用的是大型计算机,但是现在个人计算机和工作站正在被广泛地用于求解运筹学模型。

在结束对运筹学主要阶段的讨论之前,应该强调对本章中所提到的“规则”有很多的例外情况。由于它的这一性质,运筹学需要独创性和革新。因此,不可能写下运筹学研究团队应该总是遵从的任何标准过程。更确切地说,当前的描述能够被看成是一个模型,粗略地表示了成功的运筹学研究应该是怎样开展的。

参考文献

1. Board, J., C. Sutcliffe, and W. T. Ziemba: "Applying Operations Research Techniques to Financial Markets," *Interfaces*, **33**(2): 12–24, March–April 2003.
2. Bradley, P. S., U. M. Fayyad, and O. L. Mangasarian: "Mathematical Programming for Data Mining: Formulations and Challenges," *INFORMS Journal on Computing*, **11**(3): 217–238, Summer 1999.
3. Gass, S. I.: "Decision-Aiding Models: Validation, Assessment, and Related Issues for Policy Analysis," *Operations Research*, **31**: 603–631, 1983.
4. Gass, S. I.: "Model World: Danger, Beware the User as Modeler," *Interfaces*, **20**(3): 60–64, May–June 1990.
5. Hall, R. W.: "What's So Scientific about MS/OR?" *Interfaces*, **15**(2): 40–45, March–April 1985.
6. Howard, R. A.: "The Ethical OR/MS Professional," *Interfaces*, **31**(6): 69–82, Nov.–Dec. 2001.
7. Miser, H. J.: "The Easy Chair: Observation and Experimentation," *Interfaces*, **19**(5): 23–30, Sept.–Oct. 1989.
8. Morris, W. T.: "On the Art of Modeling," *Management Science*, **13**: B707–717, 1967.
9. Murphy, F. H.: "The Occasional Observer: Some Simple Precepts for Project Success," *Interfaces*, **28**(5): 25–28, Sept.–Oct. 1998.
10. Murphy, F. H.: "ASP, The Art and Science of Practice: Elements of the Practice of Operations Research: A Framework," *Interfaces*, **35**(2): 154–163, March–April 2005.
11. Pidd, M.: "Just Modeling Through: A Rough Guide to Modeling," *Interfaces*, **29**(2): 118–132, March–April 1999.
12. Williams, H. P.: *Model Building in Mathematical Programming*, 4th ed., Wiley, New York, 1999.
13. Wright, P. D., M. J. Liberatore, and R. L. Nydick: "A Survey of Operations Research Models and Applications in Homeland Security," *Interfaces*, **36**(6): 514–529, November–December 2006.

运筹学构模方法的一些获奖应用

(下面的所有论文可由我们的网站提供,见 www.mhhe.com/hillier.)

- A1. Alden, J. M., L. D. Burns, T. Costy, R. D. Hutton, C. A. Jackson, D. S. Kim, K. A. Kohls, J. H. Owen, M. A. Turnquist, and D. J. V. Veen: "General Motors Increases Its Production Throughput," *Interfaces*, **36**(1): 6–25, January–February 2006.
- A2. Altschuler, S., D. Batavia, J. Bennett, R. Labe, B. Liao, R. Nigam, and J. Oh: "Pricing Analysis for Merrill Lynch Integrated Choice," *Interfaces*, **32**(1): 5–19, January–February 2002.
- A3. Bixby, A., B. Downs, and M. Self: "A Scheduling and Capable-to-Promise Application for Swift & Company," *Interfaces*, **36**(1): 69–86, January–February 2006.

- A4. Braklow, J. W., W. W. Graham, S. M. Hassler, K. E. Peck, and W. B. Powell: "Interactive Optimization Improves Service and Performance for Yellow Freight System," *Interfaces*, **22**(1): 147–172, January–February 1992.
- A5. Cohen, M., P. V. Kamesam, P. Kleindorfer, H. Lee, and A. Tekerian: "Optimizer: IBM's Multi-Echelon Inventory System for Managing Service Logistics," *Interfaces*, **20**(1): 65–82, January–February 1990.
- A6. DeWitt, C. W., L. S. Lasdon, A. D. Waren, D. A. Brenner, and S. A. Melhem: "OMEGA: An Improved Gasoline Blending System for Texaco," *Interfaces*, **19**(1): 85–101, January–February 1990.
- A7. Goeller, B. F., and the PAWN team: "Planning the Netherlands' Water Resources," *Interfaces*, **15**(1): 3–33, January–February 1985.
- A8. Hicks, R., R. Madrid, C. Milligan, R. Pruneau, M. Kanaley, Y. Dumas, B. Lacroix, J. Desrosiers, and F. Soumis: "Bombardier Flexjet Significantly Improves Its Fractional Aircraft Ownership Operations," *Interfaces*, **35**(1): 49–60, January–February 2005.
- A9. Kaplan, E. H., and E. O'Keefe: "Let the Needles Do the Talking! Evaluating the New Haven Needle Exchange," *Interfaces*, **23**(1): 7–26, January–February 1993.
- A10. Kok, T. de, F. Janssen, J. van Doremalen, E. van Wachem, M. Clerkx, and W. Peeters: "Philips Electronics Synchronizes Its Supply Chain to End the Bullwhip Effect," *Interfaces*, **35**(1): 37–48, January–February 2005.
- A11. Leachman, R. C., J. Kang, and V. Lin: "SLIM: Short Cycle Time and Low Inventory in Manufacturing at Samsung Electronics," *Interfaces*, **32**(1): 61–77, January–February 2002.
- A12. Taylor, P. E., and S. J. Huxley: "A Break from Tradition for the San Francisco Police: Patrol Officer Scheduling Using an Optimization-Based Decision Support System," *Interfaces*, **19**(1): 4–24, January–February 1989.

习题

- 2.1-1 2.1节的例子总结了美林公司应用运筹学的获奖研究,阅读详细描述该项研究的参考文献A2。
- 总结导致开展这项研究的背景。
 - 用一句话概括运筹学小组(或管理科学小组)进行这类研究的一般使命。
 - 指出管理科学小组从每个客户获取的数据类型。
 - 指出作为该项研究结果的提供给公司客户的新的价格方案。
 - 研究结果对美林公司的竞争地位带来什么影响?
- 2.1-2 阅读通用汽车公司获奖运筹学研究的参考文献A1。
- 总结导致开展这项研究的背景。
 - 这项研究的目标是什么?
 - 描述软件的应用如何自动匹配所需数据的收集。
 - 通过这项研究改进生产带来了多少文件记录的减少和效益的增加?
- 2.1-3 研读参考文献A12描述的旧金山警察部门所做的运筹学研究。
- 总结导致开展这项研究的背景。
 - 通过确定调度系统的六个方向定义要解决的问题部分。
 - 描述怎样收集所需的数据。
 - 列出这项研究所产生的各种有形的和无形的收益。
- 2.1-4 研读参考文献A9描述的康涅狄格州的纽黑文公共健康部门所做的运筹学研究。
- 总结导致开展这项研究的背景。

- (b) 略述为了收集所需数据开发的追踪和检验每个针头以及注射器的系统。
- (c) 总结来自这个追踪和检验系统的初始结果。
- (d) 描述这项研究对公共政策的现实影响以及潜在影响。

2.2-1 阅读 2.2 节应用案例中所列资料来源对该项运筹学研究的描述,列出由该项研究带来的财务和非财务效益。

2.2-2 阅读参考文献 A3,它描述了对 Swift 公司所进行的运筹学研究。

- (a) 总结导致开展该项研究的背景。
- (b) 描述该项研究中所构建的三类一般模型的每一类的目的。
- (c) 作为研究结果该公司目前应用多少种专用模型。
- (d) 列出由该项研究带来的各项财务与非财务效益。

2.2-3 研读参考文献 A7,涉及荷兰 Rijkswaterstaat 所做的运筹学研究(特别注意第 3~20 页以及 30~32 页)。

- (a) 总结导致开展这项研究的背景。
- (b) 总结第 10~18 页描述的五个数学模型的目的。
- (c) 总结这篇文章中第 6~7 页描述的用于比较策略的“影响的度量”(效果的度量)。
- (d) 列出这项研究中产生的各种有形的和无形的收益。

2.2-4 研读参考文献 5。

- (a) 鉴别作者的自然科学中模型与运筹学中模型的例子。
- (b) 描述作者有关自然科学研究中使用模型的基本规则也能被用于引导运筹学研究的观点。

2.3-1 研读描述飞利浦电子公司所做运筹学研究的参考文献 A10。

- (a) 总结实施该研究的背景。
- (b) 该研究的宗旨是什么?
- (c) 开发软件以加快求解问题有什么好处?
- (d) 列出该研究所得出的合作规划过程的 4 个步骤。
- (e) 列出由该研究所带来的各项财务与非财务效益。

2.3-2 研读参考文献 5。

- (a) 描述作者有关是否使用模型的单一目标是找出它的最优解的观点。
- (b) 总结作者有关建模、从模型中评价信息以及当决策行动时应用决策者的判断的补充作用的观点。

2.4-1 参考 2.2 节脚注内提到的文章的第 18~20 页,涉及荷兰 Rijkswaterstaat 所做的运筹学研究。描述这项研究中模型验证所获得的重要经验。

2.4-2 研读参考文献 7。总结作者有关观察和实验在模型验证过程中的作用。

2.4-3 研读参考文献 3 的第 603~617 页。

- (a) 作者有关模型是否能够被完全验证的观点是什么?
- (b) 总结模型验证、数据验证、逻辑/数学验证、预测验证、运作验证以及动态验证之间的区别。

- (c) 描述敏感性分析在检验模型运作验证中的作用。
- (d) 作者有关是否存在适合所有模型的验证方法的观点是什么?
- (e) 引用文章列出基本验证步骤。

2.5-1 研读参考文献 A6,它描述了 Texaco 所做的运筹学研究。

- (a) 总结导致开展这项研究的背景。
- (b) 简要描述作为这项研究成果的决策支持系统 OMEGA 的用户界面。
- (c) OMEGA 不断被修改和扩展以反映运作环境的变化。简要描述各种类型的变化。
- (d) 总结 OMEGA 是怎样被使用的。
- (e) 列出这项研究产生的各种有形的和无形的收益。

2.5-2 参阅参考文献 A4,它描述了 Yellow Freight System 公司所做的运筹学研究。

- (a) 参考这篇文章的第 147~149 页,总结导致开展这项研究的背景。
- (b) 参考第 150 页,简要描述作为这项研究成果的计算机系统 SYSNET,并且总结 SYSNET 的应用。
- (c) 参考第 162~163 页,说明为什么 SYSNET 的交互方面被证实是重要的。
- (d) 参考第 163 页,总结 SYSNET 的输出。
- (e) 参考第 168~172 页,总结使用 SYSNET 产生的各种收益。

2.6-1 查阅参考文献 A4 的第 163~167 页,涉及 Yellow Freight System 公司所做的运筹学研究以及计算机系统 SYSNET。

- (a) 简要描述运筹学研究团队在实施 SYSNET 时怎样获得高层管理者的支持。
- (b) 简要描述所建立的实施策略。
- (c) 简要描述领域实施。
- (d) 简要描述在实施 SYSNET 时管理激励以及强制怎样被使用。

2.6-2 研读参考文献 A5,涉及 IBM 所作的运筹学研究以及计算机系统的优化。

- (a) 总结导致开展这项研究的背景。
- (b) 列出当运筹学研究团队成员开始建立模型和求解算法时面临的复杂因素。
- (c) 简要描述优化者的初步实施检验。
- (d) 简要描述领域实施检验。
- (e) 简要描述国家实施。
- (f) 列出这项研究产生的各种有形的和无形的收益。

2.7-1 从本章末给出的参考文献的后一部分,选择运筹学获奖应用中的一个(不包括在其他习题中已指定的)。先阅读这篇文章,然后用两页篇幅概述其应用和带来的效益(包括非财务效益)。

2.7-2 从本章末给出的参考文献的后一部分,选择三篇获奖的运筹学模型的应用(包括在其他习题中已指定的)。先阅读其中每一篇,然后各用一页篇幅概述其应用和带来的效益(包括非财务效益)。

2.7-3 研读参考文献 4。作者描述了开发和应用基于计算机模型的任何运筹学研究的 13 个详细阶段,而本章中描述了六个更广泛的阶段。对每个更为广泛的阶段,列出部分或者全部包含在这更广泛阶段内的详细阶段。

线性规划导论

线性规划理论的发展被认为是 20 世纪中叶最重要的科学进步之一,我们也赞同这样的评价。从 1950 年起,线性规划就产生了非常大的影响。今天,它成为一个标准工具,已经为世界上许多工业化国家中具有相当规模的公司或商业企业节省了数千或数百万美元,它也越来越多地在社会其他领域发挥作用。在计算机上进行的科学计算的很大一部分都是线性规划的应用。迄今为止,已经出版了许多关于线性规划的教科书,发表了数以百计的描述线性规划重要应用的文章。

这个了不起的工具的本质是什么?它能够解决什么类型的问题?当你学习了一系列例子之后,你将了解这方面的知识。然而,一个简单概括有助于对线性规划的了解。简单地说,线性规划中最普遍应用的问题类型是在竞争性活动中以最佳的可能方式(如最优化)分配有限资源的问题。更精确地说,该问题涉及选择相关活动的级别,这些活动需要争夺必需的稀缺资源以得到运作的执行。活动级别的选择就是规定每一种活动所消耗的每一种资源的数量。这一描述所适用的具体情况是多种多样的。实际上,范围包括从生产设施的分配到国家资源和家庭必需品的分配,从部长职位的选举到海运模式的选择,从农业生产计划到放射性治疗等。然而在每一种情况下,通过选择特定活动的级别,从而确定活动的资源分配这一步骤是必须的。

线性规划使用数学模型描述相关问题。形容词“线性的”意味着模型中所有的数学函数都是线性函数。“规划”一词,在此不是指计算机程序,它实质上是“计划”的同义词。因此,线性规划涉及获得最优结果的活动计划,如达到一个在所有的可行方案中最好(根据数学模型)的特定目标。

尽管给活动分配资源是最普遍的应用,线性规划也有许许多多其他重要的应用。事实上,数学模型符合线性规划一般形式的任何问题都是线性规划问题(因此,线性规划问题和它们的模型两者是可交换的,简称为线性规划,或直接写为 LP)。此外,被称为单纯形法(simplex method)的一个非常有效的求解方法,可用来求解大规模的线性规划问题,这也是近年来线性规划产生巨大影响的原因。

由于线性规划的重要性,本章和后面的 6 章将专门论述线性规划。在本章介绍线性规划的一般特征之后,第 4 章与第 5 章集中论述单纯形法,第 6 章在单纯形法已经初步应用后,再对线性规划问题做进一步分析。第 7 章给出了单纯形法更广泛的应用范围,介绍了能够处理比单纯形法更大规模的线性规划问题的内点算法。第 8 章和第 9 章考虑了几种特殊的线性规划问题,其重要性值得单独研究。

除此以外,你还能在此后的某些章节看到线性规划在运筹学其他领域的应用。

除此以外,本章以一个小的线性规划的典型例子开始。这个问题小到可以直接用图形化方法解决。3.2 节和 3.3 节提出了一般线性规划模型与它的基本假设。3.4 节给出了一些线性规划应用的补充例子,3.5 节描述了怎样方便地在数据表上列出和求解适度规模的线性规划模型。由于实践中某些线性规划模型规模很大,3.6 节描述了一个大型模型的由来,以及如何借助专门的构模语言如 MPL(见该节描述)或 LINGO(见本书网站第 3 章的补充 2)来完成建模。



3.1 原形范例

Wyndor Glass 公司生产高质量的玻璃产品,包括窗和玻璃门。该公司拥有 3 个工厂。铝框架和硬件在工厂 1 制造,木质框架在工厂 2 生产,玻璃生产和产品组装在工厂 3 完成。

由于收入下滑,高层管理者决定调整公司的生产线。不赢利的产品将被停止生产,而将生产能力转移到有较大销售潜力的两种新产品。

产品 1: 具有铝框架的 8 英尺玻璃门

产品 2: 具有双悬木质框架的 4×6 英尺窗

产品 1 需要工厂 1 和工厂 3 的生产能力,而不需要工厂 2 的生产能力。产品 2 需要工厂 2 和工厂 3 的生产能力。进行市场细分研究后得出结论:公司能够销售工厂所能生产的全部产品。然而,由于两种产品都为使用工厂 3 的生产能力而竞争,不清楚如何确定两种产品的组合可以实现利润最大化,因此组织了一个运筹小组来研究这个问题。

运筹小组首先与高层管理者讨论,以明确该研究的管理目标。经过讨论之后明确了下面的问题。

决定两种产品生产率的依据应该是总利润最大化。限制条件是三个工厂有限的生产能力(每种产品将以 20 个为一批进行生产,因此生产率定义为每周生产该产品的批数)。满足这些限定条件的任何生产率的组合都是可行的,包括一种产品产量为零,其他产品尽量多的生产情况。

运筹小组还明确了需要收集的数据:

(1) 每周每个工厂能为生产这些新产品提供的生产时间的小时数(这些工厂的大部分时间都用来生产现有的产品,用来生产新产品的时间是十分有限的)。

(2) 每个工厂生产一个批次新产品所消耗的小时数。

(3) 每生产一批新产品的赢利(小组得出结论:每额外增加一批新产品的赢利与生产该产品的总批数大体上是无关的,因此可以用生产每批该产品的赢利来进行适当的度量,同时由于开始该新产品的生产和市场营销不产生实质的初始成本,所以来自每一种产品的总利润大概是每一批产品的利润乘以生产的批数)。

应用案例

Swift 公司是总部位于科罗拉多州格里利市的一家多种经营的蛋白质生产商。牛肉及其相关产品的年销售额超过 80 亿美元,是该公司迄今为止最大的业务部门。

为了提高公司的销售额及产量,高级管理层认为有必要实现三个主要的目标。第一个目标是保证公司的顾客服务代表能够与他们超过 8 000 位的顾客讨论有关现在和未来库存的正确信息,同时考虑交付日期及交付时产品的生产时间。第二个目标是为每个工厂制订一个 28 天内有效员工轮岗时刻表。第三个目标是在给定牛的存栏数及工厂处理能力的限制时,正确地决定一个工厂是否能够根据要求的日期和时间运送规定数量的订货。

为了应对这三个挑战,运筹小组基于三种模型构建方式开发了一个由 45 个线性模型组成的集成系统,该系统能够在接到订单的同时在 5 个工厂制订动态的牛肉加工计划。在运行该系统的第一年中,实现的总账面收益为 1 274 万美元,其中的 1 200 万收益是由于优化生产计划获得的。其他的收益包括减少订单损失、降低价格折扣和更高的按时递送率。

资料来源: A. Bixby, B. Downs, and M. Self; "A Scheduling and Capable-to-Promise Application for Swift & Company," *Interfaces*, 36(1): 39-50, Jan. -Feb. 2006. (以下网址提供本文的链接: www.mhhe.com/hillier.)

为了证明获得这些数据的合理性,需要得到公司各个部门关键人员的帮助。制造车间的职员提供了上面的第一类数据。第二类数据需要由制造工程师分析新产品的设计过程。通过分析来自工程师和营销部门的成本数据,以及来自营销部门的价格决策,会计部门可以对第三类数据进行评估。

表 3.1 概括了收集的数据。

工 厂	每批的生产时间/小时		每周可用的生产时间/小时
	产品 1	产品 2	
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
每批的利润/美元	3 000	5 000	

运筹小组立即认识到这是一个典型的生产组合(product mix)型的线性规划问题,小

组接下来建立了相应的数学模型公式。

线性规划模型构建

这个问题的线性规划数学模型构建如下,令

x_1 = 每周生产的产品 1 的批数

x_2 = 每周生产的产品 2 的批数

Z = 每周生产的两种产品的总利润(千美元)

因此, x_1 和 x_2 是模型中的决策变量,使用表 3.1 最底下的一行,得到

$$Z = 3x_1 + 5x_2$$

目标是选择 x_1 和 x_2 的值以使 $Z=3x_1+5x_2$ 的值最大,它们的值受到三个工厂可用的有限的生产能力的限制。表 3.1 表明生产产品 1 的数量为 1 批/周时,消耗工厂 1 的生产能力为 1 小时/周;然而工厂 1 每周仅有 4 小时的生产能力。这个限制条件用数学不等式表示为 $x_1 \leq 4$ 。与此相似,工厂 2 的限制条件是 $2x_2 \leq 12$ 。通过选择新产品 x_1 和 x_2 的生产率,在工厂 3 每周所使用的生产时间的时数,确定为 $3x_1+2x_2$ 。因此,工厂 3 的限制条件的数学描述是 $3x_1+2x_2 \leq 18$ 。最后,由于生产率不能为负,必须限定决策变量为非负,即 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ 。

用数学语言概括该问题的线性规划模型,即选择 x_1 和 x_2 的值,使

$$\max Z = 3x_1 + 5x_2$$

s. t.

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$\text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

(注意线性规划模型中 x_1 和 x_2 的系数的确定是如何表达表 3.1 中概括的信息的。)

图解法

这个小型问题有两个变量,仅仅是二维的,因此能够使用图解法来求解。这个过程需要使用 x_1 和 x_2 作为坐标轴构建一个二维图形。第一步通过划定限制条件允许的取值范围的边界线,从而确定限制条件允许的 (x_1, x_2) 的取值。首先,明确非负的限制条件 $x_1 \geq 0$ 与 $x_2 \geq 0$,要求 (x_1, x_2) 取值位于坐标轴的正面(恰好包括坐标轴在内),即在第一象限。接下来,考虑到限制条件 $x_1 \leq 4$,意味着 x_1 的取值不能位于直线 $x_1 = 4$ 的右边,结果见图 3.1,图中阴影部分包含可行的 (x_1, x_2) 的取值。

使用同样的方法,限制条件 $2x_2 \leq 12$ (或相当于 $x_2 \leq 6$),意味着直线 $2x_2 = 12$ 应该被增加为可行域的边界。最后的限制条件 $3x_1 + 2x_2 \leq 18$,要求 (x_1, x_2) 受满足条件 $3x_1 + 2x_2 = 18$ (另一条直线)所有点的边界约束(注:满足限制条件 $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ 的所有点在直线 $3x_1 + 2x_2 = 18$ 上或者在它的下方,因此约束线以上的点不能满足不等式)。 (x_1, x_2) 的所有允许取值区域被称为可行域(feasible region),如图 3.2 所示。

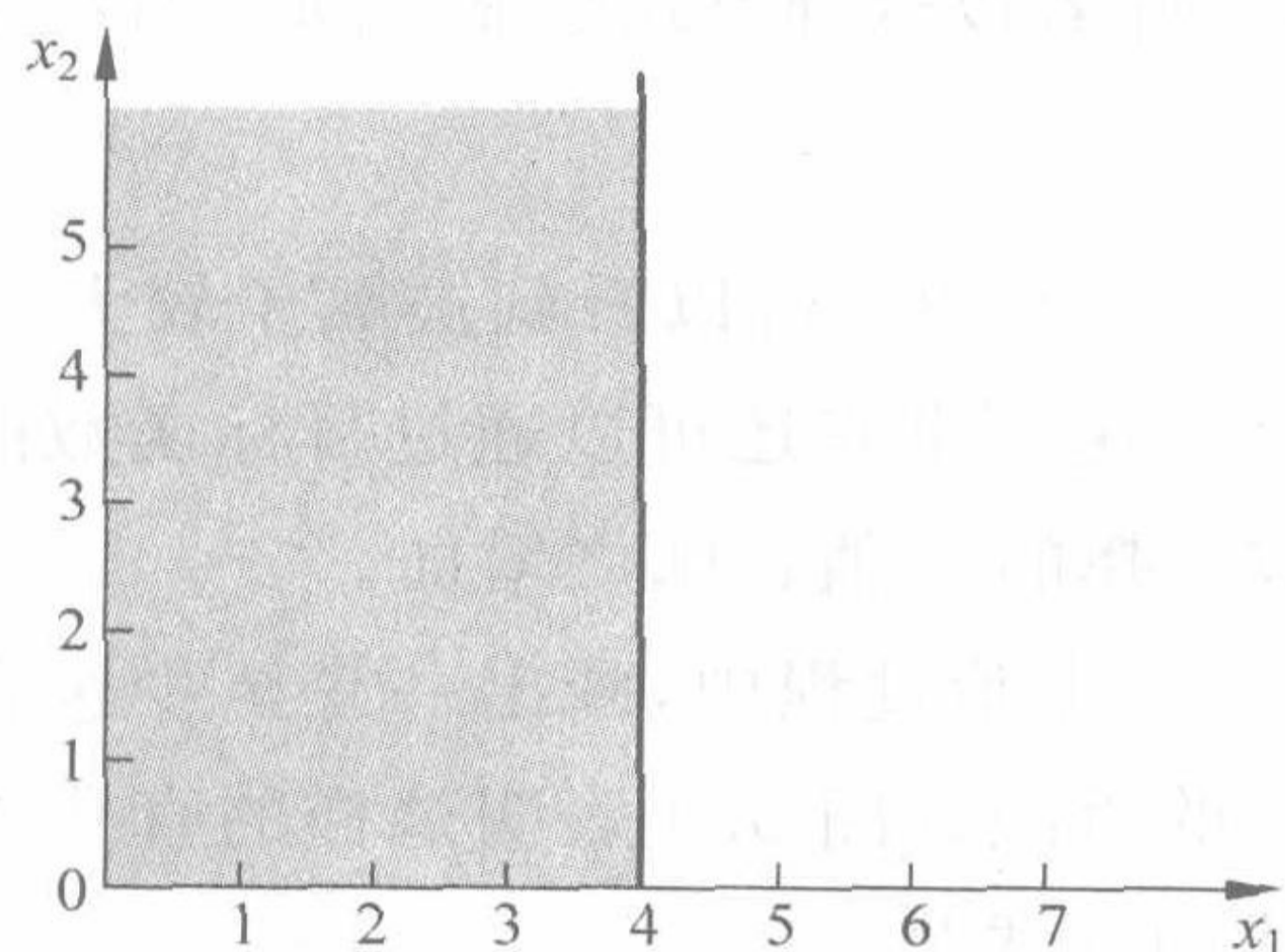


图 3.1 阴影部分的面积显示了 (x_1, x_2) 的值, $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 \leq 4$

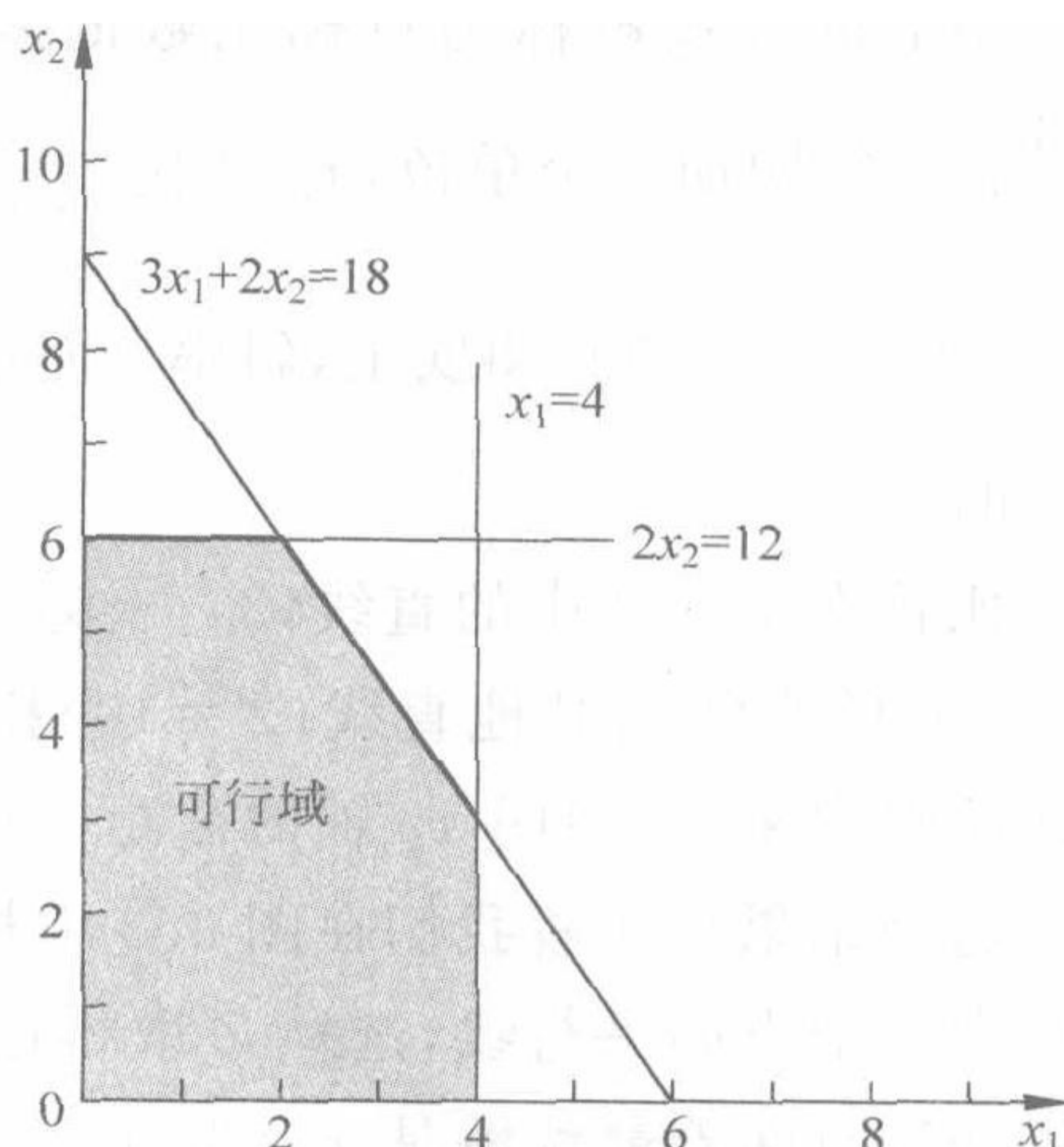


图 3.2 阴影部分的面积显示了 (x_1, x_2) 的允许值, 称为可行域

最后的步骤是在可行域中选择使目标函数 $Z = 3x_1 + 5x_2$ 取最大值的点。为了有效地完成这一步骤, 可通过反复实验, 例如实验 $Z = 10 = 3x_1 + 5x_2$, 看在可行域内是否存在任意的 (x_1, x_2) 使 Z 的取值达到 10。通过画出直线 $3x_1 + 5x_2 = 10$ (见图 3.3), 可以看到在可行域内有許多点满足这一条件。通过选择任意的直线 $Z = 10$, 获得了一些信息, 接下来应该选择更大的任意的 Z 值, 比如说 $Z = 20 = 3x_1 + 5x_2$ 。图 3.3 表明直线 $3x_1 + 5x_2 = 20$ 的一部分也在可行域内, 因此 Z 的最大可行值至少是 20。

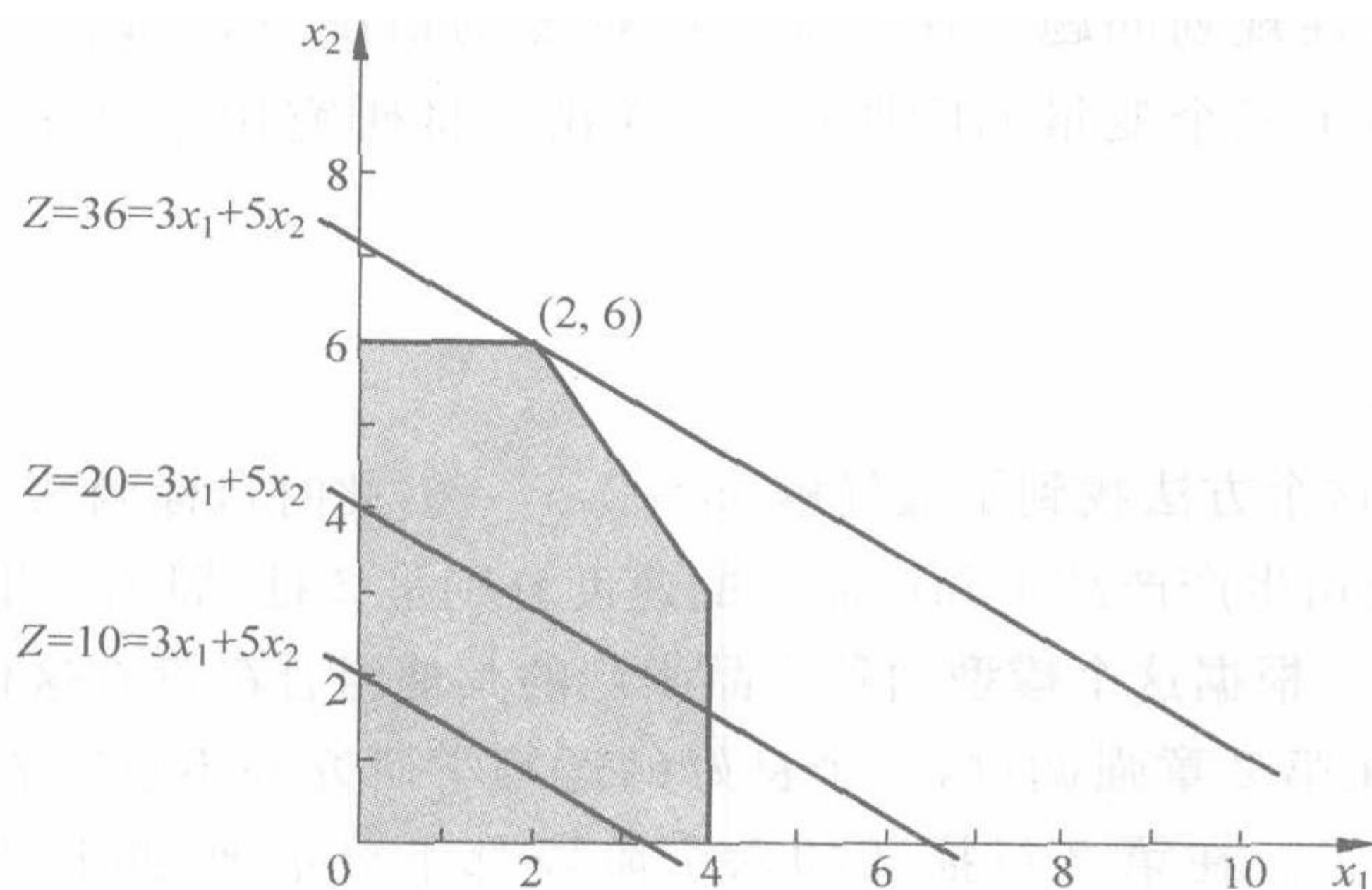


图 3.3 (x_1, x_2) 使函数 $3x_1 + 5x_2$ 达到最大值的值是 $(2, 6)$

现在, 注意在图 3.3 中建立的两条倾斜直线恰好是平行的。这不是巧合, 任何以这种方式构建的直线, 对于选定的 Z 值都有 $Z = 3x_1 + 5x_2$, 这意味着 $5x_2 = -3x_1 + Z$, 或者同样意味着

$$x_2 = -\frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{5}Z$$

最后的等式被称为目标函数的斜截式 (slope-intercept form), 表明直线的斜率是 $-\frac{3}{5}$ (x_1 每增加一个单位, x_2 变化 $-\frac{3}{5}$ 个单位), 同时直线在 x_2 轴上的截距是 $\frac{1}{5}Z$ (因为当 $x_1=0$ 时, $x_2=\frac{1}{5}Z$), 事实上, 斜率是固定的 $-\frac{3}{5}$, 这意味着以这种方式绘制的所有直线都是平行的。

比较在图 3.3 中的直线, $3x_1+5x_2=10$ 与 $3x_1+5x_2=20$, 可以看到被赋予较大 Z 值 ($Z=20$) 的直线与其他直线 ($Z=10$) 相比远离原点。这一事实还可以通过目标函数的斜截式反映出来, 这说明 x_1 轴的截距 ($1/5Z$) 增加, 被选择的 Z 值也随之增加。

这个结果意味着我们在图 3.3 中构建直线的反复实验过程中, 画出一簇至少包含可行域中一个点的平行线, 选择 Z 取得最大值所对应的直线。图 3.3 表明这样的直线通过点 $(2,6)$, 意味着最优解是 $x_1=2, x_2=6$ 。这条直线的等式是: $3x_1+5x_2=3\times 2+5\times 6=36=Z$, 显示了 Z 的最优值是 $Z=36$ 。点 $(2,6)$ 是直线 $2x_2=12$ 与 $3x_1+2x_2=18$ 的交点, 见图 3.2, 因此代数上该点是两个等式的公共解。

看过了发现最优点 $(2,6)$ 的反复实验过程, 你现在可以用这个方法解其他问题了。除了画几条平行线外, 还可以使用尺子来建立斜率, 形成单个直线。在可行域内, 沿着 Z 增加的方向, 以固定的斜率移动尺子 (当目标函数为极小化 Z 时, 沿 Z 减小的方向移动)。当连续通过了可行域内的最后一点时, 停止移动, 此时该点就是期望的最优解 (optimal solution)。

这个过程通常被称为线性规划的图解法 (graphical method)。使用它可以解决具有两个变量的任何线性规划问题。在增加一些难度的情况下, 可以对它进行扩展来解决三个变量但不能多于三个变量的问题 (下一章我们将研究用单纯形法解决较大规模的问题)。

结论

运筹小组使用这个方法找到了最优解 $x_1=2, x_2=6$, 此时目标函数 $Z=36$ 。这个结果表明 Wyndor Glass 公司生产产品 1 和产品 2 的速度分别是 2 批/周和 6 批/周, 带来的总利润是每周 36 000 美元。根据这个模型两种产品生产的其他组合都没有这种组合的赢利多。

然而, 我们曾在第 2 章强调过, 一个好的运筹学研究并不意味着为最初建立的模型找到一个解就结束了。在第 2 章描述的六个阶段都十分重要, 包括全面的模型测试 (见 2.4 节) 和优化后分析 (见 2.3 节)。

充分认识了实际情况之后, 运筹小组现在准备进行更关键的模型的有效性评价 (将在 3.3 节继续); 对评价效果进行灵敏度分析, 这不同于表 3.1 的不精确的分析; 环境变化的分析等 (见 6.7 节)。

应用运筹学课程软件的继续学习过程

这是应用本书网站中的运筹学课程软件的第一个地方, 你会发现这些应用都很有用。这个课件的最关键部分是一个被称为 OR Tutor 的程序, 这个程序包括本书中介绍的图

解法的一个完整例子的讲解。讲解先是引入问题、构建线性规划模型,然后应用图解法逐步求解模型。类似于本书其他节中的例子,计算机的讲解着重那些难以用文字来说明和表达的概念。对此可参考附录1有关软件的文档材料。

假如你希望了解更多的例子,可以访问本书网站的工作例子(Worked Examples)部分。该部分包含少量例子的完整求解过程,这些例子包含在本书几乎每一章中,作为对本书和OR Tutor中例子的补充。本章中的工作例子的一开始是一个相对浅显的例子,包括构建一个小型的线性规划模型,然后用图解法求解。随后的例子逐渐变得具有挑战性。

运筹学课程软件的另一关键部分是一个被称为IOR Tutor的程序。该程序的特征是交互执行不同的解的方法,它保证让计算机来进行运算,而你则可以专心学习和研究各种方法的逻辑。程序中还包含应用图解法于线性规划问题时的交互过程。在安装了这个程序后,接下来的步骤将帮助你很快地应用图解法进行对问题数据修订的影响的敏感度分析。然后你可以打印家庭作业的结果。与IOR Tutor中的其他过程一样,这个过程是专门设计用来为你提供完成家庭作业过程中的有效而愉快的学习体验。

在建立一个含有两个以上决策变量的线性规划模型时(图解法无法应用),第4章中讲述的单纯形法将保证你很快找到一个最优解。同样需要对这个解进行有效性检验。如果找出的最优解无意义,则说明建立的模型有错误。

在第1.4节中曾提到运筹学课程软件介绍了用于求解各类运筹学问题的三个特别普及的商业软件包——Excel Solver, LINGO/LINDO和MPL/CPLEX,所有这三个软件包都包含有求解线性规划模型的单纯形法。第3.5节描述如何应用Excel用数据表格形式建立和求解线性规划模型,在3.6节中描述了其他软件包(MPL/LINGO)的应用。除此之外,运筹学课程软件还包含了一个文档,就三个软件包中的每一个如何用于求解本章的每一个例子做了演示。



3.2 线性规划模型

Wyndor Glass公司问题是为了解释典型的线性规划问题(微型版本)。然而,线性规划包含的方面太多以至于不能通过一个简单的例子完全说明它的特征。这一节,我们讨论线性规划的一般特征,包括线性规划数学模型的各种正规形式。

让我们从一些基本的概念和术语开始。表3.2的第一列概括了Wyndor Glass公司问题的各个组成部分,第二列介绍了适合大量线性规划问题组成部分的更普遍的形式。关键词是资源和活动。 m 表示能使用的不同种类的资源数量, n 表示被考虑的活动的数量。一些典型的资源包括资金、特定的机器、设备、工具和人员。活动的例子包括,特定项目的投资,特定媒体的广告,从特定的出发点到特定目的地的货物运输。在线性规划的任何应用中,所有的活动可能是一般类型的(例如这三个例子中的任何一个),单独的活动可能是一般类别内的特定事物。

表 3.2 线性规划的常用术语

原型范例	一般问题
工厂的生产能力	资源
3 家工厂	m 种资源
产品的生产	活动
2 种产品	n 种活动
产品 j 、 x_j 的生产率	活动 j 、 x_j 的水平
利润 Z	所有 Z 的衡量

正如本章引言中描写的一样,线性规划的最常见的应用包括将资源分配给活动。每一种可用资源的数量是有限的,所以要将资源仔细地分配给活动。分配的确定问题包括选择活动的级别,从而达到总体绩效考核的最优值。

通常使用特定的符号来表示线性规划模型的不同组成部分。下面列出了这些符号,并给出了相应的为活动分配资源等一般问题的解释。

Z = 总体绩效考核值。

x_j = 活动的级别 ($j = 1, 2, \dots, n$)。

c_j = 每单位活动级别 j 的增加引起的 Z 的增加。

b_i = 可分配给所有活动的资源 i 的数量 ($i = 1, 2, \dots, m$)。

a_{ij} = 每单位活动 j 所消耗的资源 i 的数量。

模型解决的问题为,对活动的级别做出决策,因此 $x_1, x_2 \dots x_n$ 被称为**决策变量**(decision variables),正如在表 3.3 中所概括的那样, c_j, b_i, a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$) 是模型的输入常量,因此 c_j, b_i, a_{ij} 被称作**模型参数**(parameters)。

表 3.3 线性规划模型中资源对活动的分配所需数据

资源	每个活动单元的资源用量				可获得资源的数量
	活动				
	1	2	...	n	
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
...
m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
每个活动单元对 Z 的贡献	c_1	c_2	...	c_n	

注意表 3.3 中与表 3.1 对应的部分。

模型的标准形式

从处理 Wyndor Glass 公司问题的过程中,我们能够建立为活动分配资源这个一般问题的数学模型。特定地,该模型是确定 $x_1, x_2 \dots x_n$ 的值,目的是

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \\ \text{s. t.} \quad & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\
 &\vdots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\leq b_m \\
 \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n &\geq 0
 \end{aligned}$$

我们称该线性规划问题为我们的标准形式。^① 任何满足该模型的数学公式的问题都是线性规划问题。

注意 Wyndor Glass 公司的问题满足我们的标准形式,且 $m=2, n=3$ 。

现在可以概括线性规划模型的通用术语了。最大化的函数 $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$, 称为目标函数(objective function)。限制条件被称为约束(constraints)。第一个 m 约束(在左边的包括所有变量的函数 $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$)有时被称为约束函数(functional constraints)(或者结构化约束)。相似地, $x_j \geq 0$ 约束条件被称为非负约束(nonnegativity constraints)(或者非负条件)。

其他形式

现在我们马上增加一些不是完全满足模型标准形式的线性规划问题,其他合理的形式如下:

1. 目标函数最小化而不是最大化:

$$\min Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

2. 含有大于等于不等式的某些约束函数:

$$\text{对某些 } i \text{ 值, } a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$$

3. 某些约束函数是等式形式:

$$\text{对某些 } i \text{ 值, } a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

4. 某些决策变量没有非负条件的限制:

当 j 为某些值时, x_j 在符号上没有限制。

任何混合某些以上形式,而保留前面标准模型其他部分的问题仍然是线性规划问题。我们将有限的资源分配给竞争性活动的解释可能不再适用;如果忽略含义与上下文的关系,所需的只是满足允许形式的数学描述。由此一个线性规划问题的规范定义是模型的每个组成部分或符合标准形式,或符合上面列出的其他合法形式之一。

模型解的术语

你可能用词语“解”来表示问题的最终答案,但在线性规划(及其扩展)中的常用语却有所不同。这里,决策变量 (x_1, x_2, \cdots, x_n) 的任何特定值都被称为一个解(solution),而不管它是不是一个期望的或者允许的取值。通过使用不同的形容词来识别不同类型的解。

可行解(feasible solution)就是满足所有约束条件的解。

^① 称为“我们的标准形式”而没有称之为标准形式是因为其他教科书采用了其他形式。

非可行解(infeasible solution)就是至少一个约束条件不被满足的解。

例如,在图 3.2 中点(2,3)和点(4,1)是**可行解**,点(-1,3)和点(4,4)是非可行解。

可行域(feasible region)是所有可行解的集合。例如在图 3.2 中,全部的阴影区域就是可行域。

一个问题可能**没有可行解**(no feasible solutions)。在本例中,如果新产品要求达到每周 50 000 美元的净利润,相关的约束为 $3x_1 + 5x_2 \geq 50$,加上该约束后,将没有可行域。因此,没有新产品的组合将优于当前。此时的情况见图 3.4。

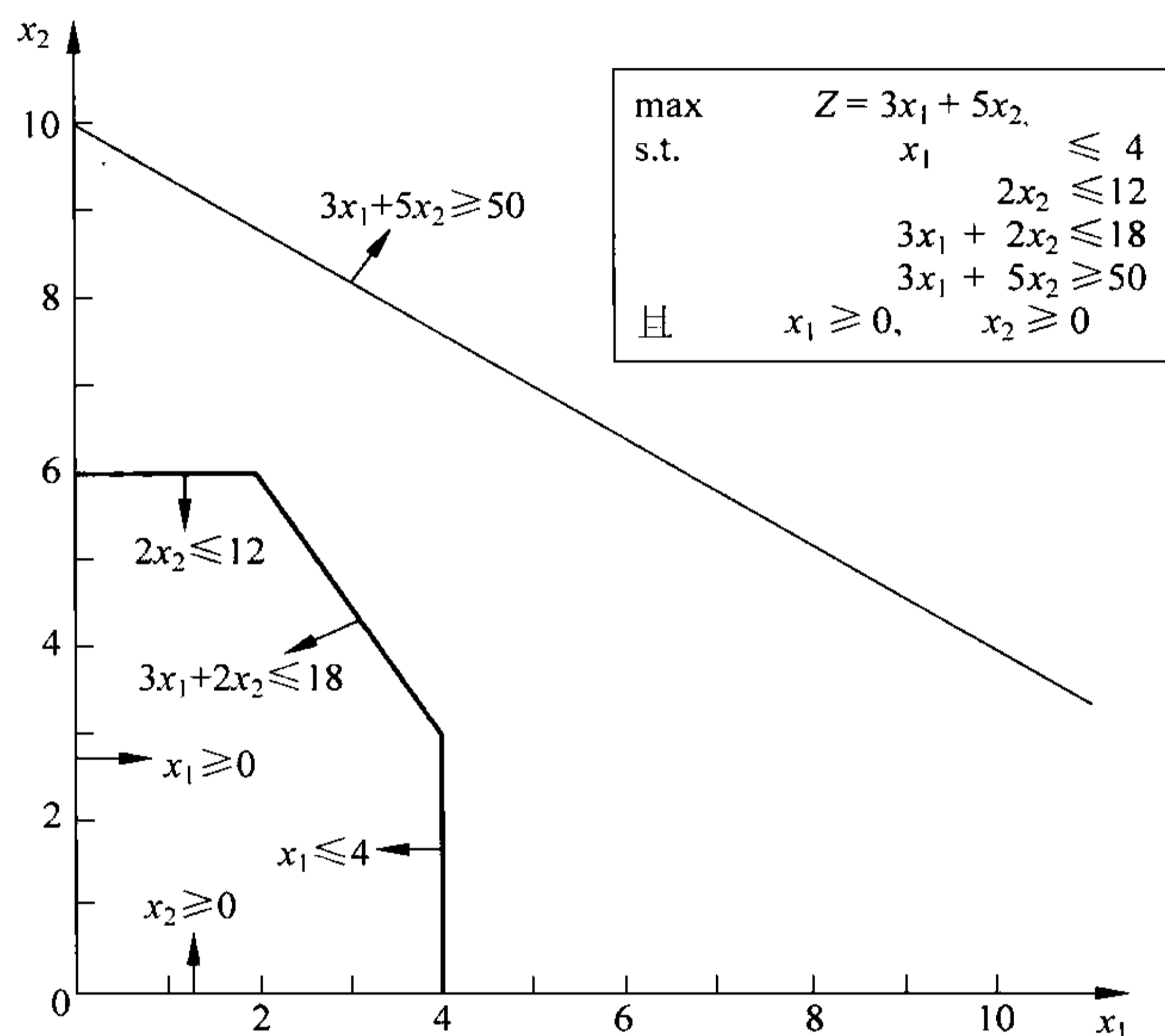


图 3.4 Wyndor Glass 公司问题中如果约束条件加上 $3x_1 + 5x_2 \geq 50$,则没有可行解

只要存在可行域,线性规划的目标就是根据模型中的目标函数值找到最优可行解。

最优解(optimal solution)就是目标函数取得最有利值的可行解。

当目标函数取**极大值**(most favorable value)时,最有利值就是最大值。如果目标函数取极小值,最有利值就是极小值。

大多数问题仅有一个最优解。然而,有时可能多于一个。例如,当每批产品 2 的利润变化为 2 000 美元时,目标函数变化为 $Z = 3x_1 + 2x_2$,使连接点(2,6)与点(4,3)的线段上所有的点都是最优的。这种情况见图 3.5。与在这种情况下一样,任何有**多个最优解**(multiple optimal solutions)的问题将有无穷多解,每一个解都有相同的目标函数值。

另一种可能是一个问题**没有最优解**(no optimal solutions),这发生在:①没有可行解;②约束条件不能阻止目标函数值在有利的方向上(正的或者负的)增长。后一种情况称为有**极大的 Z**(unbounded Z)或者极大的目标。为了说明这种情况,将后两个约束条件从例子中删除,如图 3.6 所示。

下面介绍一种专门类型的可行解,当用单纯形法求解最优解时它起重要的作用。

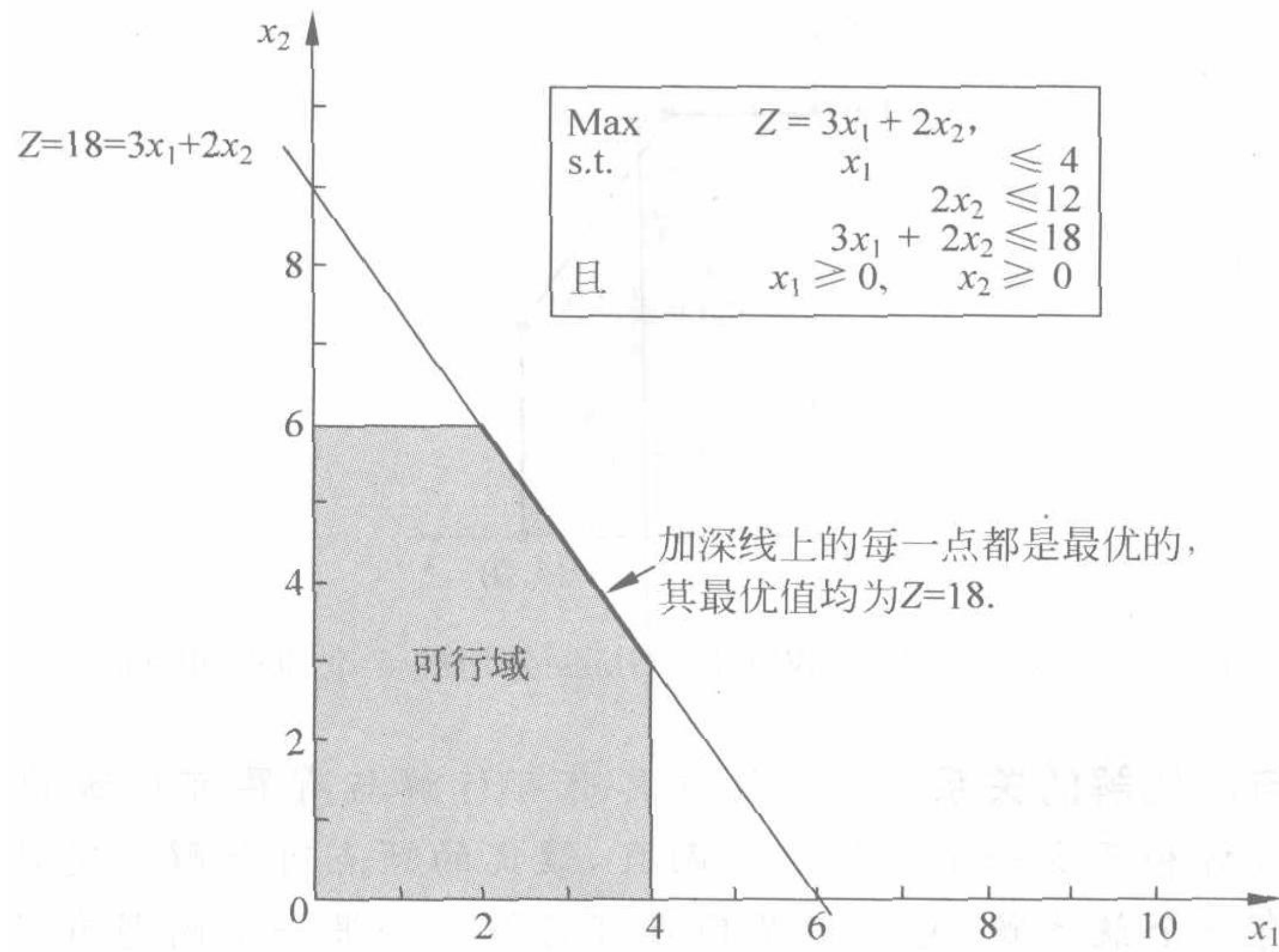


图 3.5 Wyndor Glass 公司问题中, 如果目标函数被转化为 $Z=3x_1+2x_2$, 则会有多个最优解

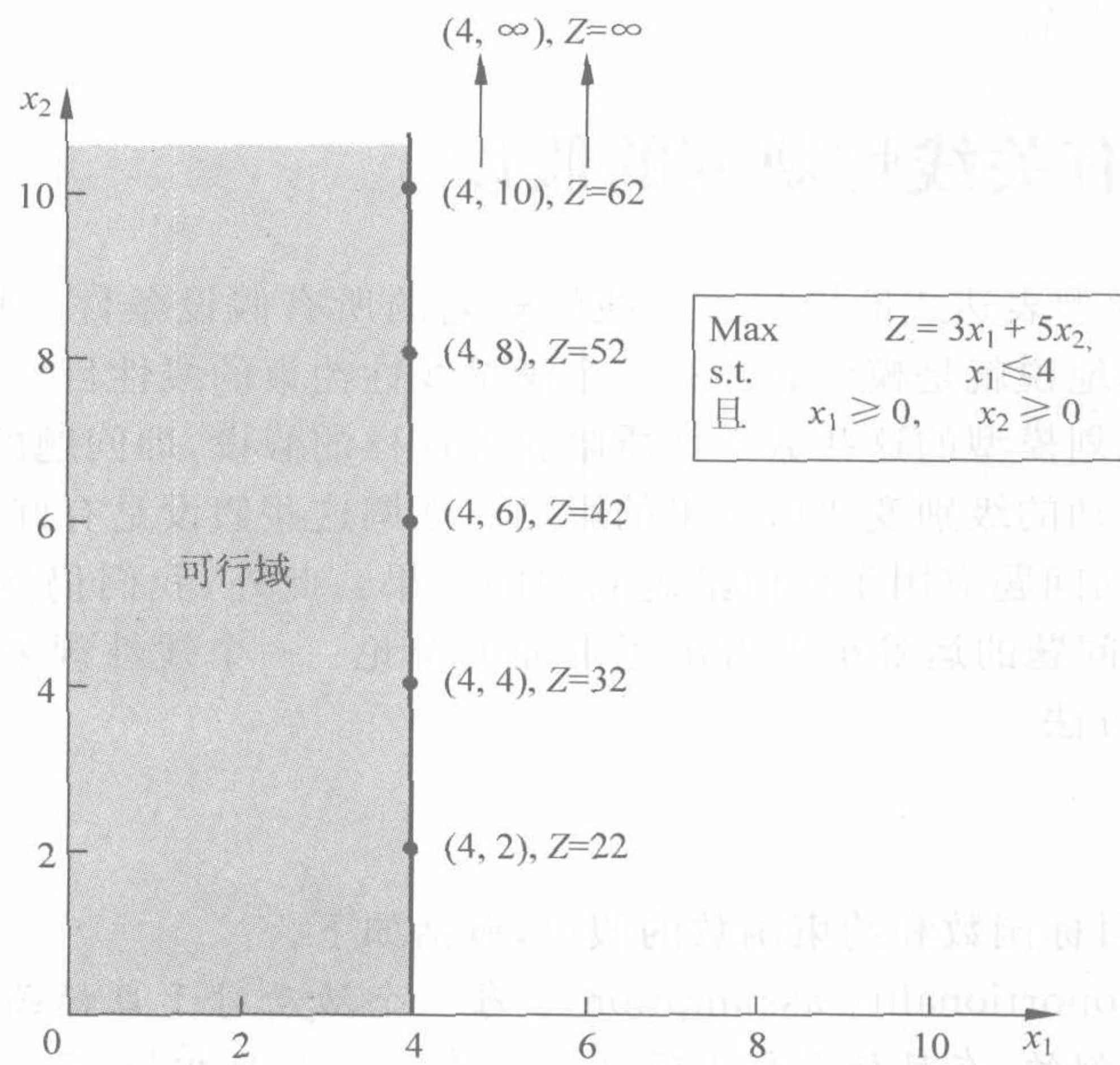


图 3.6 在 Wyndor Glass 公司问题中, 如果只有约束条件 $x_1 \leq 4$, 则没有最优解, 因为目标函数值在可行域内值无限增长, 永远达不到 $Z=3x_1+5x_2$ 的最大值

顶点可行解(corner-point feasible, CPF)是位于可行域顶点的解。CPF 解通常也被称为极点, 但我们更愿称其为顶点。图 3.7 标注了五个顶点可行解。

4.1 节与 5.1 节将研究任意规模的问题的顶点可行解的各种有用的性质, 包括它与最优解的关系。

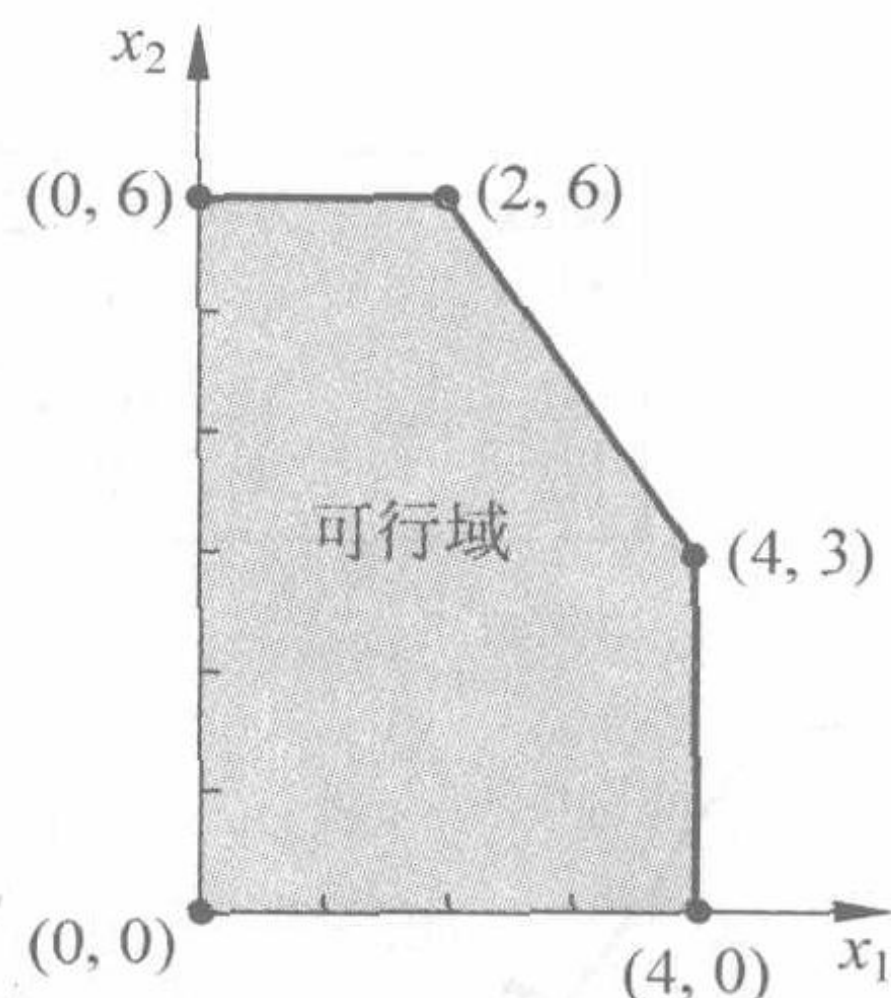


图 3.7 这 5 个点是 Wyndor Glass 公司的 5 个顶点可行解

顶点可行解与最优解的关系：考虑任意具有可行解与有界可行域的线性规划问题，一定具有顶点可行解和至少一个最优解。而且，最优的顶点可行解一定是最优解。所以，如果一个问题恰有一个最优解，它一定是顶点可行解。如果一个问题有多个最优解，其中至少有两个一定是顶点可行解。

此例中，恰有一个最优解， $(x_1, x_2) = (2, 6)$ 是顶点可行解（思考一下图形法怎样由顶点可行解找到最优解）。当修改例子为多个最优解时（见图 3.5），这些最优解中，点 $(2, 6)$ 和点 $(4, 3)$ 是顶点可行解。



3.3 有关线性规划的假设

3.2 节所给的模型表达式恰恰包含了线性规划的所有假设条件。特别地，从数学的角度，假设条件简单地讲就是模型必须有一个满足线性约束的线性目标函数。然而，从模型的角度看，线性规划模型的这些数学性质暗含着这样的假设，即问题的活动和数据必须被模型化，并包含活动的级别变化所带来的影响。强调这些假设是有好处的，你可以比较容易地评估线性规划问题应用于任何给定问题的效果。此外，我们仍然需要了解为什么 Wyndor Glass 公司问题的运筹小组得出了下面的结论：一个线性规划模型为这个问题提供了满意的表示方法。

比例性

比例性是针对目标函数和约束函数的假设，概括如下。

比例性假设 (proportionality assumption)：每一个活动对于目标函数值 Z 的贡献是与活动级别 x_j 成比例的，在目标函数中通过 $c_j x_j$ 表示。与此相似，每一个活动对于约束函数左边式子的作用也是与活动级别 x_j 成比例的，在约束中通过 $a_{ij} x_j$ 表示。结果，此假设可以得到除了注释①以外线性规划模型中的任何函数的任意项中变量的任何解释（不管是目标函数还是约束函数左边的式子）。①

① 当函数包括交叉乘积项时，比例性应该被解释为，假定其他变量为定值，函数值的改变与每一个变量 x_j 的变化独立成比例。因此，当每一个变量指数为 1 时，交叉乘积项满足比例性假设（但任何交叉乘积项不满足可加性假设的情况将随后讨论）。

为了解释这一假设,考虑 Wyndor Glass 公司问题的目标函数 $Z = 3x_1 + 5x_2$ 的第一项 $3x_1$,这一项表达了以每周 x_1 的速度生产产品 1 每周所产生的利润。表 3.4 中比例性满足列显示了 3.1 节假设的情况,利润实际上是与 x_1 成比例的, $3x_1$ 是目标函数中的相关项。相比之下,另外三列表达了不满足比例性假设的不同情况。

首先考虑表 3.4 案例列的情况。如果初始的成本与产品 1 的生产启动有关联,这种情况就会出现。例如,可能会有建立生产设施的成本,还有可能是安排新产品销售的成本。这些是一次性成本,因为它们需要按周进行摊销,以使 Z (每周数千美元的利润)在同一基础上进行度量。假设进行分摊并且总初始成本使 Z 减少 1,而没有考虑初始成本的利润是 $3x_1$ 。这意味着产品 1 对于利润 Z 的贡献是 $3x_1 - 1$,且 $x_1 > 0$ 。然而,当 $x_1 = 0$ 时,贡献 $3x_1$ 应等于 0(没有初始成本)。图 3.8 中实线表示的利润函数肯定不是与 x_1 成比例的。^①

表 3.4 满足和违反比例性的案例

x_1	产品 1 的利润(每周)			
	满足比例性	违反比例性		
		案例 1	案例 2	案例 3
0	0	0	0	0
1	3	2	3	3
2	6	5	7	5
3	9	8	12	6
4	12	11	18	6

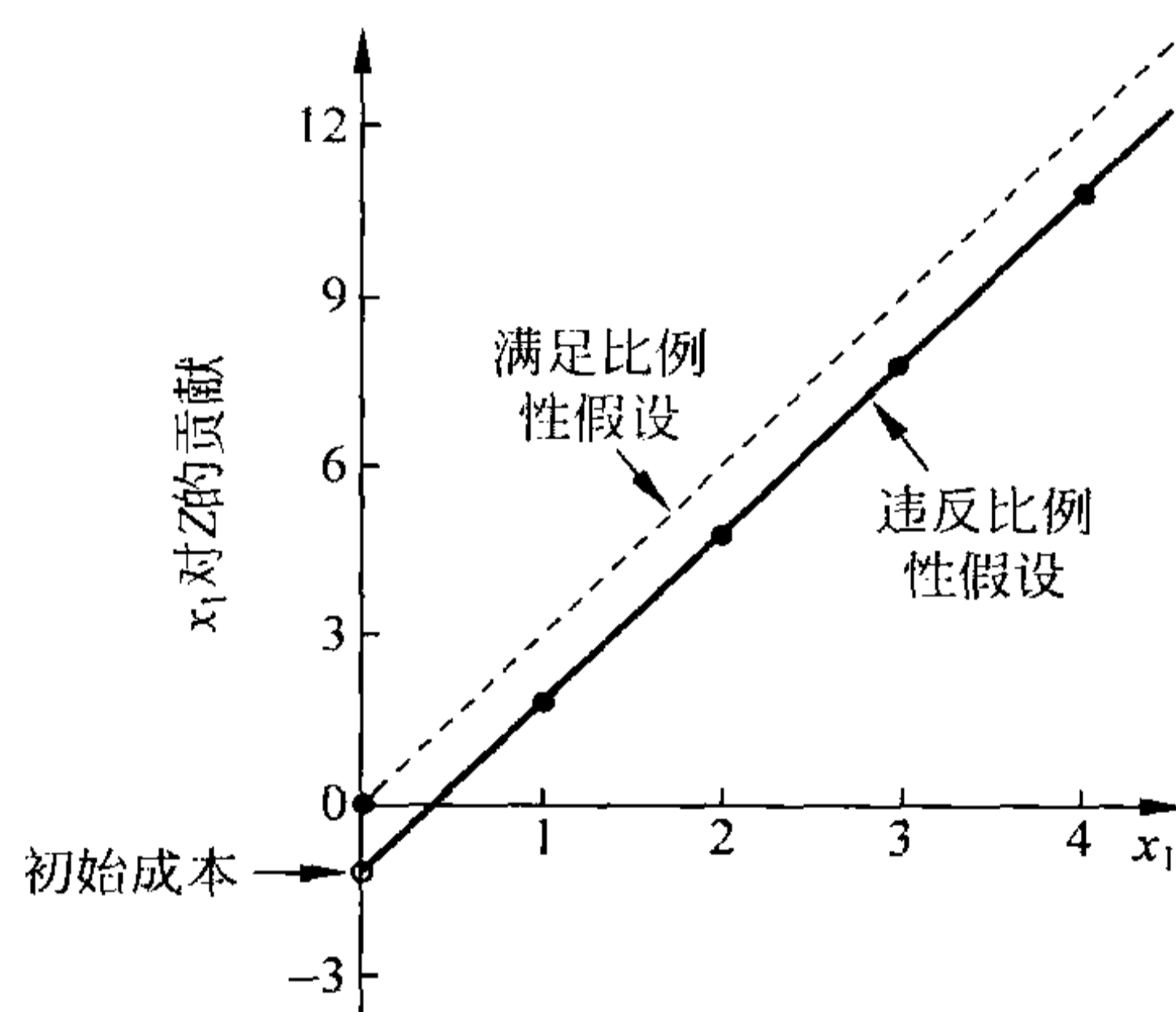


图 3.8 图中实线违反了比例性,因为 x_1 从 0 开始增加时具有初始成本。图中各点的值由表 3.4 中案例 1 列的值给出

初看起来,表 3.4 中案例 2 可能是与案例 1 相似,但是,事实上它与案例 2 完全不同。这里不再有初始成本,将每周产品 1 的第一个单位利润为 3 作为原始假设。然而,边际利

^① 对于所有的 $x_1 \geq 0$,包括 $x=0$,如果产品 1 对于利润 Z 的贡献是 $3x_1 - 1$,固定常量 -1 能够从目标函数中删除而不改变最优解,比例性也被保持。然而,在这里不可行,因为当 $x_1 = 0$ 时常量 -1 不适用。

润是增加的,如产品 1 的利润函数的斜率(见图 3.9 中的实线)是随着 x_1 的增加而增加的。这种违反比例性的情况可能发生,因为在较高的生产水平上,有时会获得规模经济,如使用效率更高的机器、更高的生产水平、大量购买原材料的数量折扣、工人学习曲线的作用、因特定的生产模式而获得的经验导致工作效率的提高等。随着边际成本的下降,边际收益会上升(假定边际收入为常数)。

再参考表 3.4,案例 3 与案例 2 的情况相反,其边际收益是递减的。在这种情况下,产品 1 的利润函数的斜率(图 3.10 中的实线所示)随着 x_1 的减少而下降。可能发生不符合比例性的情况的原因是为了使销售增长,营销费用也可能成比例上涨。例如,不做广告的情况下产品 1 可能每周销售 1 单位($x_1=1$),然而为了使销售额上涨为 2($x_1=2$),可能需要适量的广告。当销售 $x_1=3$ 时,可能必须进行激烈的广告竞争;当 $x_1=4$ 时,可能需要降低价格。

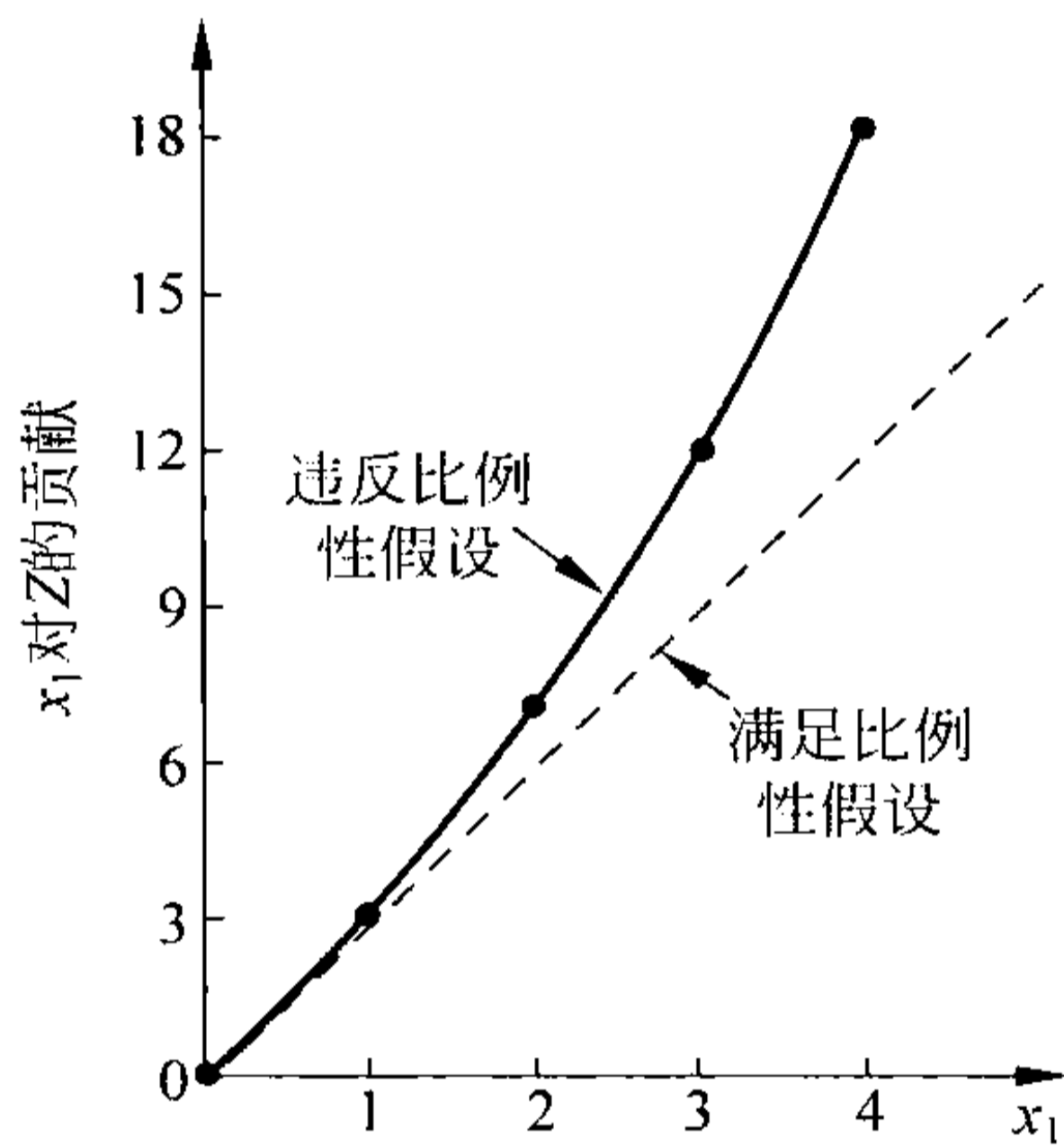


图 3.9 实曲线违反了比例性假设,因为随着 x_1 的增长,其斜率(来自产品 1 的边际收入)增大
图中各点的值来自表 3.4 的案例 2

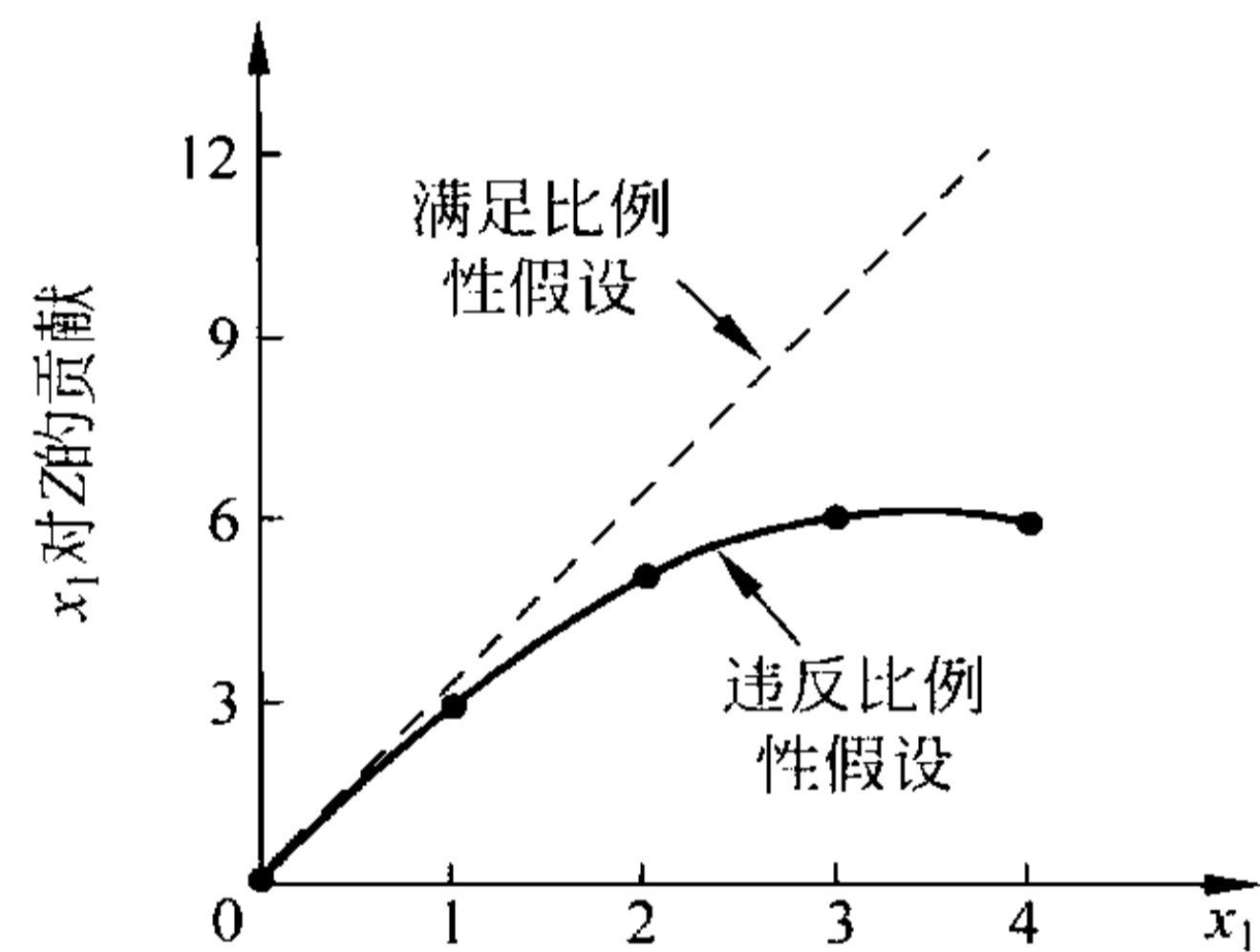


图 3.10 实曲线违反了比例性假设,这是因为随着 x_1 的增长,它的斜率(来自产品 1 的边际收入)下降
图中各点的值来自于表 3.4 中的案例 3

所有这三种情况都是不符合比例性假设的例子。真实情况如何? 来自产品 1(或者其他产品)的真实利润等于销售收入减去各种直接和间接成本。不可避免地,这些成本中的一些,不是与生产率严格成比例的,这可能成为解释上面情况的一个理由。然而,实际的问题是,是否利润的所有组成部分被计算后,比例性会近似接近实际的建模目的。对于 Wyndor Glass 公司问题,运筹小组检查了目标函数和约束函数,得出的结论是:假设比例性没有严重地歪曲事实。

对于其他问题,当比例性或者近似比例性假设不成立时,会发生什么? 大多数情况下,这意味着你必须使用非线性规划来代替线性规划(将在第 12 章论述)。然而,我们指出 12.8 节一类重要的非比例性问题能够通过重新建立适当的线性规划来处理。而且,如果仅因为初始成本的增加而不满足比例性假设,可以使用扩展的线性规划(混合整数规划),整数规划问题将在 11.3 节(固定费用 fixed-charge 问题)研究。

可加性

尽管比例性假设规划了除第一种情况以外的解释,但没有禁止交叉产品情况(关于包含两个或更多变量的产品),可加性假设规划了后一种可能性。其概括如下。

可加性假设(additivity assumption): 线性规划模型中的每一个函数(目标函数或者约束函数左边的函数)是各自活动的单独贡献的总和。

为了精确给出定义和澄清我们为什么考虑这样的假设,让我们来看一些例子。表 3.5 给出了 Wyndor Glass 公司问题的目标函数的一些可能情况。在每一种情况下,产品的贡献与 3.1 节的假设一样,即产品 1 是 $3x_1$, 产品 2 是 $5x_2$ 。不同在于最后一行,给出了当两产品联合生产时 Z 的函数值。满足可加性列表示了这样的情况: 函数值通过前两列简单相加获得($3+5=8$),如前假设从而使 $Z=3x_1+5x_2$ 。相比之下,接下来的两列给出了不符合可加性假设(而不是比例性假设)时的假设情况。

参见表 3.5 中的案例 1, 这种情况对应 $Z=3x_1+5x_2+x_1x_2$ 的目标函数, 对于 $(x_1, x_2)=(1, 1)$, $Z=3+5+1=9$, 因此不符合可加性假设 $Z=3+5$ (比例性假设仍然满足, 因为在一个变量的值固定后, 另一个变量的变化是与 Z 的增加成比例的)。如果两种产品在使利润增加的途径上是互补的, 这种情况将会出现。例如, 假设市场或者新产品生产本身需要打广告战, 但是同一个广告可能同时有效地提高两种产品的利润, 在此假设两种产品一起生产。因为节省了两种产品的很大一部分成本, 它们的联合利润将多于各自独立生产时各自利润的总和。

表 3.5 目标函数中满足或违反可加性的例子

(x_1, x_2)	Z 的值		
	满足可加性	违反可加性	
		案例 1	案例 2
(1, 0)	3	3	3
(0, 1)	5	5	5
(1, 1)	8	9	7

表 3.5 的案例 2 也不符合可加性假设, 因为在对应的目标函数 $Z=3x_1+5x_2-x_1x_2$ 中存在额外项。对于 $(x_1, x_2)=(1, 1)$, $Z=3+5-1=7$ 。与第一种情况相反, 当两种产品的生产具有竞争性时, 将减少两种产品的联合利润, 从而会出现第二种情况。例如, 假设两种产品的生产使用同样的机器和设备。如果产品单独生产, 机器和设备将单独使用。但是, 生产两种产品将需要来回地转换生产过程, 涉及建立一个产品的生产和关闭另一个产品的生产的时间和成本问题。因为大量的额外成本, 它们的联合利润比每一种产品独自生产带来的利润的总和要少。

同样的活动之间的交互能够影响约束函数的可加性。例如, 考虑 Wyndor Glass 公司问题的第三个约束函数 $3x_1+2x_2 \leq 18$ (这是涉及两个产品的唯一约束)。这个约束是关于工厂 3 的生产能力的, 每周两种产品的生产时间是 18 小时。 $3x_1+2x_2$ 表示每周将被用于生产这些产品的生产时间的小时数。表 3.6 的满足可加性列表示了这种情况, 后两列

表示了函数包含交叉产品形式,不满足可加性的情况。

表 3.6 函数约束满足或违反可加性的例子

(x_1, x_2)	资源使用的数量		
	满足可加性	违反可加性	
		案例 3	案例 4
(2,0)	6	6	6
(0,3)	6	6	6
(2,3)	12	15	10.8

对于这三列,使用工厂 3 的生产能力的产品的各自贡献和以前的假设一样,即产品 1 为 $3x_1$,产品 2 为 $5x_2$ 。当 $x_1=2$ 时, $3 \times 2=6$; 当 $x_2=3$ 时, $2 \times 3=6$ 。这与表 3.5 的情况一样;不同的是最后一行给出了两种产品联合生产时总的函数值。

对于案例 3(见表 3.6),两种产品的生产时间通过函数 $3x_1 + 5x_2 + 0.5x_1x_2$ 给出,因此当 $(x_1, x_2)=(2,3)$ 时,总的函数值是 $6+6+3=15$,不满足可加性假设的值 $6+6=12$ 。在与表 3.5 中的案例 2 同样的情形下,将会出现这种情况,即额外的时间被浪费在两种产品之间来回的生产转换过程。额外的二次项 $0.5x_1x_2$ 给出了时间浪费的方式(注意到总的函数被用于计算总的生产时间时,在两个产品之间来回的转换生产过程浪费时间导致正的额外的二次项;在案例 2 中,总的函数是计算利润,将导致负的二次项)。

在表 3.6 的案例 4 中,生产时间的函数使用 $3x_1 + 2x_2 - 0.1x_1^2x_2$,因此当 $(x_1, x_2)=(2,3)$ 时,函数值是 $6+6-1.2=10.8$ 。这种情况以下面的方式发生:与案例 3 一样,假设两种产品生产需要同一种机器和设备,但假设从一种产品生产转换为另一种产品生产的时间相对很少。因为每一种产品的生产需要一系列的生产运作,用于生产的单个产品的生产设施将偶然有空闲时间。在空闲时间,这些设施将可以用于生产其他产品。结果,两个产品联合生产的时间(包括空闲时间)将少于各自单独生产产品的时间总和。

在分析了上述情况给出的两种产品之间各种可能的交互情况后,运筹小组得出结论:Wyndor Glass 公司问题不存在起决定作用的因素。因此可加性假设作为一个合理的近似情况仍可以被采用。

对于其他问题,如果可加性假设不是一个合理近似情况,模型中所有的或一些数学函数需要表示为非线性的(原因为交叉产品的情况),这时你可以利用非线性规划领域的知识(见第 12 章)。

可分割性

下面的假设是关于决策变量的许可取值。

可分割性假设(divisibility assumption):在线性规划模型中决策变量可取满足函数和非负性约束的任意值,包括非整数值。因此,这些变量并不严格要求都是整数值。由于每一个决策变量代表了一些活动的级别,假设活动能够以小数方式表示。

对于 Wyndor Glass 公司问题,决策变量表示生产率(一种产品每周生产的批数)。

由于在可行域内这些生产率有小数值,可分割性在此发生作用。

在一定情况下,可能由于所有的或某些决策变量严格要求取整数值,可分割性假设在此不起作用,具有这种限制的数学模型被称为整数规划,并将在第11章研究。

确定性

我们最后的假设是关于模型参数的,即在目标函数中的系数 c_j 、在约束函数中的系数 a_{ij} 和约束函数等式右边的 b_i 。

确定性假设(certainty assumption): 被赋予线性规划模型的每一个参数的值被假设为已知常量。

在实际应用中,确定性假设很少完全满足,线性规划模型通常为了选择一些将来的行为过程而建立。因此,被使用的参数值是将来条件的一种预期,不可避免地带有了一定程度的不确定性。

出于这一原因,在假设的参数下确定的最优解被找到后,通常要进行灵敏度分析(sensitivity analysis)。正像在2.3节讨论的那样,目的之一是识别灵敏度参数(该参数的改变必然导致最优解的变化),因为灵敏度参数值的变化需要立即去改变正在使用的解。

在分析 Wyndor Glass 公司问题时,灵敏度分析起一个重要的作用,这一点你可以在6.7节看到。然而,在此之前,你必须获得一些背景资料。

偶然地,因参数的不确定程度太大而不能进行修改来进行灵敏度分析。在这种情况下,必须明确地把参数当做随机变量。

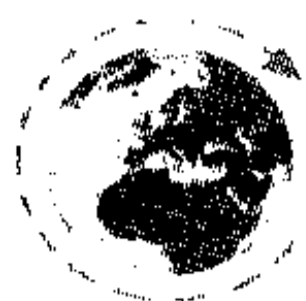
前景假设

在2.2节我们强调了数学模型仅仅是实际问题的一个理想化表达。通常需要近似和假设简化,目的在于易于处理模型。加入太多的细节和精确度将使模型范围过于广泛而无法对问题进行有效分析。实际上要求在模型的预测和实际发生的问题之间建立高度关联性。

对线性规划这一建议一定是有用的。在实际的线性规划应用中,四个假设几乎没有一个被完全满足。除了分割性假设,几乎都不能完全满足,尤其是确定性假设。因此,灵敏度分析是对违反假设的必要弥补。

然而,非常重要的一项是运筹小组检验测试了问题的四个假设,分析了假设与现实之间的差距。如果某个假设不满足,那么可以采用许多有用的替代模型,正像在本书后面章节描述的一样。其他模型的不利在于求解它们的算法不像线性规划那样强有力,但是在一些情况下,这种差距已经被弥补。在一些应用中,强有力的线性规划方法有利于初始分析,深入分析将使用更复杂的模型。

通过学习3.4节的例子,你将发现对于分析线性规划四个假设如何应用,这是一个非常好的实践。



3.4 补充例子

Wyndor Glass 公司问题是一个线性规划问题的典型实例：它涉及在竞争性的活动中分配有限的资源，它的模型满足我们的标准形式，它的背景是一种传统的商务计划改进。然而线性规划的应用范围更广阔。本节我们将开阔视野。当你研究下面的例子时，应该注意是这些例子的数学模型基础而不是这些例子使其具有线性规划问题的特征。然后考虑怎样在其他背景下，只改变活动的名称就可以适用同样的线性规划数学模型。

这些例子是实际应用的浓缩版本(其中两个案例将在下一节描述)，与 Wyndor Glass 公司问题以及 OR Tutor 中的图解法演示一样，案例中的第一个例子只有两个变量，能够通过图形法求解。新的特征表现为它是一个最小问题并有一个约束函数的混合形式(这个例子在放射治疗的设计方面对实际情境做了极大的简化，不过本节中的第一个应用案例介绍了运筹学在该领域实际带来的令人惊喜的影响)。接下来的例子的决策变量远远多于两个，因此建模难度也大为增加。尽管我们将提到通过单纯形法获得最优解，这里关注的仍然是如何建立较大的问题的线性规划模型。接下来一节和下一章我们将回到求解此类问题的软件工具和算法的问题(单纯形法)上。

假如你感到在碰到更具挑战性的构模问题前，需要构建小的相对简单的线性规划模型的例子，建议你返回 OR Tutor 中图解法的解释例子和本书网站中本章工作例子部分的一些例子。

放射治疗的设计

玛丽被诊断为晚期癌症。尤其严重的是，她的膀胱长了一个大的恶性肿瘤(膀胱机能障碍)。

她将接受最先进的医学治疗，包括大量的放射性治疗。

放射性治疗涉及使用外部光束治疗仪透过患者的身体进行离子放射，来杀伤癌细胞和健康的组织。通常几束光束在一个二维的平面上从不同的角度进行精确照射。由于光束衰减，射入点附近的组织会比射出点附近的组织接收更多的放射。发散性还可能导致光束方向以外的组织受到放射。由于肿瘤细胞通常是在健康细胞中微量分散的，通过肿瘤区的放射量需要足够大才能杀死恶性细胞，它们有些轻微的放射性敏感，而要求尽量少地涉及健康细胞。同时，被集结于关键组织的放射量一定不能超过已经建立的容忍水平，目的是防止造成比疾病本身更严重的伤害。同样的原因，对于整个健康组织的放射量应该是最小的。

因为要仔细地对这些因素进行平衡，放射性治疗的设计是一个非常精细的过程，设计的目标是选择适用的光束组合和光束强度，以产生最好的放射分布量(身体里任何点的放射量用“千德拉/单位”度量)。完成治疗设计后，就将分成几个疗程，跨度达几个星期。

应用案例

前列腺癌是男性常患的一种癌症。2007年,估计仅在美国就有22万例新的患者。与其他癌症类似,放化疗是治疗前列腺癌的常用方法,该方法对肿瘤区域给予足够充分的放射线剂量以杀死恶性细胞,同时尽量减少对肿瘤区附近健康组织的放射线照射。这种治疗分为外部波束放射治疗(如本章第一个例子所描述的)或短距离放射治疗——该方法在肿瘤区放置大约100个放射性的“种子”。这种方法的困难在于决定最有效的三维几何模式以放置这些种子。

位于纽约市的纪念斯隆-凯瑟琳癌症中心(MSKCC)是世界上最早的私人癌症中心。来自佐治亚理工学院的医疗和健康运筹学中心的一个运筹团队与MSKCC的医生合作开发了一种非常尖端被称为下一代的优化方法,用来优化短距离放射治疗方法以更好地治疗癌症。所采用的模型与线性规划的结构一致,其中仅有一个模型例外。除了具有与线性规划一致的普通连续变量外,该模型还有一些二元变量(变量取值为0或1)(对线性规划的这种扩展称为混合整数规划,将在第11章中进行重点讨论)。开始向病人体内植入这些种子时,通过一个自动化的计算机计划系统,优化过程可以在几分钟内完成,并且医务人员可以很容易地操作该系统。

由于这套系统非常有效并且能够极大地减少副作用,优化短距离放射治疗去除癌变组织的突破对于医疗成本和治愈病人的生活质量均有着重要的影响。如果所有的美国医疗中心均采用这种方法,由于没有必要举行预处理计划会议和术后CT扫描,据估计每年可以节约近5亿美元,并且能够提供更加有效的手术及减少处理并发症的必要。而且可以预期的是,这种方法还能扩展到其他疾病的短距离放射治疗中,例如乳腺、子宫颈、食道、胆管、胰腺、头部、脖子和眼睛。

该线性规划方法及其扩展的应用使该运筹团队于2007年在表彰运筹学和管理学成就的Franz Edelman奖的全球竞争中获得了令人瞩目的一等奖。

资料来源: E. K. Lee and M. Zaider, "Operations Research Advances Cancer Therapeutics," *Interfaces*, 38(1):5-25, Jan.-Feb. 2008. (以下网址提供本文的链接: www.mhhe.com/hillier.)

在玛丽的案例里,肿瘤的尺寸和位置使她的治疗设计需要比平常更加精细。图3.11中肿瘤的交叉部位图几乎避开了所有的关键组织。将削弱放射性的部位包括关键的组织(如直肠)、骨结构(如大腿骨和骨盆)。在这种情况下只有两束射线的进入点和方向能够被用于治疗的安全情况(在这一点上,我们进行了简化,因为通常必须考虑几十个可能放射束)。

对于任何给定强度的放射束,对身体不同部分的放射吸收结果进行分析是一个复杂的过程。简单地说,在仔细解剖分析的基础上,在组织的二维交叉部位范围内的能量分布,可以在等剂量图上表示出来,图上

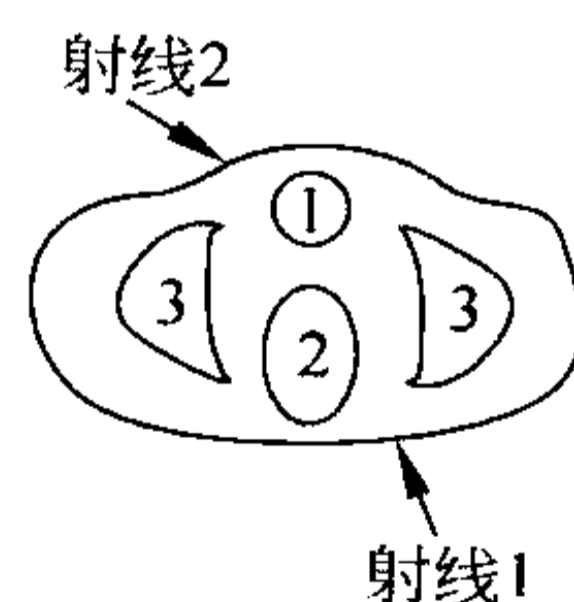


图3.11 玛丽的肿瘤的交叉部分,它在鉴定组织的周围,射线被应用到:①气泡和肿瘤;②直肠、尾骨等;③盆骨的一部分等。

的等高线表示了进入点剂量强度的百分比。能够计算每一种组织的单位面积吸收放射剂量的总和,肿瘤、健康解剖、关键组织等吸收的平均剂量。多于一束射线时,放射量是可以叠加的。

通过这种类型的分析以后,医疗小组仔细地验证了设计玛丽治疗的数据,见表 3.7。第一列列出了被考虑的身体的区域,下两列给出了进入点被各自区域吸收的放射束平均放射剂量。例如,如果一束放射线在进入点的剂量水平是 1 千德拉/单位,那么在二维平面上健康的解剖组织将平均吸收 0.4 千德拉/单位的放射量,附近的关键组织将吸收 0.3 千德拉/单位,肿瘤的各个部分将吸收 0.5 千德拉/单位,肿瘤的中心部分将吸收 0.6 千德拉/单位。最后一列给出了被身体各个部分平均吸收两个放射束的总放射剂量的约束限制。尤其是,健康的解剖组织的平均吸收量必须尽可能小,关键组织不能超过 2.7 千德拉,整个肿瘤平均必须为 6 千德拉,肿瘤的中心至少为 6 千德拉。

表 3.7 玛丽放射治疗的数据设计

面 积	吸收药剂的部分(平均)		总体平均剂量的约束
	射线 1	射线 2	
健康的解剖	0.4	0.5	最大
鉴定的组织	0.3	0.1	≤ 2.7
肿瘤区域	0.5	0.5	$= 6$
肿瘤的中心	0.6	0.4	≥ 6

线性规划问题的建模

两个决策变量 x_1 、 x_2 分别表示放射束 1 和放射束 2 的射入点的放射量(千德拉)。因为到达健康组织的放射量应该最小化,用目标函数 Z 来表示。使用表 3.7 的数据可以直接建立下面的线性规划模型^①:

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = 0.4x_1 + 0.5x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7 \\ & 0.5x_1 + 0.5x_2 = 6 \\ & 0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

注意这个模型与 3.1 节 Wyndor Glass 公司问题模型不同,后者是目标函数最大化,所有的约束函数都是小于等于形式。这个模型不满足同样的标准形式,但是它符合 3.2 节描述的三种其他合理形式,即最小化 Z ,约束函数是等于和大于等于形式。

但是两个模型都仅有两个变量,因此这个问题也能通过 3.1 节描述的图形法解决。

^① 这个模型较之实际应用的需求要小得多。为得到一个最好的结果,实际的模型可能需要包含几万个决策变量和约束,例如见 H. E. Romeijn, R. K. Ahuja, J. F. Dempsey 和 A. Kumar, "A New Linear Programming Approach to Radiation Therapy Treatment Planning Problems," *Operations Research*, 54(2), 201-216, March-April 2006. 作为一种替代方法是将线性规划同其他运筹学方法结合(例如见本节的第一个案例),也可见 G. J. Lim, M. C. Ferris, S. J. Wright, D. M. Shepard 和 M. A. Earl, "An Optimization Framework for Conformal Radiation Treatment Planning," *INFORMS Journal on Computing*, 19(3):366-380, Summer 2007.

图 3.12 给出了图形法求解的图示。在点(6,6)和点(7.4,4.5)之间的粗线段组成可行域,因为在这一线段上的点是唯一满足所有约束的点(注意等式约束将可行域限制为该线段所在的直线,其他两个约束决定了该线段的端点)。虚线是目标函数线,通过最优解(7.5,4.5)时, $Z=5.25$ 。这一点比点(6,6)优,因为向原点($Z=0$)移动目标函数线得到减少的 Z (Z 为正值)。对于点(7.5,4.5), $Z=5.25$;对于点(6,6), $Z=5.4$ 。

因此,最优的设计是使用在射入点放射束 1 用 7.5 千德拉,放射束 2 用 4.5 千德拉的放射量。

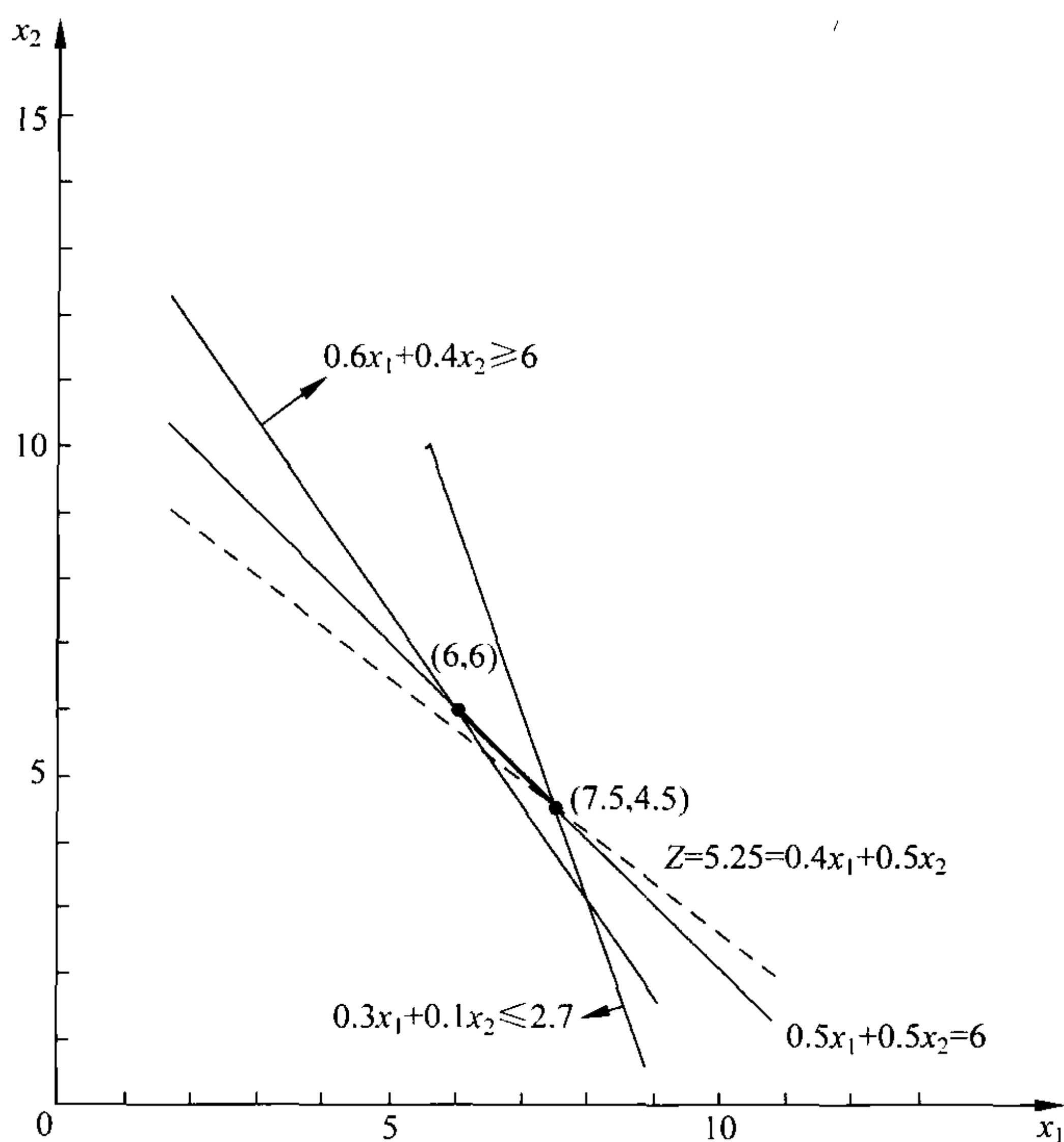


图 3.12 玛丽射线治疗设计的图解

区域计划

南部联盟农场是由以色列三个农场组成的联合组织。这个组织的整体计划在协作技术办公室制订,该办公室正在制订下一年的农业产量。

每一个农场的农业产出受限于两个量,即可使用的灌溉土地量和水利委员会(国家政府办公室)分配的用于灌溉的水量。这些数据见表 3.8。

表 3.8 南部联盟农场资源数据

农场	可用的土地/英亩	水资源分配/立方英尺
1	400	600
2	600	800
3	300	375

适合本地区种植的农作物包括制糖用甜菜、棉花与高粱属植物。这三种农作物是下一季考虑种植的。这些作物的差异在于它们每亩的期望净收益和水的消耗量不同。另外农业部门已经制订了南部联盟农场作物总亩数的最大配额,见表 3.9。

表 3.9 南部联盟农场的庄稼数据

庄稼	最大配额/英亩	水的消耗/(立方英尺/英亩)	回报/(美元/英亩)
甜菜	600	3	1 000
棉花	500	2	750
高粱	325	1	250

由于用于灌溉的水量有限,南部联盟农场在下一季不能使用全部可灌溉土地用于种植计划的作物。为了确保三个农场均衡,这三个农场已经达成一致,每一个农场以相同比例使用其可使用的可灌溉土地。例如,农场 1 使用其 400 亩土地中的 200 亩,那么农场 2 将使用其 600 亩土地中的 300 亩,农场 3 将使用其 300 亩土地中的 150 亩。但是作物的任何组合可以在任何农场种植,协作技术办公室的工作是在满足给定的约束条件下,为每一个农场选择每一种作物的种植量,目标是整体上最大化南部联盟农场的净收益。

线性规划问题的建模

要决定的数量是为每一个农场选择每一种作物的种植量,决策变量 $x_j (j=1,2,\dots,9)$ 表示 9 个产量,见表 3.10。

表 3.10 南部联盟农场问题的决策变量

庄稼	最佳分配/英亩		
	农场 1	农场 2	农场 3
甜菜	x_1	x_2	x_3
棉花	x_4	x_5	x_6
高粱	x_7	x_8	x_9

因为 Z 表示总的净收益,该问题的线性规划模型如下

$$\max Z = 1\,000(x_1 + x_2 + x_3) + 750(x_4 + x_5 + x_6) + 250(x_7 + x_8 + x_9)$$

约束条件如下:

1. 每一个农场使用的土地

$$x_1 + x_4 + x_7 \leq 400$$

$$x_2 + x_5 + x_8 \leq 600$$

$$x_3 + x_6 + x_9 \leq 300$$

2. 每一个农场的水量分布

$$3x_1 + 2x_4 + x_7 \leq 600$$

$$3x_2 + 2x_5 + x_8 \leq 800$$

$$3x_3 + 2x_6 + x_9 \leq 375$$

3. 每一种作物的总种植量

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 600$$

$$x_4 + x_5 + x_6 \leq 500$$

$$x_7 + x_8 + x_9 \leq 325$$

4. 种植作物的土地同等比例要求

$$\frac{x_1 + x_4 + x_7}{400} = \frac{x_2 + x_5 + x_8}{600}$$

$$\frac{x_2 + x_5 + x_8}{600} = \frac{x_3 + x_6 + x_9}{300}$$

$$\frac{x_3 + x_6 + x_9}{300} = \frac{x_1 + x_4 + x_7}{400}$$

5. 非负约束

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 9$$

建立模型后,考虑到有些变量在等式右方,所以这些等式约束仍然不是线性规划模型的合理形式。因此,它们的最终形式如下^①

$$3(x_1 + x_4 + x_7) - 2(x_2 + x_5 + x_8) = 0$$

$$(x_2 + x_5 + x_8) - 2(x_3 + x_6 + x_9) = 0$$

$$4(x_3 + x_6 + x_9) - 3(x_1 + x_4 + x_7) = 0$$

协作技术办公室建立了这个模型,然后应用单纯形法(将在第4章学习)求得最优解

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9) = \left(133 \frac{1}{3}, 100, 25, 100, 250, 150, 0, 0, 0\right)$$

如表 3.11 所示,目标函数的最优解值是 $Z = 633\,333 \frac{1}{3}$,也就是说,净收益是 633 333.33 美元。

表 3.11 南部联盟农场问题最优解

庄 稼	最佳分配/英亩		
	农场 1	农场 2	农场 3
甜菜	$133 \frac{1}{3}$	100	25
棉花	100	250	150
高粱	0	0	0

空气污染控制

NORI&LEETS 公司是世界主要钢厂之一,位于 Steeltown 市,是该市唯一的大雇主。Steeltown 市随着公司的成长而繁荣,公司雇用了 50 000 名当地居民作雇员。因此,Steeltown 市人的态度是对于公司有利的事情就是对 Steeltown 市有利的。然而,现在这样的态度正在变化,公司熔炉产生的无法控制的空气污染正在毁坏城市的面貌和损害员工的健康。

最近,股东选出了公司新的董事会,这些董事们决定担负起社会责任,他们与

^① 实际上,这些等式中的任何一个都是多余的,如果需要可以删除。在这些等式中,任何可使用的土地约束中的两个都能够被删除,因为当剩余土地约束和这些等式满足时,它们将自动被满足。然而,加上这些条件,即不必要的约束,是没有妨碍的(除了很小的额外计算),因此你不必考虑在自己建立的模型中删除它们。

Steeltown 市政府官员和居民一起研究怎样控制空气污染,并且共同制订了严格的 Steeltown 市空气质量标准。

在空气中三种主要的污染成分是颗粒物、硫氧化物和碳氢化合物。新的标准要求公司减少这些污染的年排放量(见表 3.12)。公司董事会已经指示工程技术人员怎样以最经济的方式减少污染量。

表 3.12 Nori&Leets 公司清洁空气的标准

污染物质	每年需要排放率的缩减量/百万英镑
微粒	60
硫氧化物	150
碳氢化合物	125

钢厂有两种主要污染源,即制造生铁的高炉和将铁炼成钢的平炉。对于这两种熔炉,工程师决定最有效的消除污染方法:(1)增加烟囱的高度。^①(2)使用过滤装置(包括在烟囱上安装气体过滤器)。(3)在熔炉燃料中加入高级清洁材料。每一种方法都存在技术限制,即应该使用多少(如烟囱高度的最大可增加量),但是在使用这些方法的技术限制上也有一定的灵活性。

表 3.13 给出了在技术限制下使用每一种消除污染方法时高炉和平炉所能消除的排放量(百万英镑/年),出于分析的目的,假设表中所示的每一种方法减少的排放比率达到很小一部分,而且这一部分对于高炉和平炉是不同的。对每一种类型的熔炉来说,其他方法是否使用不会影响该方法可以实现的排放减少量。

表 3.13 Nori&Leets 公司使用最大可用消除方法的排放率的降低率/百万英镑·年⁻¹

污染物质	更高的烟囱		过滤器		好的燃料	
	高炉	平炉	高炉	平炉	高炉	平炉
微粒	12	9	25	20	17	13
硫氧化物	35	42	18	31	56	49
碳氢化合物	37	53	28	24	29	20

获得这些数据后,一方面,很清楚没有单独的方法能够达到要求的排放量;另一方面,在两种熔炉的全部生产能力内结合使用以上三种消除污染方法(如果公司希望产品价格具有竞争性,这种方式太过昂贵)已经足够了。因此,工程师得出结论:他们将不得不使用组合方法,可能有基于相对成本小于 1 的表示的生产能力。而且,两种类型的熔炉可能不应该使用相同的组合。

分析得到消除方法带来的每一年的总成本。每一种方法的年成本包括运行与维修花费,也包括使用该方法的生产过程的效率损失所带来的收益损失。其他主要成本是需要建立该方法的初始成本(初始资本费用),计算每年支出的货币的时间价值(超过方法的生

^① 随后的研究表明,这种特定的消除方法,通过在一个大的距离内散布排放量来减少地面污染量的效果已经变得有争议了,环境组织认为其通过空气中的硫氧化物制造了较多的酸雨。因此,美国环境保护机构在 1985 年采取了新的措施以减少使用高烟囱。

命周期)的初始成本。

这些分析得到的使用这些方法的全部除污能力的年总成本(百万美元)如表 3.14 所示。同时也得到低水平使用方法的成本与除污能力的比例分数(见表 3.13)。对于任何给定的比例分数,年总成本将大约是表 3.14 所表示的对应量的比例。

表 3.14 Nori&Leets 公司使用最大可用消除方法每年的总成本/百万美元

消除方法	高炉	平炉
更高的烟囱	8	10
过滤器	7	6
好的燃料	11	9

现在建立公司污染消除方法计划的总体框架,这个计划说明了高炉和平炉所使用的除污方法与除污能力的比例分数。由于发现一个满足需求的最小成本计划问题的组合本质,建立运筹小组来解决问题,小组采用了线性规划方法,建立的模型概括如下。

线性规划问题的建模

这个问题有六个决策变量, x_j ($j=1, 2, \dots, 6$), 每一个表示三种除污方法对应两种熔炉的使用,用除污能力的分数表示(因此 x_j 不能超过 1)。这些变量排列见表 3.15。

表 3.15 Nori&Leets 公司的决策变量(使用最大可用消除方法的部分)

消除方法	高炉	平炉
更高的烟囱	x_1	x_2
过滤器	x_3	x_4
好的燃料	x_5	x_6

因为当满足排放量减少的要求时,目标是总成本最小化。用表 3.12~表 3.14 中的数据建立下面的模型

$$\min Z = 8x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 11x_5 + 9x_6$$

受限于下面的约束:

1. 排放量约束

$$12x_1 + 9x_2 + 25x_3 + 20x_4 + 17x_5 + 13x_6 \geq 60$$

$$35x_1 + 42x_2 + 18x_3 + 31x_4 + 56x_5 + 49x_6 \geq 150$$

$$37x_1 + 53x_2 + 28x_3 + 24x_4 + 29x_5 + 20x_6 \geq 125$$

2. 技术限制

$$x_j \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, 6$$

3. 非负约束

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, 6$$

运筹小组使用该运筹学模型得到了最小的成本计划^①。

^① 一种等价的构模可通过除污方法以每一自然单位表示的决策变量来表达,例如 x_1, x_2 表示烟囱增加高度的英尺数。

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (1, 0.623, 0.343, 1, 0.048, 1)$$

$Z=32.16$ (年总成本是 32.16 万美元)。然后对表 3.12 中的空气标准进行调节可能产生的影响进行灵敏度分析,并分析表 3.14 给出的成本数据的不精确性造成的影响(案例 6.1 给出了这个例子的后续)。下面进行详细的计划和管理评价。不久,公司执行了控制空气污染的项目,Steeltown 市的空气更加清洁。

固体废物回收

SAVE-IT 公司建立了一个回收中心,收集四种固体废物,将它们处理以熔合做成一种可销售的产品(处理和熔合过程是分离的)。根据原材料的混合情况,可以将这种产品划分为三个级别(见表 3.16 的第一列)。尽管每一个级别的混合物比例比较灵活,质量标准规定了每一个级别产品的材料比例中允许的最大量和最小量(这个比例是材料的重量在这一级别产品中重量的百分比)。在两个较高的级别中,规定了每一种材料固定的百分比。这些规格、熔合的成本以及每一个级别产品销售的价格见表 3.16。

表 3.16 SAVE-IT 公司的产品数据

等级	说明	合并后每磅的成本 /美元	每磅的销售价格 /美元
A	材料 1: 不超过总量的 30% 材料 2: 不少于总量的 40% 材料 3: 不超过总量的 50% 材料 4: 严格控制占总量的 20%	3.00	8.50
B	材料 1: 不超过总量的 50% 材料 2: 不少于总量的 10% 材料 4: 严格控制占总量的 10%	2.50	7.00
C	材料 1: 不超过总量的 70%	2.00	5.50

回收中心有固定的来源收集固体废物,因此能够维持固定的速度来处理它们。表 3.17 给出了每周收集和处理的数量,还给出了每一种原材料处理的成本。

SAVE-IT 公司是处理环境问题的绿色地球组织所拥有的公司,因此它的利润用于帮助、支持绿色地球组织的活动。绿色地球组织每周已经付出 30 000 美元专门用于固体废物处理。绿色地球组织的董事会指示 SAVE-IT 公司管理层以下列方式分配资金:至少保证每一种原材料数量的一半确实被收集和治理。这些附加的条件见表 3.17。

表 3.17 SAVE-IT 公司固体废物材料数据

材料	每星期可获得 的数量/磅	每磅的治理成本 /美元	附加的约束
1	3 000	3.00	1. 对于每种材料,每周可获得的磅数中至少有一半应该被收集和治理 2. 每周应该花费 30 000 美元用于处理这些材料
2	2 000	6.00	
3	4 000	4.00	
4	1 000	5.00	

在表 3.16 和表 3.17 规定的限制内,管理层决定每一种级别的产品生产数量和每一种级别的产品所使用的混合的原材料。目标是每周的净收益最大化(全部的销售收入减去熔合成本),不包括被赠与的每周的固定处理成本 30 000 美元。

线性规划问题的建模

在试图建立线性规划模型前,我们必须仔细考虑决策变量的适当定义。尽管这些定义有时候是显而易见的,有时候成了整个建模的关键所在。在清楚地认识了什么样的信息是真正所需要的以后,大多数惯例是通过决策变量的方式来传递这些信息。在这些决策变量的基础上,我们能够建立目标函数和约束。

在这个特定问题中,对决策制订进行了详细定义,但是以何种方式适当表达这些信息可能需要认真考虑(尝试一下,看看你会不会得出下面的错误决策变量)。

因为某个决策是每一个级别的产品产量,自然会得出这个决策变量。沿着这一思路,我们定义

$$y_i = \text{每个产品级别 } i \text{ 每周生产的磅数 } (i = A, B, C)。$$

另一个决策是每一种级别的产品所使用原材料的混合,这种混合通过材料在每一种级别产品中的比例来确定,从而定义另一个决策变量为

$$z_{ij} = \text{产品级别 } i \text{ 中材料 } j \text{ 的比例 } (i = A, B, C; j = 1, 2, 3, 4)。$$

然而表 3.17 给出了处理成本与材料可应用的数量而不是比例,因此需要在一些约束中记录相关定量信息。对于材料 j ($j = 1, 2, 3, 4$),每周使用的材料 j 的磅数 $= z_{Aj}y_A + z_{Bj}y_B + z_{Cj}y_C$ 。

例如,由于表 3.17 表明材料 1 的可用量是每周 3 000 磅,模型中的一个约束将是

$$z_{A1}y_A + z_{B1}y_B + z_{C1}y_C \leq 3\,000$$

不幸的是,它不是一个规范合理的线性规划约束形式。左边的表达式不是一个线性函数,因为它含有变量的二次项。因此使用这些决策变量不能建立一个线性规划模型。

幸运的是,有另一种方法定义决策变量,将满足线性规划模型的格式(你知道怎样做吗?)。它的完成仅仅需要重新定义旧决策变量为单个的决策变量,换句话说,定义

$$x_{ij} = z_{ij}y_i \quad (i = A, B, C; j = 1, 2, 3, 4) \text{ 每周分配给产品级别 } i \text{ 的材料 } j \text{ 的磅数。}$$

然后我们令 x_{ij} 为决策变量。将 x_{ij} 以不同的方式结合产生下面的模型中需要的数量 ($i = A, B, C; j = 1, 2, 3, 4$)。

$$x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i4} = \text{每周生产的产品级别 } i \text{ 的磅数。}$$

$$x_{Aj} + x_{Bj} + x_{Cj} = \text{每周使用的材料 } j \text{ 的磅数。}$$

$$\frac{x_{ij}}{x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i4}} = \text{产品级别 } i \text{ 中材料 } j \text{ 所占的比例。}$$

事实上,最后的表达式是一个不会导致复杂性的非线性函数。例如,考虑表 3.16 级别 A 产品第一个规定(材料 1 的比例应该不超过 30%)。这个限制给出了非线性的约束

$$\frac{x_{A1}}{x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}} \leq 0.3$$

然而,通过在等式两边都乘以分式的分母得到

$$x_{A1} \leq 0.3(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4})$$

因此

$$0.7x_{A1} - 0.3x_{A2} - 0.3x_{A3} - 0.3x_{A4} \leq 0$$

是一个合理的线性规划约束形式。

调整之后,上面三个给出的数量直接推出了模型中需要的所有约束。目标函数是以最大化每周的三个级别的产品净收益的管理目标为基础的(全部的销售收入减去全部的熔合成本)。这样,对于每一个级别的产品,每一磅的利润是从表 3.16 第四列给出的销售价格中减去表 3.16 第三列给出的熔合成本。这些差值提供了目标函数的参数。

因此完整的线性规划模型是

$$\begin{aligned} \max Z = & 5.5(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) + 4.5(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4}) \\ & + 3.5(x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} + x_{C4}) \end{aligned}$$

受限于下面的约束:

1. 规定的混合物(表 3.16 第二列)

$$x_{A1} \leq 0.3(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) \quad (\text{A 级,材料 1})$$

$$x_{A2} \geq 0.4(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) \quad (\text{A 级,材料 2})$$

$$x_{A3} \leq 0.5(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) \quad (\text{A 级,材料 3})$$

$$x_{A4} = 0.2(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) \quad (\text{A 级,材料 4})$$

$$x_{B1} \leq 0.5(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4}) \quad (\text{B 级,材料 1})$$

$$x_{B2} \geq 0.1(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4}) \quad (\text{B 级,材料 2})$$

$$x_{B4} = 0.1(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4}) \quad (\text{B 级,材料 4})$$

$$x_{C1} \leq 0.7(x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} + x_{C4}) \quad (\text{C 级,材料 1})$$

2. 材料的可用量(表 3.17 的第二列)

$$x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} \leq 3\,000 \quad (\text{材料 1})$$

$$x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} \leq 2\,000 \quad (\text{材料 2})$$

$$x_{A3} + x_{B3} + x_{C3} \leq 4\,000 \quad (\text{材料 3})$$

$$x_{A4} + x_{B4} + x_{C4} \leq 1\,000 \quad (\text{材料 4})$$

3. 处理量的约束(表 3.17 的右侧)

$$x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} \geq 1\,500 \quad (\text{材料 1})$$

$$x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} \geq 1\,000 \quad (\text{材料 2})$$

$$x_{A3} + x_{B3} + x_{C3} \geq 2\,000 \quad (\text{材料 3})$$

$$x_{A4} + x_{B4} + x_{C4} \geq 500 \quad (\text{材料 4})$$

4. 处理成本的约束(表 3.17 的右侧)

$$\begin{aligned} 3(x_{A1} + x_{B1} + x_{C1}) + 6(x_{A2} + x_{B2} + x_{C2}) + 4(x_{A3} + x_{B3} + x_{C3}) \\ + 5(x_{A4} + x_{B4} + x_{C4}) = 30\,000 \end{aligned}$$

5. 非负约束

$$x_{A1} \geq 0, \quad x_{A2} \geq 0, \quad \dots, \quad x_{C4} \geq 0$$

模型建立完成, 还需要重写混合物规定的约束条件, 将所有的决策变量移至等式的左边, 成为线性规划模型的正确形式。

混合物规定:

$$\begin{aligned} 0.7x_{A1} - 0.3x_{A2} - 0.3x_{A3} - 0.3x_{A4} &\leq 0 && \text{(A级, 材料 1)} \\ -0.4x_{A1} + 0.6x_{A2} - 0.4x_{A3} - 0.4x_{A4} &\geq 0 && \text{(A级, 材料 2)} \\ -0.5x_{A1} - 0.5x_{A2} + 0.5x_{A3} - 0.5x_{A4} &\leq 0 && \text{(A级, 材料 3)} \\ -0.2x_{A1} - 0.2x_{A2} - 0.2x_{A3} + 0.8x_{A4} &= 0 && \text{(A级, 材料 4)} \\ 0.5x_{B1} - 0.5x_{B2} - 0.5x_{B3} - 0.5x_{B4} &\leq 0 && \text{(B级, 材料 1)} \\ -0.1x_{B1} + 0.9x_{B2} - 0.1x_{B3} - 0.1x_{B4} &\geq 0 && \text{(B级, 材料 2)} \\ -0.1x_{B1} - 0.1x_{B2} - 0.1x_{B3} + 0.9x_{B4} &= 0 && \text{(B级, 材料 4)} \\ 0.3x_{C1} - 0.7x_{C2} - 0.7x_{C3} - 0.7x_{C4} &\leq 0 && \text{(C级, 材料 1)} \end{aligned}$$

这个模型的最优解见表 3.18。这些 x_{ij} 的值, 用来计算其他表中给出的利润值。目标函数的最优结果是 $Z=35\,109.65$ (一周的全部利润是 35 109.65 美元)。

表 3.18 SAVE-IT 公司问题的最优解

等 级	每周可获得的磅数				每周生产的 数量/磅
	材 料				
	1	2	3	4	
A	412.3 (19.2%)	859.6 (40%)	447.4 (20.8%)	429.8 (20%)	2149
B	2 587.7 (50%)	517.5 (10%)	1 552.6 (30%)	517.5 (10%)	5 175
C	0	0	0	0	0
总计	3 000	1 377	2 000	947	

SAVE-IT 公司问题是一个混合问题 (blending problem) 的例子。一个混合问题的目标是在满足特定规格的情况下, 求出最终产品成分的最佳组合比例。线性规划问题的最早应用是汽油混合, 石油成分混合比例的不同, 得到不同级别的汽油产品。其他最终产品的混合问题包括钢材、化肥和动物饲料。

人员安排

联合航空公司 (UNION AIRWAYS) 正在增加更多航班来往于中心机场, 因此它需要雇用额外的客户经理。然而, 应该雇用多少还不是十分清楚。当提供给顾客的服务达到某个满意级别时, 管理层同时认识到成本控制的必要性。因此运筹小组研究怎样以最小的人力成本提供满意的客户服务的规划。

在新的航班计划的基础上, 分析制订最小数量的客户经理在不同的时间值班以使服务水平达到某个满意程度。表 3.19 最右边的一列表示在第一列给出的时间段内需要的客户经理的数量。

表 3.19 联合航空公司的时序安排问题数据

等 级	覆盖的时间段					需要客户经理的最少数
	班 次					
	1	2	3	4	5	
早上 6:00~上午 8:00	✓					48
上午 8:00~上午 10:00	✓	✓				79
上午 10:00~中午 12:00	✓	✓				65
中午 12:00~下午 14:00	✓	✓	✓			87
下午 14:00~下午 16:00		✓	✓			64
下午 16:00~下午 18:00			✓	✓		73
下午 18:00~晚上 20:00			✓	✓		82
晚上 20:00~晚上 22:00				✓		43
晚上 22:00~午夜 24:00				✓	✓	52
午夜 24:00~早上 6:00					✓	15
每项代理的日常花费/美元	170	160	175	180	195	

表中的其他输入反映了公司现在与客户经理之间的合同中的条款。这一条款是每位经理每周 5 天 8 小时的轮班替换。被许可的轮班如下。

第 1 班：早上 6:00~下午 14:00

第 2 班：上午 8:00~下午 16:00

第 3 班：中午~晚上 20:00

第 4 班：下午 16:00~午夜

第 5 班：晚上 22:00~早上 6:00

表 3.19 中的“✓”表示各轮班所包含的时间。因为很多人都不喜欢某些轮班，故合同里规定的轮班薪水不一样。对于每一个轮班，每人每天的补助(包括收益)在底下一行列出。问题是每天应该指派多少经理给各轮班从而使总的人力成本最小化。在最底下一行的基础上，满足或超过最右列的服务需求。

建立线性规划模型

线性规划问题一直以来都包括求解活动的最佳组合。建立这个特定问题的模型的关键是认识活动的实质。

应用案例

在航空产业中，企业生存的根本是成本控制。因此联合航空公司的高层管理者发起了一项运筹学研究，试图通过将工作日程与顾客需求更加紧密地结合起来，以改进航空公司预定办公室员工及机场员工的有效利用。1 天 24 小时中，在每个特定区域需要提供服务的雇员数量的变化非常大，甚至可能每隔半小时均会产生巨大的波动。

为了更有效地满足服务需求，试图为所有员工设计某一地点的工作时间安排可以说是一场噩梦。一旦某个员工到达某一地点，除了进餐或者每两个小时的短暂休息，他将在该处连续工作直到开始整个轮换(2~10 个小时，取决于员工本身)。给定 24 小时期间每半小时需要的最小员工数量(每周来说，每天均会有小的变化)，需要决定每次轮换期间有

多少员工应该开始工作,并且每周每天24小时中开始工作的时间是几点?很不幸,线性规划模型使这种组合的噩梦更加可怕。对于一些地点的工作时间安排,线性规划模型包含的决策变量超过了2万个。

线性规划的应用获得了企业方的信任,联合航空公司每年仅从工资和津贴中就会节约600万美元的成本。其他的好处包括改进了顾客服务并减少了支持部门员工的工作量。

资料来源: T. J. Holloran and J. E. Bryne, "United Airlines Station Manpower Planning System," *Interfaces*, 16(1): 39-50, Jan-Feb. 1986. (以下网址提供本文的链接: www.mhhe.com/hillier.)

活动是指轮班,每一个活动的级别是指派给活动的客户经理的数量。这样,这个问题包括找到轮班数量的最佳组合。因此决策变量是活动的级别,这里的5个决策变量为

x_j 表示指派给轮班 j 的客户经理的数量, $j=1,2,3,4,5$

这些决策变量值的主要约束是每一个时间段工作的客户经理的数量必须满足表3.19最右边一列给定的最小需求。例如,下午14:00~16:00,包含此时间段的轮班服务机构的总数必须至少满足64(第2班和第3班),因此

$$x_2 + x_3 \geq 64$$

是这一时间段的约束函数。

因为目标是最小化指派给5班的服务机构的总成本,目标函数的参数在表3.19的最后一行给出。

因此,完成线性规划模型如下

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = 170x_1 + 160x_2 + 175x_3 + 180x_4 + 195x_5 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 \geq 48 \quad (\text{早上 6:00} \sim \text{上午 8:00}) \\ & x_1 + x_2 \geq 79 \quad (\text{上午 8:00} \sim \text{上午 10:00}) \\ & x_1 + x_2 \geq 65 \quad (\text{上午 10:00} \sim \text{中午}) \\ & x_1 + x_2 + x_3 \geq 87 \quad (\text{中午} \sim \text{下午 14:00}) \\ & \quad x_2 + x_3 \geq 64 \quad (\text{下午 14:00} \sim \text{下午 16:00}) \\ & \quad \quad x_3 + x_4 \geq 73 \quad (\text{下午 16:00} \sim \text{下午 18:00}) \\ & \quad \quad \quad x_3 + x_4 \geq 82 \quad (\text{下午 18:00} \sim \text{晚上 20:00}) \\ & \quad \quad \quad \quad x_4 \geq 43 \quad (\text{晚上 20:00} \sim \text{晚上 22:00}) \\ & \quad \quad \quad \quad \quad x_4 + x_5 \geq 52 \quad (\text{晚上 22:00} \sim \text{午夜}) \\ & \quad \quad \quad \quad \quad \quad x_5 \geq 15 \quad (\text{午夜} \sim \text{早上 6:00}) \end{aligned}$$

且 $x_j \geq 0, j=1,2,3,4,5$

如果眼光敏锐,你可能注意到第3个约束 $x_1 + x_2 \geq 65$,因为第2个约束 $x_1 + x_2 \geq 79$ 使 $x_1 + x_2$ 一定大于65,而使其变得没有必要。因此 $x_1 + x_2 \geq 65$ 是可以被删除的多余约束。同样,第6个约束 $x_3 + x_4 \geq 73$ 也是一个多余约束,因为第7个约束 $x_3 + x_4 \geq 82$ (实际上,非负约束 $x_1 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$ 也是多余的约束,因为第1个、第8个、第10个约束函数 $x_1 \geq 48, x_4 \geq 43, x_5 \geq 15$,但是删除这3个约束不会获得计算上的简化)。

这个模型的最优解是 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (48, 31, 39, 43, 15)$, 最优值 $Z = 30\ 610$, 日人力成本是 30 610 美元。

这个问题是一个不满足线性规划的可分割性假设的例子。每一班指派的客户经理要求是一个整数。严格地说, 模型应该有一个额外的约束, 即规定每一个决策变量必须是一个整数值。增加这个条件将使问题线性规划模型转化为整数规划模型(将在第 11 章介绍的主要内容)。

如果没有这些约束, 上面给出的最优解也被证明是整数解, 因此包含这些约束并不会造成麻烦(约束函数的形式使这个结果成为最可能的结果)。如果一些决策变量已经被证实是非整数解, 最简单的方法是取近似整数值(对于这个例子近似取值是可行的, 所有的约束函数都是具有非负参数的大于等于的形式)。近似取值不能保证获得线性规划模型的最优解, 但是它所产生的误差在大多数实际情况中是可以忽略的。另一种方法则是, 利用第 11 章所讲述的整数规划方法来求精确的最优整数值解。

本节的第二个应用案例描述了联合航空公司应用线性规划建立了一个职员的工作安排系统, 它较本例的规模要大得多。

分销网络货物分配

问题

DISTRIBUTION 公司将在两个不同的工厂生产同样的新产品, 然后产品必须被运往两个仓库, 货物可从工厂运往任一仓库。可用运输产品的运输网络如图 3.13 所示。其中 F1 和 F2 是两个工厂, W1 和 W2 是两个仓库。DC 是一个分销。从 F1 和 F2 运出的新产品数量由它的左边表示, W1 和 W2 接受的数量由它的右边表示。每一个带箭头的线段代表一个运输路线, 这样, 从 F1 运输到 W2 有三条可行的路线($F1 \rightarrow DC \rightarrow W2$, $F1 \rightarrow$

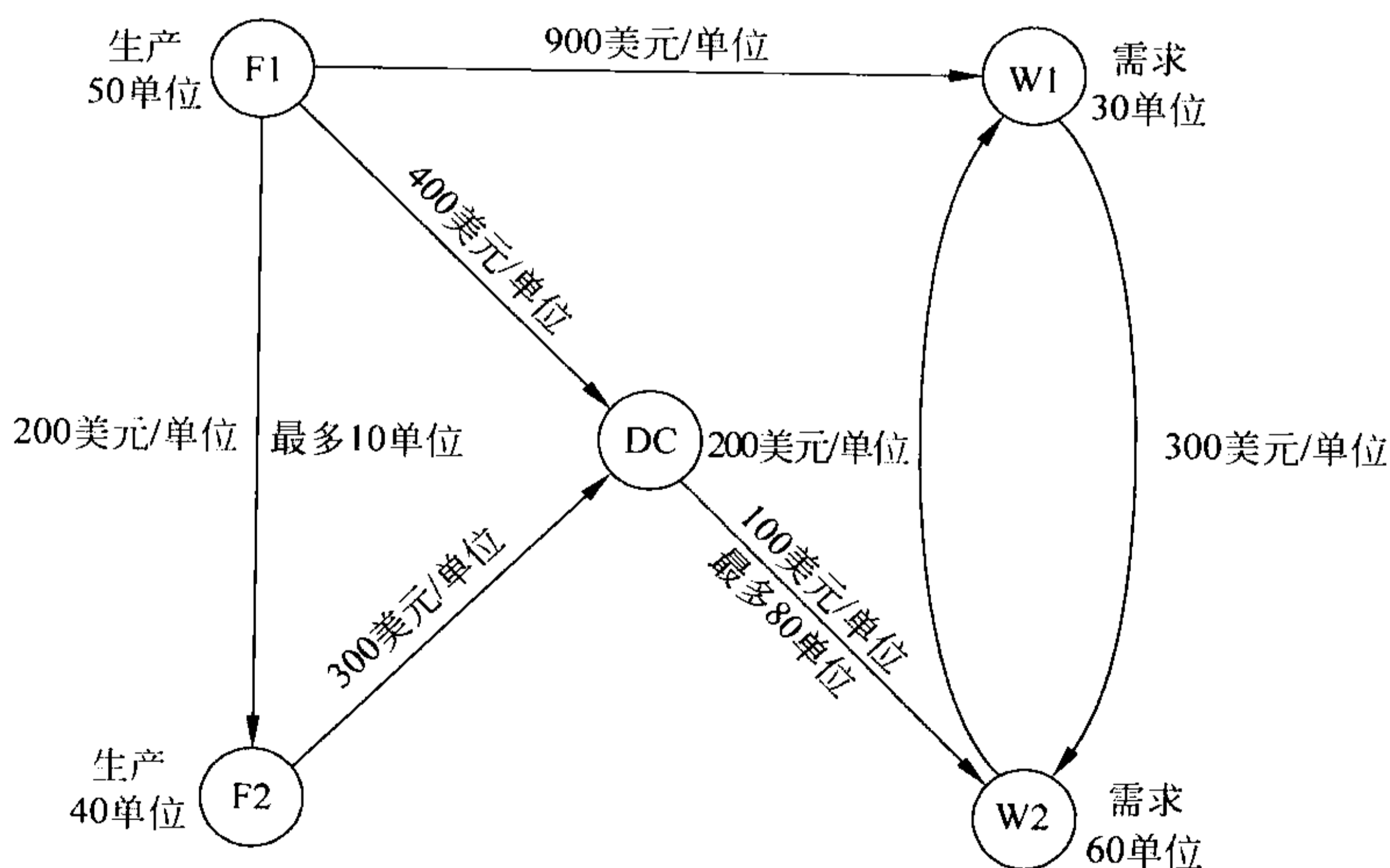


图 3.13 Distribution 公司的配送网络

$F2 \rightarrow DC \rightarrow W2, F1 \rightarrow W1 \rightarrow W2$); 工厂 F2 仅有一条路线到 W2 ($F2 \rightarrow DC \rightarrow W2$), 有一条路线到 W1 ($F2 \rightarrow DC \rightarrow W2 \rightarrow W1$)。每一条路线运输的单位成本在线段上给出, 在线段 $F1 \rightarrow F2$ 与 $DC \rightarrow W2$ 附近还给出了这些路线的最大运输量。其他路线有足够的运输能力来运输两个工厂生产的货物。

需要制订的决策是关于每一条路线应该运输多少, 目标是总体的运输成本最小化。

线性规划问题的建模

有七条运输路线, 我们需要七个决策变量。

($x_{F1-F2}, x_{F1-DC}, x_{F1-W1}, x_{F2-DC}, x_{DC-W2}, x_{W1-W2}, x_{W2-W1}$) 表示通过各路线的运输量。

关于这些变量的值有一些限制, 除了非负限制之外, 有两个上限约束 $x_{F1-F2} \leq 10$, $x_{DC-W2} \leq 80$, 是对应于两条路线 $F1 \rightarrow F2$ 与 $DC \rightarrow W2$ 的运输能力限制。其他全部的约束来自五个位置的五个网络流约束, 这些约束有下面的形式。

每一个位置的网络流约束: 运出量 - 运入量 = 需求量

如图 3.13 所示, 这些需求量分别是 F1 为 50, F2 为 40, W1 为 -30, W2 为 -60。

DC 的需求量是多少? 工厂生产的所有货物是仓库的最终需求。因此, 从分销中心运输到仓库的货物总量, 应该等于从工厂运输到分销中心的数量。换句话说, 这两个运输量(网络流量约束的需求量)的差应该是零。

由于目标是最小化总的运输成本, 目标函数的参数直接来自图 3.13 给出的单位运输成本。因此通过使用百美元/单位作为货币单位, 完成的线性规划模型如下

$$\begin{aligned} \min Z = & 2x_{F1-F2} + 4x_{F1-DC} + 9x_{F1-W1} + 3x_{F2-DC} + x_{DC-W2} \\ & + 3x_{W1-W2} + 2x_{W2-W1} \end{aligned}$$

受限于下列约束:

1. 网络流约束

$$\begin{aligned} x_{F1-F2} + x_{F1-DC} + x_{F1-W1} & = 50 \quad (\text{工厂 1}) \\ -x_{F1-F2} + x_{F2-DC} & = 40 \quad (\text{工厂 2}) \\ -x_{F1-DC} - x_{F2-DC} + x_{DC-W2} & = 0 \quad (\text{分销中心}) \\ -x_{F1-W1} + x_{W1-W2} - x_{W2-W1} & = -30 \quad (\text{仓库 1}) \\ -x_{DC-W2} - x_{W1-W2} + x_{W2-W1} & = -60 \quad (\text{仓库 2}) \end{aligned}$$

2. 上限约束

$$x_{F1-F2} \leq 10, \quad x_{DC-W2} \leq 80$$

3. 非负约束

$$\begin{aligned} x_{F1-F2} \geq 0, \quad x_{F1-DC} \geq 0, \quad x_{F1-W1} \geq 0, \quad x_{F2-DC} \geq 0, \quad x_{DC-W2} \geq 0, \\ x_{W1-W2} \geq 0, \quad x_{W2-W1} \geq 0 \end{aligned}$$

你将在 9.6 节再次看到这一问题, 我们将在该节主要论述这一类线性规划问题(称为最小成本流问题), 在 9.7 节, 我们将求最优解

$$(x_{F1-F2}, x_{F1-DC}, x_{F1-W1}, x_{F2-DC}, x_{DC-W2}, x_{W1-W2}, x_{W2-W1}) = (0, 40, 10, 40, 80, 0, 20)$$

总的运输成本是 49 000 美元。



3.5 使用电子表格建立和求解线性规划模型

电子表格工具软件(例如 Excel)是分析和求解小型线性规划模型的流行工具。线性规划模型的主要特征包括它的参数,都能够很容易地输入电子表格。然而,数据表格软件能够起比显示数据更大的作用。如果我们添加更多的附加信息,能够通过数据表格分析潜在的解。例如,可以检查一个潜在解是否可行,能够得到什么样的 Z 值(利润和成本)。电子表格的能力在于能够立即揭示在求解过程中由于变化所带来的结果。

另外,Excel 求解工具能够迅速应用单纯形法找到模型的最优解。本节后面的部分将详细描述怎样求解。

为了展示在电子表格上建立和求解线性规划模型的过程,现在我们回到 3.1 节 Wyndor Glass 公司的例子。

在电子表格上建立模型

图 3.14 是从表 3.1 将数据转入电子表格的图示(列 E、F 保留在下面描述的输入中),显示了 Wyndor Glass 公司问题。显示数据的单元称为**数据单元格**(data cells),在图中以阴影形式表示以区别于其他单元。^①

	A	B	C	D	E	F	G
1	Wyndor Glass Co. Product-Mix Problem						
2							
3			Doors	Windows			
4		Profit Per Batch	\$3,000	\$5,000			
5							Hours
6			Hours Used Per Batch Produced				Available
7		Plant 1	1	0			4
8		Plant 2	0	2			12
9		Plant 3	3	2			18

图 3.14 Wyndor Glass 公司问题中,表 3.1 的数据经过转化形成的最初电子数据表

后面你将看到电子表格通过使用排列名将容易理解。排列名是赋予给定列单元的**描述名**(range name),使人能立即识别。这样,Wyndor Glass 公司问题的数据单元被赋予排列名 UnitProfit(C4: D4),HoursUsedPerBatchProduced(C4: D9)和 HoursAvailable(G7: G9)。注意在排列名中不能使用空格,每一个新的排列名用大写字母开头,尽管是任选的,给定单元的范围排列名在紧随名称的括号内说明(例如,排列 C7: D9 是 Excel 中从 C7 到 D9 的范围简写,即列 C、列 D 的 7 行、8 行、9 行)。为了输入一个排列名,首先选择数据单元的范围,然后从 Insert 菜单选择 Name\Define,再敲入排列名(或者点击数据表格上方公式栏左边的 Name 按钮,并输入名称)。

^① 使用格式工具栏中的边界按钮与颜色按钮来添加边界和单元或者通过从格式菜单中选择边界标签与模型标签来选择。

应用案例

Welch 有限公司是世界上最大的康科德和尼亚加拉葡萄的加工厂。很多年以来, Welch 牌葡萄肉冻和 Welch 牌葡萄汁一直受到美国消费者的欢迎。

每年 9 月,农场主开始将葡萄送到加工厂,再将未加工的葡萄压榨成汁。在葡萄汁可以制成成品果酱、果冻、果汁、浓缩物之前,这些工作必须完成。

在需求不断变化并且收成质量和数量均不确定时,如何处理收获的葡萄是一项复杂的工作。需要的决策包括对于主要的产品类型应该使用哪种制作方法,在各工厂之间的运输量是多少,运输方式的选择等。

由于 Welch 公司没有优化原材料运输和制作方法的正式系统,运筹团队为该公司开发了一套最初版本的线性规划模型。该模型有 8 000 个决策变量,关注每种葡萄的成分。小规模的经验证明创建模型是有效的。

为了使模型发挥更大的作用,该运筹团队对模型进行了修改,摒弃按葡萄成分分组的做法,现在通过产品分组来聚类需求。这一改变减少了模型的规模,决策变量仅有 324 个,函数约束仅有 361 个。接着,该小组在一个电子表格上实现了该模型。

1994 年以来,Welch 公司每个月均会运行这个不断升级的电子表格模型,并且将求解器得到的最优物流计划提供给高层管理者。仅仅在应用的第一年,应用该模型就大约节省了近 15 万美元。将线性规划模型与电子表格结合起来的一个主要优势是能够向数学理解能力不同的管理者解释该模型。由于该案例和其他成功应用,运筹学方法受到了更为广泛的赞赏。

资料来源: E. W. Schuster and S. J. Allen, "Raw Material Management at Welch's, Inc.," *Interfaces*, 28 (5): 13-24, Sept.-Oct. 1998. (以下网址提供本文的链接: www.mhhe.com/hillier.)

开始使用数据表格建立问题的线性规划模型时,有三个问题需要回答。

1. 需要制订什么决策? 对于这个问题,必须的决策是两个新产品的生产率(每周生产的批数)。

2. 这些决策的约束是什么? 这里的约束是两个产品在各自工厂生产时,每周使用的生产时间的小时数不能超过可应用的小时数。

3. 执行这些决策的总体绩效度量是什么? Wyndor Glass 公司的总体绩效度量是使每周生产的两种产品的总利润最大,因此目标函数是最大化这个量。

图 3.15 显示了这些答案是怎样被包含在电子表格中的。在第一个答案的基础上,两个产品的生产率被放在数据单元 C12 和 D12 列数据单元下,因为尚不知道这些产品的生产率,在当前点它们被以 0 输入(事实上,任何试验解都能够输入,尽管负的生产率应该排除,因为它们是不合理的)。然后,当求解最优生产率组合时这些列的数字将发生变化。因此,这些包含决策的单元称为可变化单元格(changing cells)(或称可调整单元)。为了突出可变化单元,它们被用阴影表示并且加有边界(在运筹学课程软件的电子表格文件中,这些可变单元格在彩色显示屏上呈亮黄色)。这些可变化的单元被命名为 BatchesProduced(C12 : D12)。

	A	B	C	D	E	F	G
1	Wyndor Glass Co. Product-Mix Problem						
2							
3			Doors	Windows			
4		Profit Per Batch	\$3,000	\$5,000			
5					Hours		Hours
6			Hours Used Per Batch Produced		Used		Available
7		Plant 1	1	0	0	≤	4
8		Plant 2	0	2	0	≤	12
9		Plant 3	3	2	0	≤	18
10							
11			Doors	Windows			Total Profit
12		Batches Produced	0	0			\$0

图 3.15 Wyndor Glass 公司问题中,电子数据表显示初始测试解
(两个生产率都为 0)进入了单元格(C12 和 D12)

对于问题 2,将各个工厂生产的两种产品所使用的每周的生产时间输入到相应的数据单元 E7、E8、E9 的右侧。这三个单元的 Excel 等式是

$$E7 = C7 \times C12 + D7 \times D12$$

$$E8 = C8 \times C12 + D8 \times D12$$

$$E9 = C9 \times C12 + D9 \times D12$$

由于这些单元中每一个提供的输出依赖于变化单元(C12 和 D12),它们被称为输出单元格(output cells)。

注意到输出单元的每一个等式均涉及两个产品之和。在 Excel 中有一个函数 SUMPRODUCT,当两个排列有相同的行和列名称时,这个函数将加总每一个单项的产品。每一个加总的产品都是第一排列和第二排列相应位置的项。例如,考虑 C7 : D7 和 C12 : D12,每一个都有一行两列,在此,SUMPRODUCT (C7 : D7, C12 : D12)将用 C7 : D7 相应的单项乘以 C12 : D12 中与之对应的项,然后加总这些单个的产品,正像上面第一个等式表示的一样。使用排列名称 BatchesProduced(C12 : D12)这个公式变成 SUMPRODUCT (C7 : D7, BatchesProduced)。尽管这样的形式是任选的,但是作为对长的输入等式的简化还是方便的。

下面,在数据单元 F7、F8、F9 中输入 ≤ 来表明左边的总值不能超过 G 列相对应的数值。电子表格仍然允许输入不符合 ≤ 符号的试验解。然而,如果 G 列的数值没有变化,≤ 符号可作为试验解被拒绝的一个提示。

最后,第三个问题得到答案,执行的绩效度量标准是两个产品的加总利润,此利润通过单元 G12 被输入。与列 E 的数类似,它是 $G12 = \text{SUMPRODUCT}(C4 : D4, C12 : D12)$ 的总和。

使用排列名 TotalProfit(G12), ProfitPerBatch(C4 : D4), BatchesProduced(C12 : D12),该等式变成

$$\text{TotalProfit} = \text{SUMPRODUCT}(\text{ProfitPerBatch}, \text{BatchesProduced})$$

这是一个使用排列名的很好的例子,使结果等式容易解释。除了需要参考单元 G12、C4 : D4、C12 : D12 以外,这个等式立即揭示了它要做什么。

TotalProfit(G12)是一类特殊的输出单元,当做出产品生产的相关决策时它的值会尽可能大。因此,TotalProfit(G12)被称为**目标单元格(target cell)**。目标单元阴影比可变化单元更黑,有更重的边界以进一步区别。

图 3.16 中的底部概括了所用小时数列和总利润单元格所有需要输入的公式。也给出了所有的排列名和相应的单元格地址。

	A	B	C	D	E	F	G
1	Wyndor Glass Co. Product-Mix Problem						
2							
3			Doors	Windows			
4		Profit Per Batch	\$3,000	\$5,000			
5					Hours		Hours
6			Hours Used Per Batch Produced		Used		Available
7		Plant 1	1	0	0	≤	4
8		Plant 2	0	2	0	≤	12
9		Plant 3	3	2	0	≤	18
10							
11			Doors	Windows			Total Profit
12		Batches Produced	0	0			\$0

Range Name	Cells
BatchesProduced	C12:D12
HoursAvailable	G7:G9
HoursUsed	E7:E9
HoursUsedPerBatchProduced	C7:D9
ProfitPerBatch	C4:D4
TotalProfit	G12

	E
5	Hours
6	Used
7	=SUMPRODUCT(C7:D7,BatchesProduced)
8	=SUMPRODUCT(C8:D8,BatchesProduced)
9	=SUMPRODUCT(C9:D9,BatchesProduced)

	G
11	Total Profit
12	=SUMPRODUCT(ProfitPerBatch,BatchesProduced)

图 3.16 Wyndor Glass 公司问题的电子数据表模型,包括目标单元公式的总利润(G12)和列 E 的输出,其目标是最大化目标单元至此完成了 Wyndor Glass 公司问题的数据表模型

用这个电子表格模型,很容易分析任何产品生产组合的试验解。每一个时间的生产速度被输入 C12 和 D12,Excel 立刻计算出输出单元使用的小时数和利润。然而试验并不是必须的。下面我们将描述使用 Excel Solver 能迅速地发现最优解。

使用 Excel Solver 求解模型

Excel 包含一个 Solver 工具,它使用单纯形法求解最优解。

第一次使用 Solver 时,你需要选择 Excel 的 Add-in 菜单并添加 Solver,之后你将发现它在工具栏上显示出来。

在图 3.16 中,通过设置可变化单元格为 0,开始的任意试验解已经输入。在求解问题后,Solver 会将此改变成最优值。

通过在工具栏选择 Solver 使这个求解过程开始,图 3.17 显示了 Solver 的对话框。在 Solver 开始工作前,需要知道模型的每一个部分在数据表中的位置,Solver 对话框用

来输入这些信息。你可以敲入排列名称、数据单元的地址,或者点击数据表上的单元。^①图 3.17 表示了使用第一个选择的结果。因此 TotalProfit(除了 G12)已经被输入目标单元。BatchesProduced(除了 C12:D12)已经被输入可变化单元。由于目标是最大化目标单元格,所以也选择了 max。

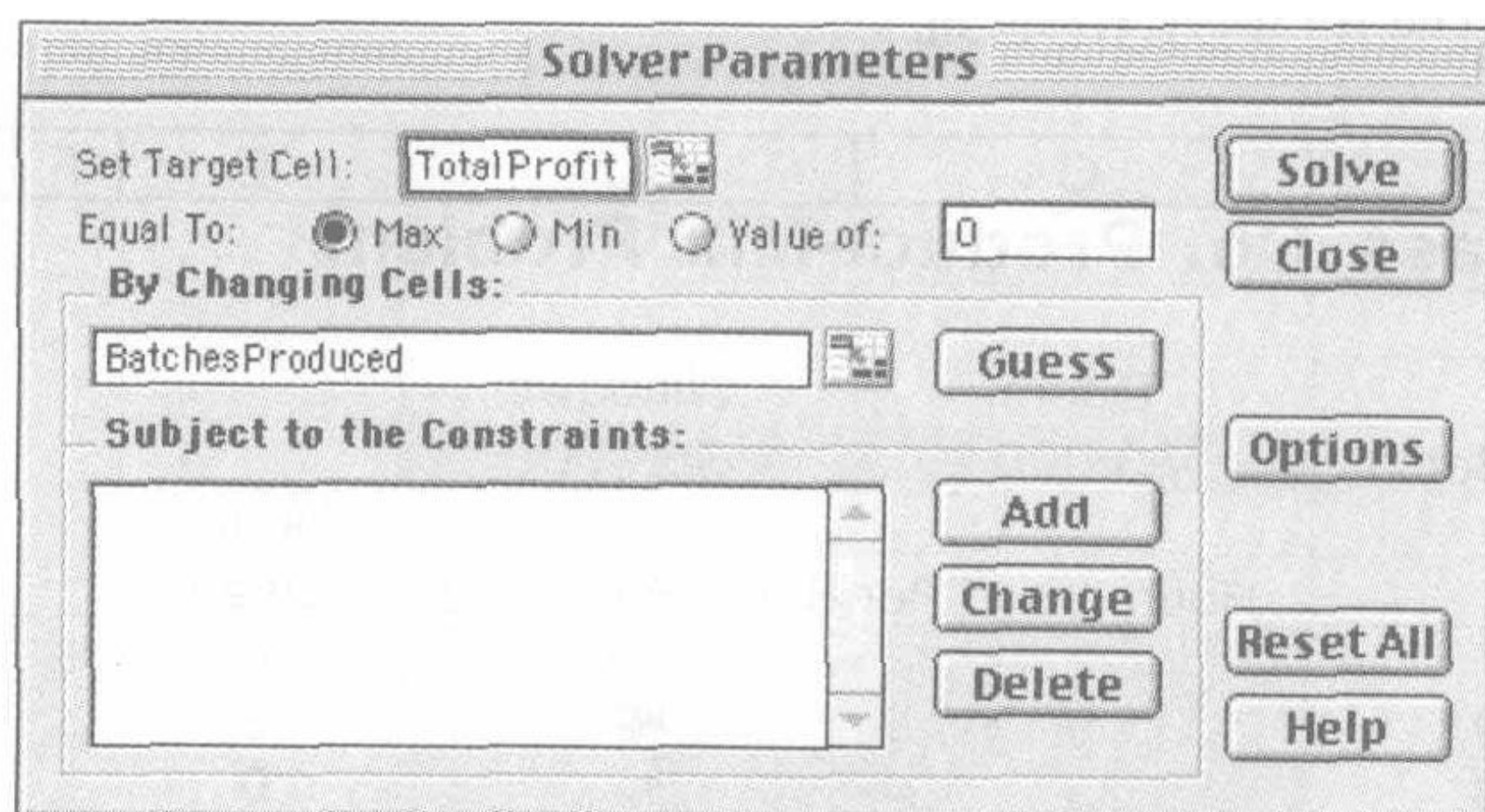


图 3.17 解决问题的对话框指明了图 3.16 中的目标单元和变化的单元,也指明了目标单元是被最大化的

接下来,进行约束函数的单元格的定义,可以通过点击 Solver 对话框中的 Add 按钮来完成。点击后出现如图 3.18 所示的 Add Constrain 对话框。图 3.16 中的单元 F7、F8、F9 内的 \leq 符号是所有单元 HoursUsed(E7:E9)小于或者等于 HoursAvailable(G7:G9)相应单元的检验提示。Solver 通过在 Add Constrain 对话框的左边输入 HoursUsed(E7:E9)、在右边输入 HoursAvailable(G7:G9)来定义这些约束。对这两者之间的符号,有一个菜单可供选择,可以是 \leq (小于等于)、 $=$ (等于)、 \geq (大于等于)。这里选择了 \leq (小于等于)。即使已经通过列 E 预先输入了 \leq (小于等于)符号,也需要做这个选择,因为 Solver 只使用在 Add Constrain 对话框中定义的约束函数。

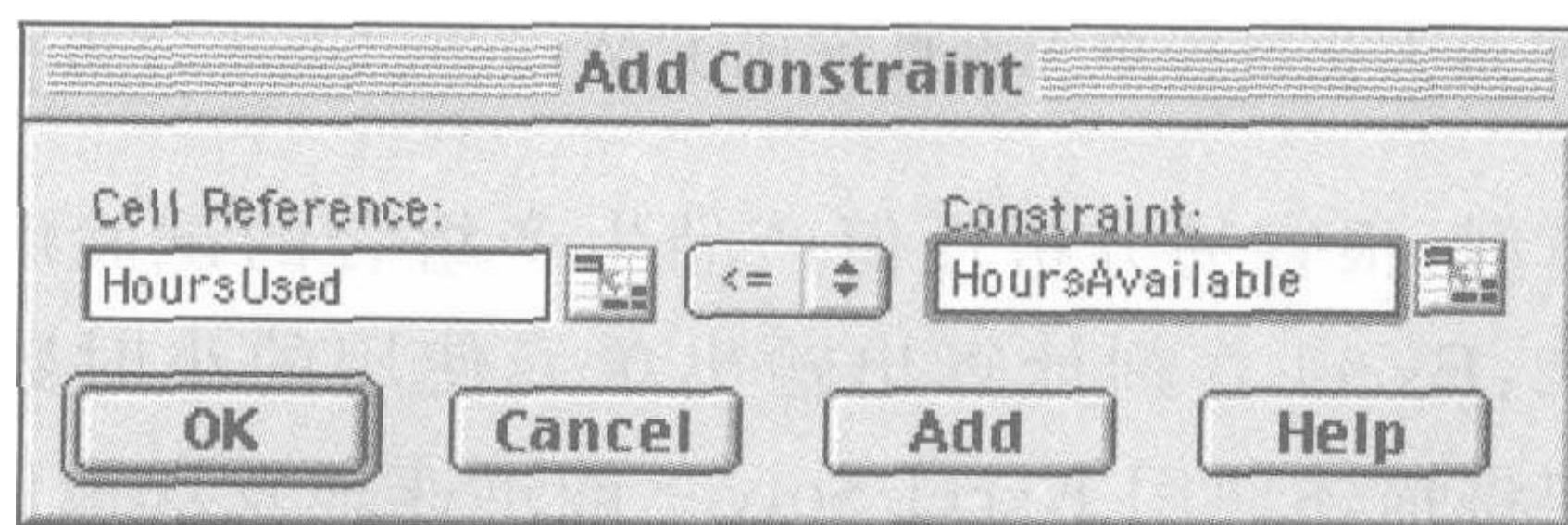


图 3.18 加入一套约束以后的附加约束对话框,所用小时(E7:E9) \leq 所能获得的小时(G7:G9),这说明图 3.16 中单元 E7、E8、E9 分别小于或等于单元 G7、G8、G9

如果需要添加更多的约束函数,可以通过点击 Add 弹出新的 Add Constrain 对话框。由于本例没有更多的约束函数,点击 OK 返回 Solver 对话框。

当前 Solver 对话框表达了图 3.16 中电子表格的所有完整的模型(见图 3.19)。然而,在用 Solver 求解模型前,应该多做一个步骤。点击 Options 按钮,弹出图 3.20。该对

^① 如果你选择点击它们,将首先出现有单元地址和美元符号(如 \$C\$9:\$D\$9)的对话框,你可以忽略美元符号,Solver 将使用排列名代替单元地址和美元符号(如果给定排列的名称已经定义),但是仅限于在加入限制或者关闭或再次打开 Solver 对话框后。

对话框允许定义求解问题的许多任选项。这些选项当中最重要的是 Assume Linear Model 选项和 Assume Non-Negative 选项。确保两个选项呈现如图所示的选择状态。目的是告诉 Solver 该问题是一个线性规划问题,并且可变化单元格是非负约束的,拒绝负的生产率。至于其他选项,选择图中所示的默认值对于小问题是有好处的。点击 OK 按钮返回 Solver 对话框。

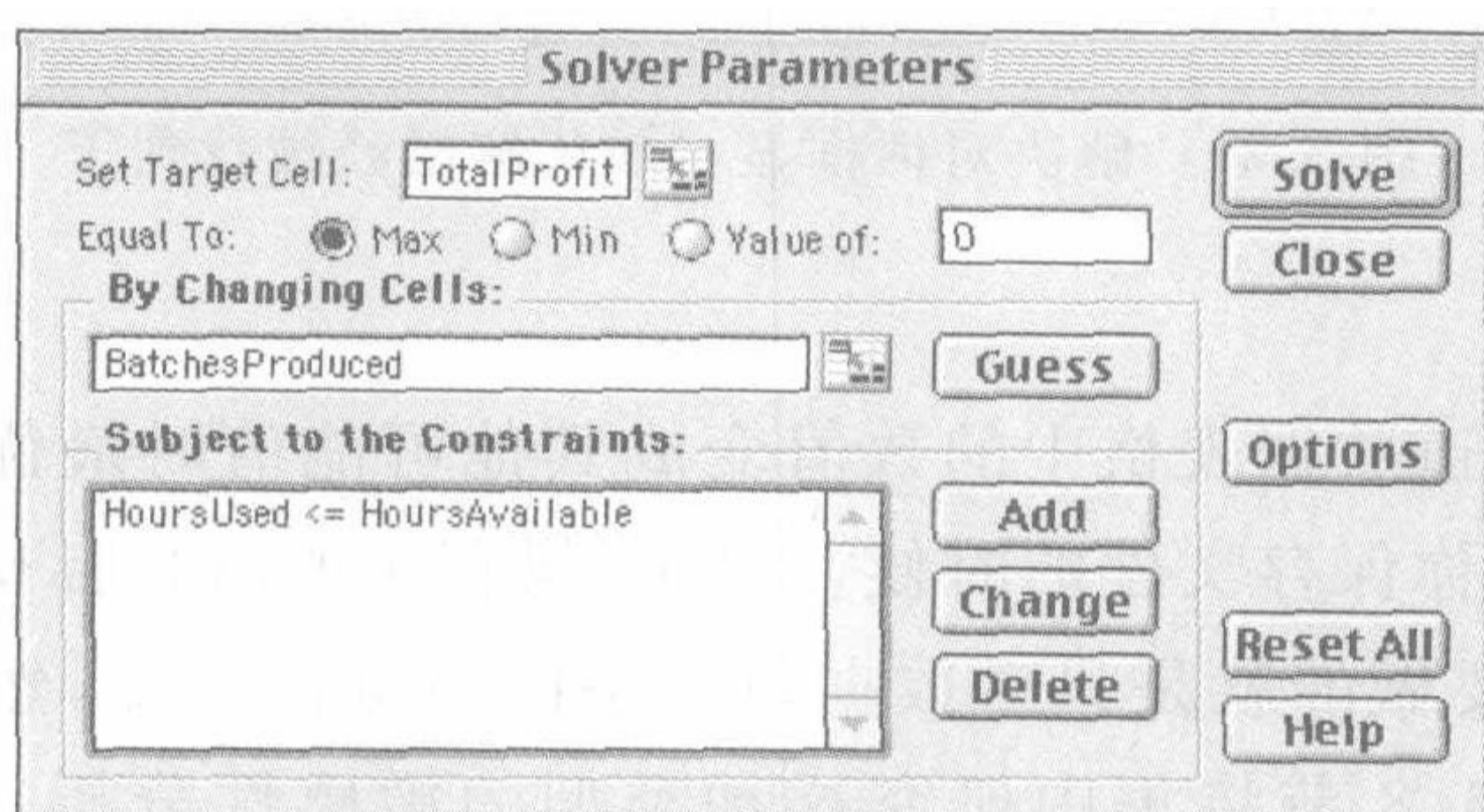


图 3.19 以电子表格的方式指定整个模型显示的 Solver 对话框

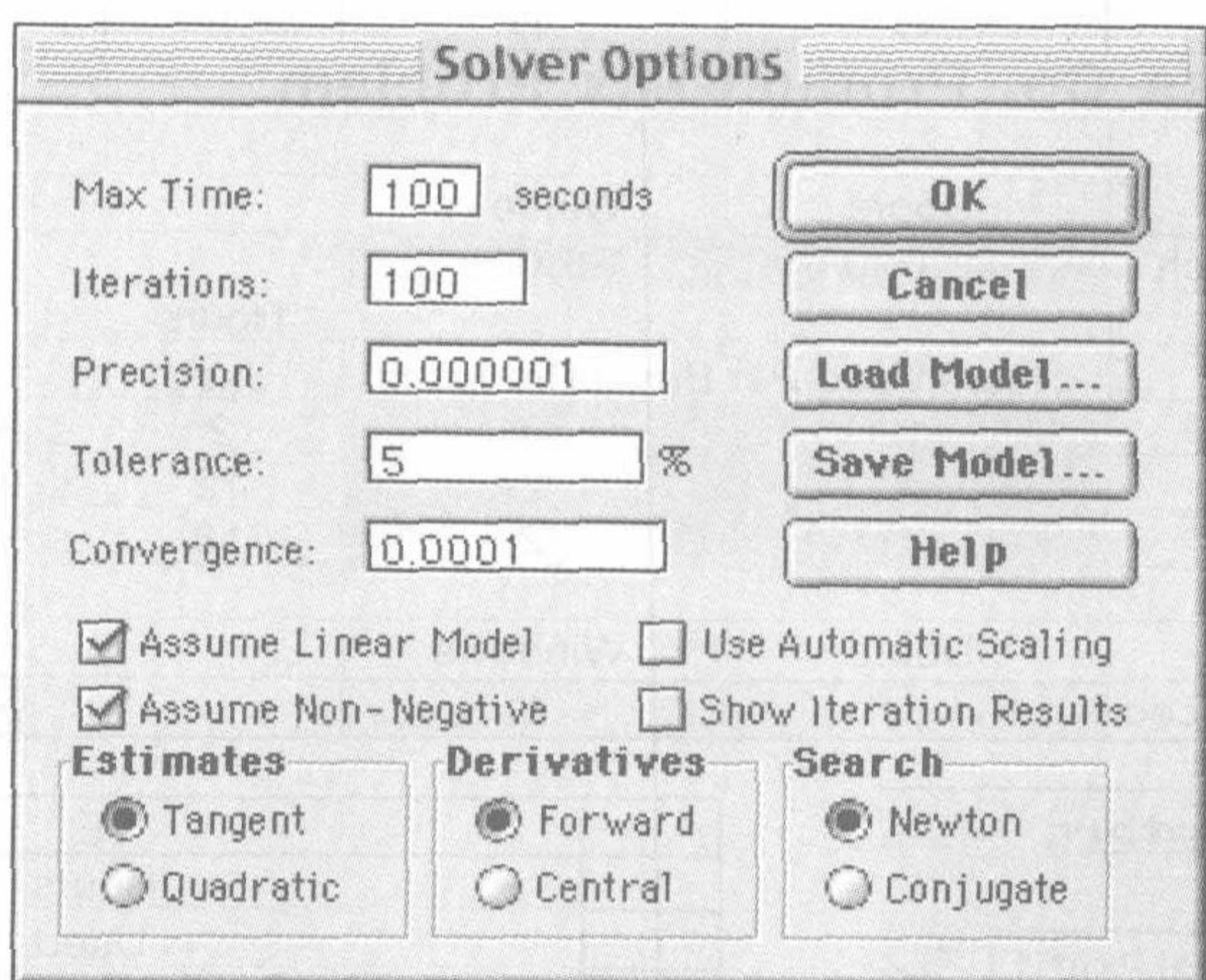


图 3.20 在检查完假定的线性模型和非负选择方案以后的对话框,说明我们想要解决的规划模型没有非负约束

现在准备点击 Solver 对话框中的 Solve,这将开始在后台求解问题的过程。几秒钟之后(对于小问题),Solver 将显示求解的结果。典型地,将显示已经发现一个最优解,正如图 3.21 所示的 Solver Results 对话框显示的一样。如果模型没有可行解或者最优解,替代的对话框将显示“Solver could not find a optimal solution”或者“The Set Cell values do not converge”。对话框还描述了产生不同报告的选项,其中一个(Sensitivity Report)将在后面的 4.7 节和 6.8 节中描述。

求解这个模型后,Solver 将用最优数值替代初始设置值,如图 3.22 所示。最优解是每周生产两批门和六批窗,这与 3.1 节图解法得到的结果是一样的。电子表格在目标单元格中显示了相应的数值(总利润为 38 000 美元/周),也是在输出单元 HoursUsed(E7 :

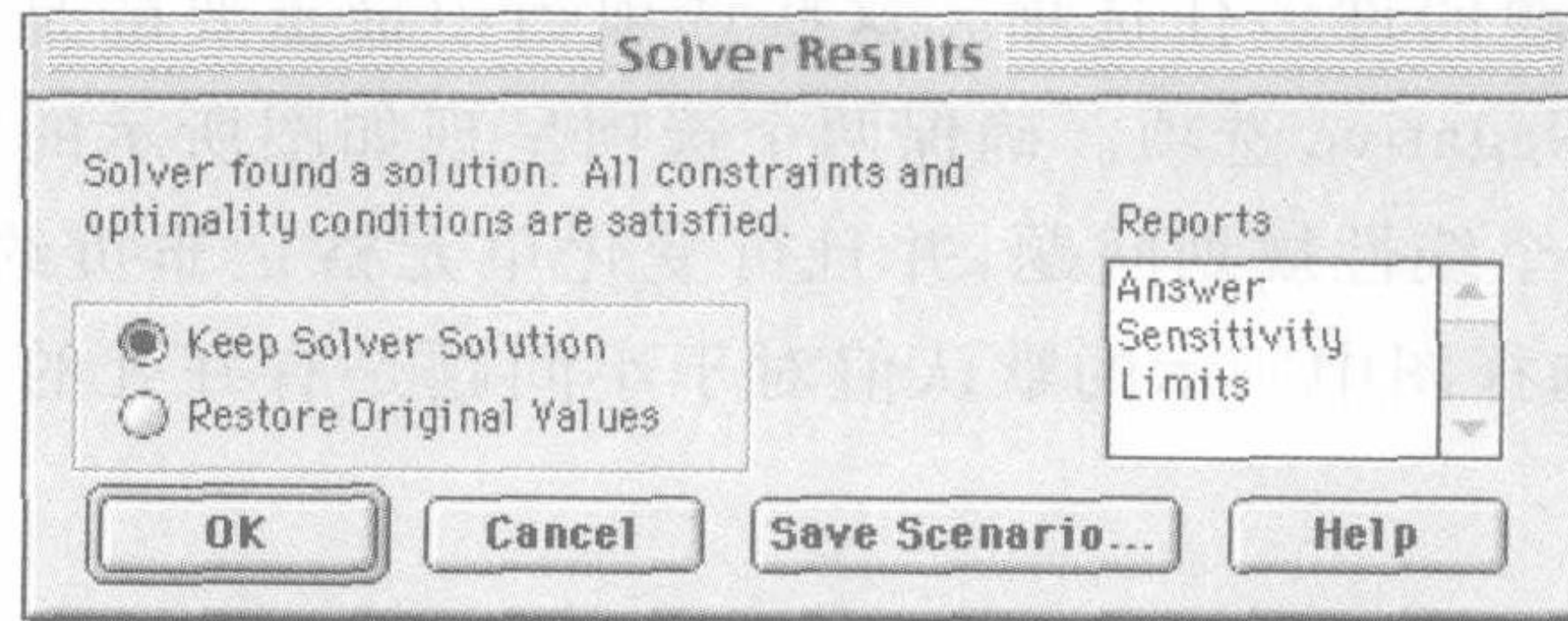
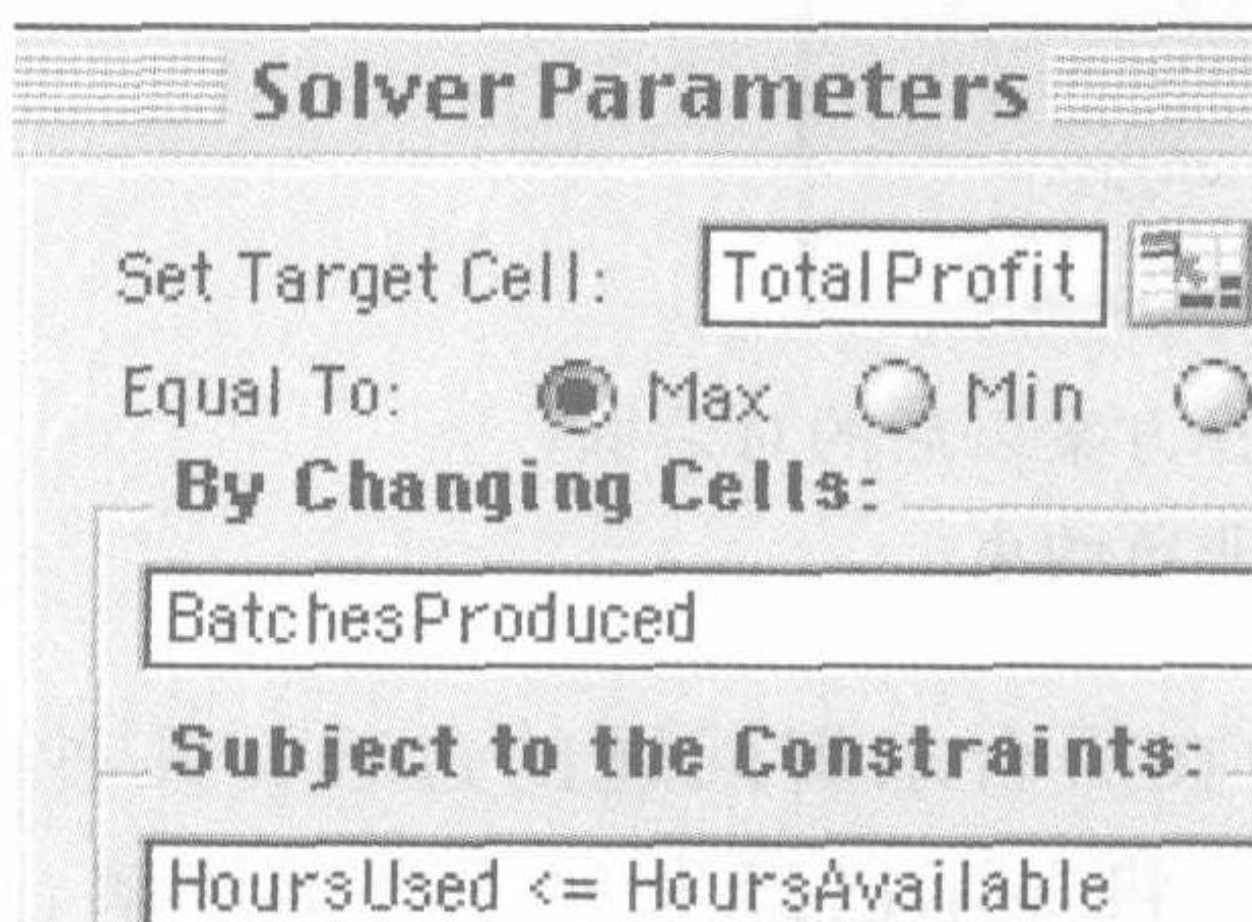


图 3.21 解决对话框显示最优解已经被找到了

E9)的显示数。

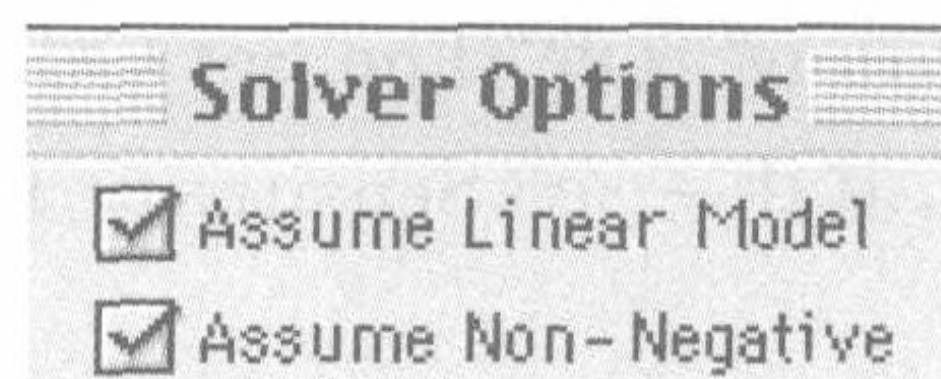
此时,你可能想知道数据表格中的数值变成其他可能值时最优解的变化情况。这一点很容易做到,因为当你保存文件的时候,Solver 保存了所有目标单元格、可变化单元格、约束等的地址。你需要做的就是只对数据单元格的数据作改变,然后点击 Solver 对话框中的 Solve(4.7 节和 6.8 节将集中研究这种类型的敏感性分析,包括怎样用 Solver 的 Sensitivity Report 来加速 what-if 分析)。

	A	B	C	D	E	F	G
1	Wyndor Glass Co. Product-Mix Problem						
2							
3			Doors	Windows			
4		Profit Per Batch	\$3,000	\$5,000			
5					Hours		Hours
6			Hours Used Per Batch Produced		Used		Available
7		Plant 1	1	0	2	≤	4
8		Plant 2	0	2	12	≤	12
9		Plant 3	3	2	18	≤	18
10							
11			Doors	Windows			Total Profit
12		Batches Produced	2	6			\$36,000



	E
5	Hours
6	Used
7	=SUMPRODUCT(C7:D7,BatchesProduced)
8	=SUMPRODUCT(C8:D8,BatchesProduced)
9	=SUMPRODUCT(C9:D9,BatchesProduced)

	G
11	Total Profit
12	=SUMPRODUCT(ProfitPerBatch,BatchesProduced)



Range Name	Cells
BatchesProduced	C12:D12
HoursAvailable	G7:G9
HoursUsed	E7:E9
HoursUsedPerBatchProduced	C7:D9
ProfitPerBatch	C4:D4
TotalProfit	G12

图 3.22 解决 Wyndor Glass 公司问题后得到的电子表格



3.6 建立大型的线性规划模型

线性规划模型有不同的规模。3.1节到3.4节模型的规模从3个约束函数和2个变量(Wyndor Glass公司与放射治疗问题)到17个约束函数和12个决策变量(Save-Ii公司问题)。后面的案例看起来规模更大一些,毕竟写下这样规模的模型要花费大量的时间。通常本书中应用案例的模型规模要大得多,例如3.4节联合航空公司的模型包含超过20000个决策变量。

这类模型的规模并非罕见。实践中的线性规划模型通常总含有几百个到几千个约束,有时甚至有上百万个约束。决策变量的数目通常比约束的个数要多,有时可达数百万个之多。

建立这样大得惊人的模型是令人沮丧的任务。一个中等规模的具有上千个约束函数和上千个决策变量的模型具有超过百万的参数(包括在这些约束里的系数)。为这样的模型写出代数式和填写电子表格中的参数简直是不现实的。

那么,实际中怎样建立这样大规模的模型呢?这需要使用一种建模语言。

建模语言

数学建模语言是一种软件,专门用于有效地设计大的数学模型,包括线性规划模型。即使拥有成千上万个约束函数,它们典型地使用相对很少的类型。相似地,决策变量同样可归结为较少的类别。因此使用数据库中的大量数据,建模语言可用单一表达式同时建立同一类型的所有约束并同时处理每一个类型的变量,不久我们将解释这一过程。

除了有效地建立大规模的模型以外,建模语言将加速大量模型的管理任务,包括数据存取、数据转换成模型参数、任何需要的时候修改模型参数、分析模型的解等。它也可以产生决策制订者内部的总结报告和模型环境的文本。

在过去的几十年里,已经开发了多种优秀的建模语言,包括AMPL、MPL、OPL、GAMS和LINGO。

本书网站提供了上述建模语言之一——数学规划语言(Mathematecal Programming Language, MPL)的学生版及其教学材料,未来若干年将推出更新版本。最新的学生版同样可从以下网站(maximalsoftware.com)下载。MPL是Maximal Software公司的产品,特征之一是广泛支持在MPL中的Excel,包括从MPL既可输入也可输出Excel的列,同样通过OptiMax2000对Excel VBA提供完全支持(本书网站包含OptiMax 2000)。该产品允许使用者将MPL完全融入Excel并应用MPL支持的任何一个强大的求解器(包括CPLEX)求解(见4.8节描述)。

LINGO是LINDO System公司的产品,也是市场上一个被称为What's Best!的数据表格插入式的优化器。它被设计用于大型产业问题以及可被称为子程序的图书馆,或LINDO API。LINGO软件包括一个LINDO软件的子集,在线性规划中被广泛采用。具有LINDO界面的LINGO包含在本书网站中。所有LINDO系统的产品都可从www.lindo.com下载。LINGO的另一个特征是处置包括线性规划模型在内的各类运

筹学问题的灵活性。例如,涉及高度非线性化模型时,它包含一个全面优化器用于找出全局最优解(更多讲述见 12.10 节)。本书这一版最新的 LINGO 建立了一种兼容的程序语言,使在求解不同优化问题时可分别作为一次运行的一个部分,这对进行灵敏度分析特别有用。

本书网站包含 MPL、LNIGO 和 LINDO 对书中每个例子的建模和求解,这些建模语言和优化器基本上均可使用。

现在让我们看一个简单的例子,来解释怎样产生大规模的线性规划模型。

一个拥有巨大模型的问题实例

Worldwide 公司的管理层需要解决一个产品组合问题。这是一个比 3.1 节介绍的 Wyndor Glass 公司产品组合问题大得多的复杂问题。该公司在世界各地有 10 家工厂,每家工厂生产 10 种产品,然后在各自区域销售。未来的 10 个月对每家工厂每种产品的需求(销售潜力)是已知的。尽管在指定的月份一家工厂销售的产品数量不能超过需求,但生产的数量可以很大,需超过库存中存储供下月销售的数量(每月一定的存储成本)。在库存中每单位的一种产品占据同样的库存空间,每家工厂存储的单位数量有一个上限(库存能力)。

每家工厂有 10 个生产线(我们将它称之为机器),每个生产线生产 10 种产品中的一种。每一种产品的单位生产成本和产品的生产率(每天生产产品的单位数)依赖于所涉及的工厂和机器的结合(但不是本月)。工作天数的数量(可用生产天数)在月与月之间有所变化。

由于一些工厂和机器能够比其他工厂和机器以更低的成本或更快的速度生产,有时候值得将一些产品从一个工厂运到另一个工厂销售。对于运出产品和运入产品的工厂组合,每单位产品的运输成本是固定的,单位运输成本对于所有的产品是相同的。

管理层现在需要决策每月每家工厂每种产品在每种机器上应该生产多少,每月每家工厂每种产品应该销售多少,每月每家工厂每种产品应该运输多少到其他工厂。考虑到世界范围内的价格,目标是找出总利润最大化时最可行的计划(总的销售收入减去产品生产的总成本、库存成本和运输成本)。

我们应该再次注意到这是一个在许多方面做了简化的例子。我们已经假设工厂、机器、产品、月份都正好为 10。在大部分实际情况中,产品数可能远远大于 10,计划期限可能比 10 个月长,然而机器的数目可能少于 10(生产过程类型)。我们也假设每一个工厂有所有的同样类型的机器(生产过程),每一种机器类型能生产每一种产品。实际上,工厂在机器的类型和其所能生产的产品能力上可能存在一些不同。最后的结果是,一些公司的相应模型可能比这个例子的规模小,有一些公司的相应模型可能比这个例子的规模大得多(可能是巨大的)。

结果模型的结构

由于库存成本和有限的库存能力,必须对每月每家工厂每种产品的库存数量保持追踪记录。因此,所建线性规划模型必须有四个决策变量:生产数量、库存数量、销售数量和运输数量。10 家工厂、10 种机器、10 种产品、10 个月,这样就有共 21 000 个决策变量,如下所列。

决策变量

10 000 个产品变量,每一个对应一个月一家工厂的一台机器生产的一个产品的组合。

1 000 个库存变量:每一个对应一个月一家工厂生产的一个产品的组合。

1 000 个销售变量:每一个对应一个月一家工厂销售的一个产品的组合。

9 000 个运输变量:每一个对应一个月一家工厂生产的一个产品运往其他工厂的组合。

决策变量中的每一个乘以对应的单位成本或者单位收入,然后加总,计算目标函数如下。

目标函数

$$\max \quad \text{利润} = \text{总销售收入} - \text{总成本}$$

其中

$$\text{总成本} = \text{总生产成本} + \text{总库存成本} + \text{总运输成本}$$

在最大化目标函数的时候,21 000 个决策变量需要满足非负约束和四种类型的约束函数——生产能力约束、工厂平衡约束(相对库存变量的均等比例值)、最大库存量约束、最大销售量约束,总共会有 3 100 个约束函数,但每一种约束遵循下面的模式。

约束函数

1 000 个生产能力约束(每一个对应月、工厂和机器组合):

$$\text{使用的生产天数} \leq \text{可用的生产天数}$$

式子的左边是 10 个部分的和,每一个部分对应一种产品,每一部分是产品的产量(一个决策变量)除以产品的生产速度(一个给定的常量)。

1 000 个工厂平衡约束(对应月、工厂和产品的组合):

$$\text{生产数量} + \text{上个月库存} + \text{运入数量} = \text{销售量} + \text{当前库存} + \text{运出量}$$

这里生产数量代表产量的决策变量的和,运入量对应从其他工厂运来的数量的决策变量的和,运出量对应运往其他工厂的数量的决策变量之和。

100 个最大库存量约束(对应工厂和月份的组合):

$$\text{总库存} \leq \text{库存能力}$$

式子左边代表每一种产品库存量的决策变量之和。

1 000 个最大销售约束(对应工厂、产品和月份的组合):

$$\text{销售量} \leq \text{需求}$$

下面看一看 MPL 建模语言可以怎样非常简洁地建立这个巨大规模的模型。

使用 MPL 建立模型

建模工具开始赋予模型一个名称,列出了问题每一个实体的索引。如下:

```
TITLE
  Production_Planning;

INDEX
  product      := (A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10);
  month        := (Jan, Feb, Mar, Apr, May, Jun, Jul, Aug, Sep, Oct);
  plant        := (p1, p2, p3, p4, p5, p6, p7, p8, p9, p10);
  fromplant    := plant;
  toplant      := plant;
  machine      := (m1, m2, m3, m4, m5, m6, m7, m8, m9, m10);
```


除了月份以外,右边的输入对应各自产品、工厂和机器的任意的标签,数据文件中使用同样的标签。注意在输入名称后有一个冒号、在结尾有一个分号(一个描述定义可以多于一行)。

收集和组织不同类型的数据到数据文件是建立大规模规划模型的一个重大工作。数据文件可能是密集式或者稀疏式的。在密集式中,数据文件包含每一个可能的索引组合的输入。例如数据文件中包括在不同工厂用不同的机器(生产过程)生产不同的产品的生产率。密集式中,文件包括工厂、机器、产品的每一种组合输入。然而,输入的大部分组合可能是0,因为特定的工厂没有特定的机器,即使有,对于特定的工厂特定的机器来说可能不生产特定的产品。密集式情况中非零输入的百分比是指数据集的密度。实际上,大的数据集低于5%的密度是很普通的,经常低于1%。拥有如此低密度的数据集称为稀疏的。在此情况下,以稀疏式使用数据文件是更有效的。这种格式,只有非零值(索引值的识别)才能输入数据文件。通常,稀疏式数据从文本文件或者公共数据库中读取。有效处理稀疏数据集的能力是成功建立和求解大规模线性规划模型的关键。MPL能够使用密集式和稀疏式两种数据。

在Worldwide公司的例子中,需要建立产品价格、需求、产品成本、生产率、可用生产天数、库存成本、库存能力、运输成本8个数据文件。假设这8个数据文件是可用的稀疏式的。下面的步骤是给每一个赋予一个简短的建议名,来识别(包括方括号)索引与数据运行中的索引,如下:

```
DATA
Price[product]      := SPARSEFILE("Price.dat");
Demand[plant, product, month] := SPARSEFILE("Demand.dat");
ProdCost[plant, machine, product] := SPARSEFILE("Produce.dat", 4);
ProdRate[plant, machine, product] := SPARSEFILE("Produce.dat", 5);
ProdDaysAvail[month] := SPARSEFILE("ProdDays.dat");
InvtCost[plant, product] := SPARSEFILE("InvtCost.dat");
InvtCapacity[plant] := SPARSEFILE("InvtCap.dat");
ShipCost[fromplant, toplant] := SPARSEFILE ("ShipCost.dat");
```

为了描述这些数据文件的内容,应该提供生产成本和生产率。这里有一个稀疏文件产生数据的5个输入的例子:

```
!
! Produce.dat - Production Cost and Rate
!
! ProdCost[plant, machine, product]:
! ProdRate[plant, machine, product]:
!
!      p1, m11, A1, 73.30, 500,
!      p1, m11, A2, 52.90, 450,
!      p1, m12, A3, 65.40, 550,
!      p1, m13, A3, 47.60, 350,
```

下列建模工具给出了每一种类型的决策变量的简短名称。下面方括号内的名称是索引和下面运行的索引。

```
VARIABLES
  Produce[plant, machine, product, month]      -> Prod;
  Inventory[plant, product, month]             -> Invt;
  Sales[plant, product, month]                 -> Sale;
  Ship[product, month, fromplant, toplant]
    WHERE (fromplant <> toplant);
```

在决策变量的长度多于4个字母的时候,右边的指向4个字母缩写的箭头满足许多求解工具的长度限制。最后一行表示下面描述的 fromplant 和 toplant 不允许有相同的值。

写下模型前,有一个额外的步骤需要做,即为了使模型易读,有必要引入宏来表达目标函数的和。

```
MACROS
  Total Revenue := SUM(plant, product, month: Price*Sales);
  TotalProdCost := SUM(plant, machine, product, month:
    ProdCost*Produce);
  TotalInvtCost := SUM(plant, product, month:
    InvtCost*Inventory);
  TotalShipCost := SUM(product, month, fromplant, toplant:
    ShipCost*Ship);
  TotalCost := TotalProdCost + TotalInvtCost + TotalShipCost;
```

前4个宏使用 MPL 关键词 SUM 执行求和。接下来的每一个 SUM 关键词(包括参数)是索引或者求和运行的索引。再下来(冒号后)是记录可应用的数据向量(4种类型决策变量之一)的向量产品(数据文件之一)。

现在具有 3 100 个约束函数和 21 000 决策变量能够以下面的紧凑形式书写:

```
MODEL
  MAX Profit = TotalRevenue - TotalCost;
  SUBJECT TO
    ProdCapacity[plant, machine, month] -> PCap:
      SUM(product: Produce/ProdRate) <= ProdDaysAvail;
    PlantBal[plant, product, month] -> PBal:
      SUM(machine: Produce) + Inventory [month - 1]
      + SUM(fromplant: Ship[fromplant, toplant: = plant])
      =
      Sales + Inventory
      + SUM(toplant: Ship[from plant: = plant, toplant]);
    MaxInventory [plant, month] -> MaxI:
      SUM(product: Inventory) <= InvtCapacity;
  BOUNDS
    Sales <= Demand;
  END
```

对于这四种类型的约束,第一行给出了类型的名称。名称后方括号内的索引值的组合有一个类型约束。括号的右边,指向求解工具可用四个字母名称简写。第一行下面,类型约束的通用形式使用 SUM 运算显示。

对于每一个生产能力约束,将决策变量(每月工厂机器上一种产品的产量)组成的求和项除以相应的生产率,得到了使用的生产天数。求和后得到每月工厂机器生产天数的总和,因此这个数必须不超过可使用的生产天数。

工厂平衡约束的目的是为了给出当前库存变量的正确值,给出所有其他决策变量的值包括当月的库存水平。这些约束中 SUM 运算包括决策变量的和,而不是向量。这种情况也适合最大库存约束的 SUM 运算。相比之下,最大销售约束的左边恰恰是 1 000 家工厂、产品和月份组合的单个决策变量的和(将这些单个决策变量的上限约束从通用的约束函数中分离出来是有利的,因为通过使用 7.3 节描述的上限约束技术能够获得计算效率)。这里没有下限约束,因为 MPL 自动假设 21 000 个决策变量有非负约束,除非非零的下限约束被定义。对于 3 100 个约束函数中的每个约束函数,决策变量的左边是线性函数,右边是一个从适当的数据文件中读取的常量。因此目标函数也是决策变量的线性函数,这个模型是一个合法的线性规划模型。

为了求解这个模型,MPL 支持各种不同的求解工具(solvers)(求解线性规划和其他模型的软件包),可以被安装在 MPL 中。正如 4.8 节所讨论的,CPLEX 是一个尤其重要的、强有力的求解工具。运筹学课程软件中已安装了它的学习版。它使用单纯形法求解线性规划模型。因此,求解用 MPL 建立的模型,你不得不从 Run 菜单选择 Solve CPLEX 或者按工具栏上的 Run Solve 按钮,然后按 Status 窗口的 View 按钮可以在窗口中看到解文件。

上面对 MPL 的简要介绍,说明应用该建模语言建模者比较容易通过清晰规范的方法建立大型线性规划模型。为帮助你使用 MPL,本书网站包含一个 MPL Tutorial。这个教学软件通过建立一个小型的生产计划模型的例子进行详细介绍。你还可以在本书网站看到本章和随后各章的所有线性规划例子将采用 MPL 建模,并用 CPLEX 求解。

LINGO 建模语言

LINGO 是本书描述的另一个广泛应用的建模语言,生产 LINGO 的 LINDO Systems 公司因其便于使用的优化工具 LINDO 而知名,LINDO 是 LINGO 软件的子集。LINDO Systems 同时生产数据表格求解器 **What's Best!** 和一种被称为求解器图书馆的产品 **LINDO API**。LINGO 的学生版由本书网站提供(上述软件的最新试验版本可从下面网站下载:www.lindo.com)。LINDO 和 **What's Best!** 均可用 LINDO API 作为求解引擎。LINDO API 有基于单纯形法和内点/障碍的求解器(见 4.9 节和 7.4 节的讨论),加上一个求解非线性模型的全局求解器。

与 MPL 类似,LINGO 能够使建模者将数据同模型清晰分离开,从而有效地建立大规模线性规划模型。这种分离意味着当描述问题的数据需要每天(甚至每分钟)都发生变化时,使用者仅仅需要变化数据,而不需要重建模型。你可以用较少的数据建立模型,然后在模型中输入大的数据集,模型的式子将随新数据集自动调整。

LINGO 应用集合作为基础的概念。例如在 Worldwide 公司生产计划问题中关心的单一或原始的集合为产品、厂房、机器和月份。一个集合的每个组成部分可以有一个或多个与其结合的属性,例如产品的价格,厂房的存储能力,机器的生产率,一个月内的生产天数。这些属性的一部分是输入数据,其他如生产和运输量是决策变量,也可以定义由其他集合组合而成的导出集合。与 MPL 一样,SUM 算子通常用于书写紧缩形式的目标函数和约束条件。

LINGO 有一个硬复制的菜单,整个菜单可在 LINGO 中通过 Help 命令直接使用,并可通过各种方法搜索。

本书网站在本章的补充中对 LINGO 作了进一步描述,并应用一对小例子进行解释。另一补充阐述 LINGO 如何应用于 Worldwide 公司生产计划的建模。网站上对 LINGO 的教学提供了用建模语言进行基本建模的详细情况。本书网站还包括本章以及其他章中对各类例子的 LINGO 建模和求解应用。



3.7 结论

线性规划是一个处理有限资源分配给竞争性活动的强有力的方法,也用于其他具有相似数学公式的问题。它已经变成许多商业和工业组织非常重要的标准工具。而且,几乎所有的社会组织在一定情形下都与分配资源有关,关于这一技术的广泛应用正得到人们越来越多的认识。

然而,不是所有的有限资源分配给竞争性活动都适合用线性规划模型求解,即使只是一个合理的近似。当一个或者更多的线性规划模型的假设被违反时,另一个数学规划模型——整数规划模型(第 11 章)或者非线性规划模型(第 12 章)可能被应用。

参考文献

1. Baker, K. R.: *Optimization Modeling with Spreadsheets*, Duxbury, Pacific Grove, CA, 2006.
2. Hillier, F. S., and M. S. Hillier: *Introduction to Management Science: A Modeling and Case Studies Approach with Spreadsheets*, 3rd ed., McGraw-Hill/Irwin, Burr Ridge, IL, 2008, chaps. 2, 3.
3. *LINGO User's Guide*, LINDO Systems, Inc., Chicago, IL, 2008.
4. *MPL Modeling System (Release 4.2) manual*, Maximal Software, Inc., Arlington, VA, e-mail: info@maximalsoftware.com, 2008.
5. Schrage, L.: *Optimization Modeling with LINGO*, LINDO Systems Press, Chicago, IL, 2008.
6. Williams, H. P.: *Model Building in Mathematical Programming*, 4th ed., Wiley, New York, 1999.

线性规模的一些获奖应用

(下列所有论文可由我们的网站提供,可查 www.mhhe.com/hillier.)

- A1. Ambs, K., S. Cwilich, M. Deng, D. J. Houck, D. F. Lynch, and D. Yan: "Optimizing Restoration Capacity in the AT&T Network," *Interfaces*, **30**(1): 26–44, January–February 2000.
- A2. Caixeta-Filho, J. V., J. M. van Swaay-Neto, and A. de P. Wagemaker: "Optimization of the Production Planning and Trade of Lily Flowers at Jan de Wit Company," *Interfaces*, **32**(1): 35–46, January–February 2002.

- A3. Chalermkraivuth, K. C., S. Bollapragada, M. C. Clark, J. Deaton, L. Kiaer, J. P. Murdzek, W. Neeves, B. J. Scholz, and D. Toledano: "GE Asset Management, Genworth Financial, and GE Insurance Use a Sequential-Linear-Programming Algorithm to Optimize Portfolios," *Interfaces*, **35**(5): 370–380, September–October 2005.
- A4. Elimam, A. A., M. Girgis, and S. Kotob: "A Solution to Post Crash Debt Entanglements in Kuwait's al-Manakh Stock Market," *Interfaces*, **27**(1): 89–106, January–February 1997.
- A5. Epstein, R., R. Morales, J. Serón, and A. Weintraub: "Use of OR Systems in the Chilean Forest Industries," *Interfaces*, **29**(1): 7–29, January–February 1999.
- A6. Geraghty, M. K., and E. Johnson: "Revenue Management Saves National Car Rental," *Interfaces*, **27**(1): 107–127, January–February 1997.
- A7. Leachman, R. C., R. F. Benson, C. Liu, and D. J. Raar: "IMPreSS: An Automated Production-Planning and Delivery-Quotation System at Harris Corporation—Semiconductor Sector," *Interfaces*, **26**(1): 6–37, January–February 1996.
- A8. Mukuch, W. M., J. L. Dodge, J. G. Ecker, D. C. Granfors, and G. J. Hahn: "Managing Consumer Credit Delinquency in the U.S. Economy: A Multi-Billion Dollar Management Science Application," *Interfaces*, **22**(1): 90–109, January–February 1992.
- A9. Murty, K. G., Y.-w. Wan, J. Liu, M. M. Tseng, E. Leung, K.-K. Lai, and H. W. C. Chiu: "Hongkong International Terminals Gains Elastic Capacity Using a Data-Intensive Decision-Support System," *Interfaces*, **35**(1): 61–75, January–February 2005.
- A10. Yoshino, T., T. Sasaki, and T. Hasegawa: "The Traffic-Control System on the Hanshin Expressway," *Interfaces*, **25**(1): 94–108, January–February 1995.

习题

一些写在习题序号左边的符号(或者它们的一部分)的含义如下:

D: 所列的演示例子对你可能是有帮助的。

I: 你可能发现在 IOR Tutorial 中使用相应的程序是有益的(打印出你工作的记录)。

C: 用单纯形法使用计算机求解问题。做这个的可选软件包括 Excel Solver、Premium Solver(3.5 节)、MPL/CPLEX(3.6 节)、LINGO(本书网站中本章的补充 1 和 2 及附录 4.1)和 LINDO(附录 4.1),接受你的指导者给予你的关于这些软件选择的指导。

习题上有一个星号表示书后至少给出该题一部分答案。

3.1-1 阅读 3.1 节应用案例中概述、在其参考文献中全面描述运筹学应用的文章,简要叙述线性规划是如何在该项研究中应用的,然后列出该项研究带来的财务与非财务的效益。

D3.1-2* 对于下面的每一个约束,画出一个单独的图形表示出满足这些约束的非负解。

(a) $x_1 + 3x_2 \leq 6$

(b) $4x_1 + 3x_2 \leq 12$

(c) $4x_1 + x_2 \leq 8$

(d) 现在,在单独图形中结合这些约束表示出加上非负约束的全部约束函数的可行域。

D3.1-3 考虑下面的线性规划模型的目标函数:

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$

(a) 画出与 $Z=6$ 、 $Z=12$ 和 $Z=18$ 相应的目标函数线。

(b) 找到这三个目标函数线的斜截式,比较三条线的斜率,比较在 x_2 轴的截距。

3.1-4 考虑下面直线的方程:

$$60x_1 + 40x_2 = 600$$

- (a) 给出等式的斜截式。
 (b) 使用这个式子给出斜率和在 x_2 轴上的截距。
 (c) 利用(b)中的信息,画出这条直线的图形。

D,I 3.1-5* 使用图解法求解问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_2 \leq 10 \\ & 2x_1 + 5x_2 \leq 60 \\ & x_1 + x_2 \leq 18 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 44 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

D,I 3.1-6 使用图解法求解问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 10x_1 + 20x_2, \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ & x_1 + x_2 \leq 12 \\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 45 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

3.1-7 Whitt Window 公司是一个有 3 个雇员的制造两种类型手工艺窗户的公司。窗户一种是木框架的、一种是铝框架的。木框架窗每个可挣 60 美元的利润,铝框架窗每一个可挣 30 美元的利润。Doug 制作木框架窗,每天做 6 个; Linda 制作铝框架窗,每天做 4 个; Bob 制作和切割玻璃,每天制作 48 英尺² 的玻璃。每一个木框架窗使用 6 英尺² 的玻璃,每一个铝框架窗使用 8 英尺² 的玻璃。

公司希望决策每天生产多少个木框架窗和多少个铝框架窗可使总的利润最大。

(a) 给出此问题与 3.1 节 Wyndor Glass 公司问题的相似之处。然后为此问题建立和填写一张类似表 3.1 的表格,并标出活动和资源。

(b) 建立此问题的线性规划模型。

D,I(c) 使用图形法求解该模型。

I(d) 一个新的竞争者也开始制造木框架窗。这可能迫使公司降低产品价格,从而减少每一个木框架窗的利润。如果每个木框架窗的利润从 180 美元降到 120 美元,或者从 180 美元降到 60 美元,最优解将如何变化?(使用 IOR Tutorial 中图形分析和敏感性分析程序可能很有帮助。)

I(e) Doug 正在考虑减少他的工作时间,这会减少每天木框架窗的产量。如果每天制造 5 个木框架窗,最优解如何变化?(使用 IOR Tutorial 中图形分析和敏感性分析程序可能很有帮助。)

3.1-8 World Light 公司生产两种光设备(产品 1 和产品 2),需要金属框架和电阻件。管理层想决策每种产品应该生产多少才能使利润最大化。每单位产品 1 需要 1 单位

框架和 2 单位电组件。每单位产品 2 需要 3 单位框架和 2 单位电组件。公司有 200 个单位的框架和 300 个单位的电组件。每单位产品 1 的利润是 1 美元,总产量小于 60 单位的每单位产品 2 的利润是 2 美元。超过 60 个单位总产量的每单位产品 2 的利润是 0,因此不能超出 60 单位。

(a) 建立此问题的线性规划模型。

D,I(b) 使用图形法求解模型,最终的总利润是多少?

3.1-9 Primo 保险公司正在引入两个新的险种:专门险和抵押险。每单位专门险的利润为 5 美元,每单位抵押险的利润为 2 美元。

管理层希望为新的险种建立销售限额,以达到最大的收益。工作要求如下:

部 门	每单位的工作时间/小时		可以获得的工作时间/小时
	专门险	抵押险	
保险部门	3	2	2 400
行政部门	0	1	800
需求部门	2	0	1 200

(a) 建立这个问题的线性规划模型。

D,I(b) 使用图形法求解模型。

(c) 通过求解相关等式的代数解来验证你通过(b)得到的最优解。

3.1-10 Weenies and Buns 是生产热狗和热狗面包的食品加工厂,每周为生产热狗碾碎最大量达 200 磅的面粉。每个热狗面包需要 0.1 磅面粉。当前与 Pigland 有限公司有一个合同,规定每周一运输 800 磅的猪肉。每个热狗需要 0.25 磅的猪肉。所有热狗和热狗面包的其他成分是充足供应的。Weenies and Buns 有 5 个全职雇员(每周工作 40 个小时)。每个热狗需要一个人力的 3 分钟,每个热狗面包需要一个人力的 2 分钟。每个热狗产生 0.80 美元利润,每个热狗面包产生 0.30 美元的利润。

Weenies and Buns 想知道每周应该生产多少热狗和热狗面包以达到最大可能的利润。

(a) 建立这个问题的线性规划模型。

D,I(b) 使用图形法求解该模型。

3.1-11* Omega 制造公司停止了不赢利的产品生产。这种做法产生了一些剩余生产能力。管理层考虑将这些生产能力转用于生产产品 1、产品 2 和产品 3 中的一个或者几个。机器上可用的可能限制产量的生产能力见左表,每单位产品的生产需要的小时数见右表:

机器类型	可用工作时间 (每周机器小时数)/小时
铣床	500
车床	350
磨床	150

机器类型	生产单位产品的工作量/小时		
	产品 1	产品 2	产品 3
铣床	9	3	5
车床	5	4	0
磨床	3	0	2

销售部门显示产品 1 和产品 2 的销售潜力超过最大生产速度,产品 3 的销售潜力是每周 20 个单位。每单位产品 1、产品 2 和产品 3 的利润分别是 50 美元、20 美元和 25 美元。规划目标是决定每一种产品应该各生产多少以产生最大的利润。

(a) 建立这个问题的线性规划模型。

C(b) 利用计算机通过单纯形法求解模型。

D3.1-12 考虑下面的问题,其中 c_1 的值仍然是未确定的。

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = c_1 x_1 + x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & \text{且} \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

使用图形分析找到对应所有不同 c_1 ($-\infty < c_1 < \infty$) 值的 (x_1, x_2) 最优解。

D3.1-13 考虑下面的问题,其中 k 的值是仍然未确定的。

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_2 \leq 3 \\ & kx_1 + x_2 \leq 2k + 3, \quad k \geq 0 \\ & \text{且} \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

当前使用的解是 $x_1 = 2, x_2 = 3$ 。使用图形分析找到最优解时 k 的值。

D3.1-14 考虑下面的问题,其中 c_1 和 c_2 的值是仍然未确定的。

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 11 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & \text{且} \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

使用图形分析找到对应所有可能的 c_1 和 c_2 值的 (x_1, x_2) 最优解(提示:分别考虑 $c_2 = 0, c_2 > 0$ 和 $c_2 < 0$,后两种情况集中于 c_1 和 c_2 的比值。)

3.2-1 下表概括了产品 A、B 以及生产它们的资源 Q、R、S。

资源	生产单位产品所需资源		可用的资源数
	产品 A	产品 B	
Q	2	1	2
R	1	2	2
S	3	3	4
单位产品利润	3	2	

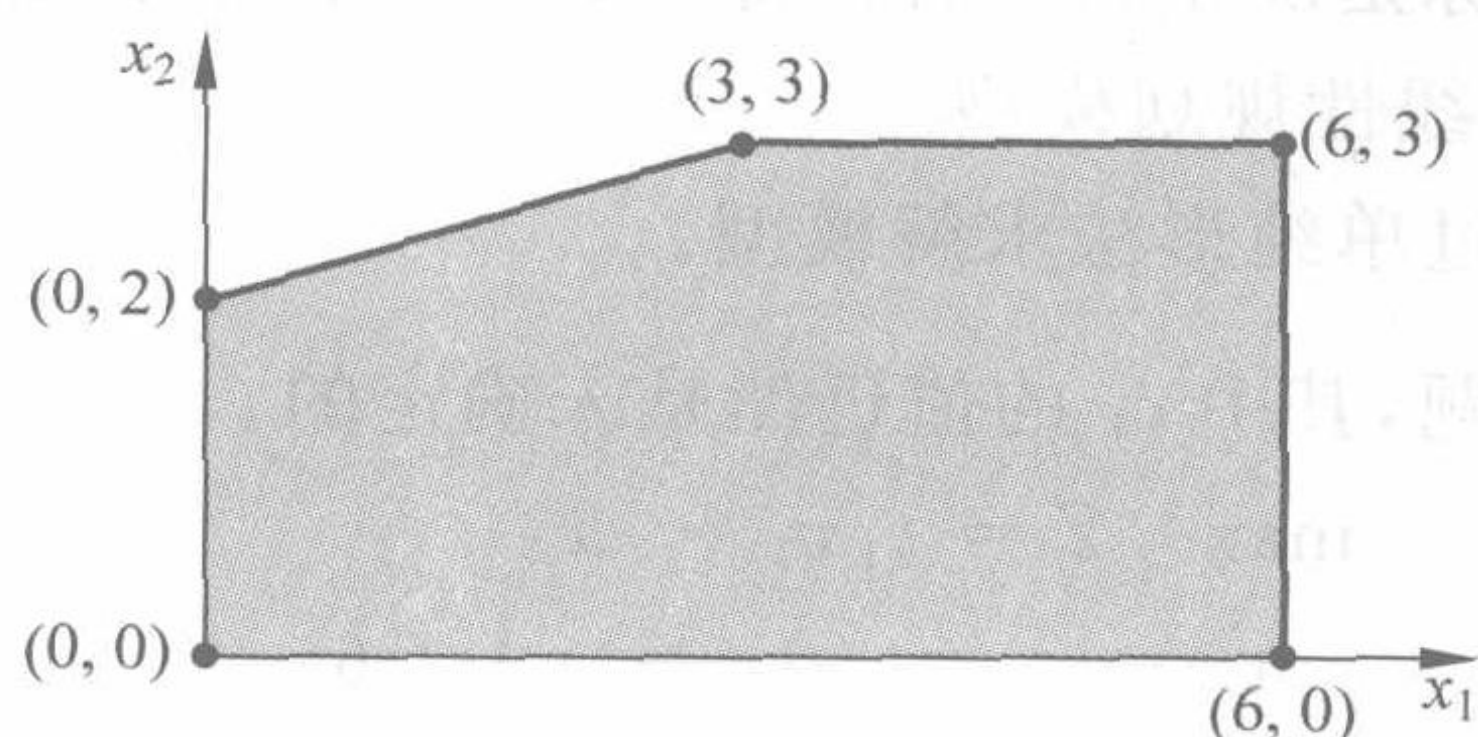
在此,线性规划模型的所有假设都成立。

(a) 建立这个问题的线性规划模型。

D,I(b) 用图形法求解该模型。

(c) 通过求解相关等式的代数解来验证你通过(b)得到的最优解。

3.2-2 下图的阴影部分表示一个目标函数最大化的线性规划模型的可行域。



基于上面图形判断下列描述的真假。在每一种情况下,给出一个解释你答案的目标函数的例子。

- (a) 如果点(3,3)的目标函数值比点(0,2)、点(6,3)大,那么点(3,3)一定是最优解。
 (b) 如果点(3,3)是最优解,且有多个最优解,那么点(0,2)、点(6,3)也是最优解。
 (c) 点(0,0)不可能是最优解。

3.2-3* 这是幸运的一天,你刚刚赢得了10 000美元的奖金。决定使用4 000美元交税和举办聚会,剩余的6 000美元投资。现在听一下这个消息,你的两个朋友各自计划向你提供两个不同的风险企业的投资机会。两种情况下,你都需要花费这个夏天的时间和你的现金。如果成为第一个朋友的合作者,你将需要5 000美元和400小时的时间,你可证实的利润将是4 500美元(忽略时间价值)。如果成为第二个朋友的合作者,你将需要4 000美元和500小时,你可证实的利润也将是4 500美元。然而两个朋友也是灵活的,允许你就全部合伙投资的一部分分开进行投资。如果你选择分开并部分投资,那么上面相应的数值(金钱投资、时间投资、利润)都乘以它们相应的分数值。

因为你正在寻找一个有意义的夏季工作(最多600小时),并决定参与这两种投资中的一个或者都投资,并最大化自己的利润。因此你需要解决最优组合的问题。

- (a) 描述此问题与3.1节 Wyndor Glass 公司问题的相似之处。然后为此问题建立和填写一张类似表3.1的表格,并标出活动和资源。
 (b) 建立这个问题的线性规划模型。
 D,I(c) 使用图形法求解这个模型。你的总的估计利润是多少?

D,I 3.2-4 使用图形法求解下列模型的所有最优解:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 500x_1 + 300x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 15x_1 + 5x_2 \leq 300 \\ & 10x_1 + 6x_2 \leq 240 \\ & 8x_1 + 12x_2 \leq 450 \\ & \text{且} \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

D3.2-5 使用图形法证明下列模型没有最优解。

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 5x_1 + 7x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 - x_2 \leq -1 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq -1 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

D3.2-6 假设下面的约束是一个线性规划模型的约束：

$$\begin{aligned} & -x_1 + 2x_2 \leq 50 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 50 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- (a) 证明可行域是无界的。
 (b) 如果目标是最大化 $Z = -x_1 + x_2$, 那么模型有最优解吗? 如果有, 求出它; 如果没有, 为什么?
 (c) 如果目标是最大化 $Z = x_1 - x_2$, 重复(b)。
 (d) 没有最优解的模型的目标函数是否意味着根据模型没有好的解? 请解释。当建模时, 可能产生什么错误?

3.3-1 再考虑习题 3.2-3。为什么线性规划的四个假设(3.3节)中的每一个看来对这个问题都合理地满足? 有一个假设比其他假设不可靠吗? 如果有, 要把它纳入考虑应该做什么?

3.3-2 考虑有两个决策变量 x_1 和 x_2 分别代表活动 1 和活动 2 的问题。对于每一个变量, 许可值为 0、1、2。各种约束决定了两个变量的各种可行值的组合。目标是 Z 表示的各种执行措施最大化。对于可能的 (x_1, x_2) 值, Z 的值如下表所示:

x_1	x_2		
	0	1	2
0	0	4	8
1	3	8	13
2	6	12	18

在这些信息的基础上, 判断这个问题是否完全满足线性规划模型的四个假设。试证明你的判断。

3.4-1 阅读 3.4 节第一个应用案例中概述并在其参考文献中深入讨论的运筹学研究的的文章。简要叙述线性规划在该项研究中的应用, 然后列出该项研究带来的财务与非财务的效益。

3.4-2 阅读 3.4 节第二个应用案例中概述并在其参考文献中深入讨论的运筹学研究的的文章。简要叙述线性规划在该项研究中的应用, 然后列出该项研究带来的财务与非财务的效益。

3.4-3* 对于 3.3 节线性规划模型的四个假设中的每一个, 写出一段你对于它们应用于

3.4 节例子的分析。

(a) 放射治疗的设计(Mary)。

(b) 区域规划(南部联盟农场)。

(c) 控制空气污染(Nori& Leets 有限公司)。

3.4-4 对于 3.3 节线性规划模型的四个假设中的每一个,写出一段你对于它们应用于 3.4 节例子的分析:

(a) 固体废物的回收利用(Save-It 公司)。

(b) 人事规划(联合航空公司)。

(c) 通过分配网络分配货物(Distribution Unlimited 公司)。

D,I 3.4-5 使用图解法求解问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = 15x_1 + 20x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ & 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \geq 6 \\ \text{且} \quad & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

D,I 3.4-6 使用图解法求解问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + 3x_2 = 12 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ \text{且} \quad & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

D 3.4-7 考虑下面的问题,其中 c_1 的值是未确定的。

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = c_1x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 4x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x_1 - x_2 \geq 2 \\ \text{且} \quad & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

使用图形分析找到对应于所有不同 c_1 值的 (x_1, x_2) 最优解。

D,I 3.4-8 考虑下面的问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = 40x_1 + 50x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 \geq 30 \\ & x_1 + x_2 \geq 12 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 20 \\ \text{且} \quad & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(a) 使用图解法求解模型。

(b) 如果目标函数变为 $Z = 40x_1 + 70x_2$, 最优解如何变化? (使用 IOR Tutorial 中的

图形分析和敏感性分析程序可能会有帮助。)

(c) 如果第三个约束变为 $2x_1 + x_2 \geq 15$, 最优解如何变化? (使用 IOR Tutorial 中的图形分析和敏感性分析程序可能会有帮助。)

3.4-9 Ralph Edmund 喜欢牛排和马铃薯, 因此他决定只吃这两种食物(加上某些饮料和维生素)以控制体重。Ralph 知道这不是最健康的饮食, 因此他想确定两种食物的正确摄入量以满足自己关键的营养需求。他已经获得了如下表列出的营养和成本信息。

Ralph 希望决定以最小的成本满足这些需求的牛排和马铃薯的每天供应量(可能为分数)。

营养成分	每一份的营养成分/克		每天的需求量/克
	牛排	马铃薯	
碳水化合物	5	15	≥ 50
蛋白质	20	5	≥ 40
脂肪	15	2	≤ 60
每份的价格/美元	4	2	

(a) 建立这个问题的线性规划模型。

D, I(b) 使用图解法求解模型。

C(c) 使用计算机用单纯形法求解这个模型。

3.4-10 Web Mercantile 通过在线目录销售多种家用产品。公司需要充足的仓库空间来存储货物。现在正在制订下 5 个月释放仓库空间的计划。这些月所需的空间是已知的。然而, 由于这些空间需求是不同的, 以每个月的空间需求为基础来租用空间可能是最经济的。另外, 其他月份租用空间的成本比第一个月少, 因此为今后 5 个月租用最大的所需空间可能并不很昂贵。另一个选择是改变租用空间总数量的方法(通过添加新的租用或者维持旧的租期), 至少改变一次, 但不是每月都改变。

空间需求和不同租期的成本如下:

月份	需要的空间/平方英尺
1	30 000
2	20 000
3	40 000
4	10 000
5	50 000

租期/月	租用成本/(美元/平方英尺)
1	65
2	100
3	135
4	160
5	190

目标是求满足需求且最小的租用成本。

(a) 建立问题的线性规划模型。

C(b) 用单纯形法求解模型。

3.4-11 Larry Edison 是 Buckly 大学计算机中心的主任。他现在需要制订中心的人事工作安排计划。中心从上午 8 点到午夜开放。Larry 对中心每天不同时段的使用情

况做了监控,并得到下面的计算机咨询者需求的数量:

时 间	需要顾问的最小数量
上午 8:00~中午	4
中午~下午 4:00	8
下午 4:00~晚上 8:00	10
晚上 8:00~午夜	6

可以雇用两种类型的计算机咨询员:全职的和兼职的。全职的咨询员工作连续 8 小时:上午 8:00~下午 4:00,或中午~晚上 8:00 或下午 4:00~午夜。全职咨询员的报酬是每小时 40 美元。

兼职的咨询员能够以上面所列的四班轮换中的任何一种方式工作,兼职报酬为每小时 12 美元。

附加的要求是在每个工作时段内,必须至少有两个全职咨询员值班。

Larry 想确定多少全职和兼职工作人员应该在每一班工作,才能在满足上面的需求时使成本最小。

(a) 建立这个问题的线性规划模型。

(b) 用单纯形法求解模型。

3.4-12* Medequip 公司在两个工厂生产精密医疗诊断设备。三个医疗中心订购了本月的产品。下表列出了从每个工厂运送给上述客户的单位运输成本。表中也给出了每家工厂生产的产品单位数和每个客户订购的设备单位数。

	单位运输成本/美元			产 量
	客户 1	客户 2	客户 3	
工厂 1	600	800	700	400
工厂 2	400	900	600	500
订购数	300	200	400	

需要制订的决策是从工厂到客户的运输数量计划。

(a) 建立这个问题的线性规划模型。

(b) 用单纯形法求解模型。

3.4-13* Al Ferris 有 60 000 美元用于投资,以便能够在 5 年内积累资金用于购买退休养老金。理财专家提供了四种类型的固定收入投资,我们标记为 A、B、C、D。

投资 A 和投资 B 在未来 5 年(称为年 1 到年 5)的每一年年初开始投资,1 美元的投资 A 在 2 年后(在紧接的投资时间)的年初得到回报 1.40 美元(0.40 美元利润)。1 美元的投资 B 在 3 年后的年初得到回报 1.70 美元。

投资 C 和投资 D 在未来一次性使用。在第 2 年年初 1 美元的投资 C 在第 5 年年末得到回报 1.90 美元。在第 5 年年初 1 美元的投资 D 在第 5 年年末得到回报 1.30 美元。

Al 希望知道哪一种投资计划能够在第 6 年年初得到最多的积累资金。

- (a) 这个问题的所有约束函数都是等式约束。为了做到这一点,令 A_t, B_t, C_t, D_t 表示投资 A、投资 B、投资 C、投资 D 的资金数量。在第 t 年开始投资时,到第 5 年未得到投资收益。令 R_t 为可用的不在 t 年年初投资的美元的数量(从而可用于后来年份的投资)。这样,在 t 年年初的投资加上 R_t 等于此时可用的投资金额。根据上面 5 年每年年初的相关变量写出等式得到这个问题的 5 个约束函数。
- (b) 为这个问题建立完整的线性规划模型。
- (c) 用单纯形法求解模型。

3.4-14 Metalco 公司希望制得一种新的合金:其中锡 40%、锌 35%、铅 25%。合成合金的属性如下:

性 质	合 金				
	1	2	3	4	5
锡含量/%	60	25	45	20	50
锌含量/%	10	15	45	50	40
铅含量/%	30	60	10	30	10
成本/(美元/磅)	77	70	88	84	94

目标是决定这些被混合的合金的比例,以最小的成本生产新的合金。

(a) 建立这个问题的线性规划模型。

(b) 用单纯形法求解模型。

3.4-15* 一个货运飞机有三个存储货物的部分:前、中、后。这些部分有重量和空间的能力限制。概括如下:

储物箱	重量容量/吨	空间容量/立方英尺
前	12	7 000
中	18	9 000
后	10	5 000

而且,为了维持飞机的平衡,各部分的货物的重量必须与各部分的载重能力成比例。

在下一班次飞行时将运输的四种货物如下:

货物	重量/吨	体积/(立方英尺/吨)	利润/(美元/吨)
1	20	500	320
2	16	700	400
3	25	600	360
4	13	400	290

所有货物的任何比例都是可接受的。目标是确定每种货物运输多少,怎样分配

于飞机的不同部分,使飞行的总利润最大。

(a) 建立这个问题的线性规划模型。

C(b) 用单纯形法求解模型,找到多个最优解中的一个。

3.4-16 Oxbridge 大学建立了一个为教职人员、博士研究生和研究合作者提供研究使用的主机,在所有的工作时间,操作者运行和维护计算机,进行一些程序服务。计算机系的主任 Beryl Ingram 监督运行。

秋季学期伊始,Beryl 面临给不同的操作者分配不同的工作时间,因为所有的操作者当前都受雇于该大学,他们每天工作有限的时间如下表所示:

操作者	工资率/(美元/小时)	可获得的最大小时数/小时				
		周一	周二	周三	周四	周五
K. C.	25	6	0	6	0	6
D. H.	26	0	6	0	6	0
H. B.	24	4	8	4	0	4
S. C.	23	5	5	5	0	5
K. S.	28	3	0	3	8	0
N. K.	30	0	0	0	6	2

有六个操作者(四个大学生和两个研究生),他们领取的工资不同,因为他们的计算机经验和操作程序能力不同。上表给出了他们的工资和每天能够工作的最大时间数。

每一个操作者保证一个最小时间数来掌握足够的运行知识。这个时间对于大学生是每周 8 小时(K. C., D. H., H. B. 和 S. C.),对于研究生每周 7 小时(K. S. 和 N. K.)。

计算机在上午 8 点~晚上 10 点是开放的,在周一至周五的这些小时内恰有一个操作者值班。在周六和周日计算机由其他职员操作。

由于预算紧缩,Beryl 不得不最小化成本。他希望决定赋予每一个操作者每天工作的时间。

(a) 建立这个问题的线性规划模型。

C(b) 用单纯形法求解模型。

3.4-17 Joyce 和 Marvin 开办了一个全天照看学前儿童的托管班。他们必须决定给这些孩子吃什么午餐。他们需要降低成本,但要保证这些孩子的营养需求。他们不得不与花生酱、果冻三明治、粗面粉、牛奶、橘子汁的混合物打交道。每一种食物成分的营养和成本如下表所示:

食 物	脂肪热值/卡路里	总热值/卡路里	维生素 C/毫克	蛋白质/克	成本/美元
面包(一片)	10	70	0	3	5
花生油(一汤匙)	75	100	0	4	4
草莓酱(一汤匙)	0	50	3	0	7
全麦饼干(一块)	20	60	0	1	8
牛奶(一杯)	70	150	2	8	15
果汁(一杯)	0	100	120	1	35

营养需求如下。每个孩子应该摄入 400~600 卡路里。来自脂肪的卡路里总数不多于总数的 30%。每个孩子应该消耗 60 毫克的维生素 C 和 12 克的蛋白质。而且,由于实际原因,每个孩子需要 2 片面包(制作三明治),至少是花生酱和果冻两倍多,至少一杯液体(牛奶和/或果汁)。

Joyce 和 Marvin 将选择每一个孩子的食物组合在满足他们营养需求的情况下,使其成本最低。

(a) 建立这个问题的线性规划模型。

(b) 用单纯形法求解模型

3.5-1 阅读 3.5 节应用案例中概述及在其参考文献中深入介绍的运筹学研究的文章。简要叙述线性规划是如何在该项研究中应用的,然后列出该项研究带来的财务与非财务的效益。

3.5-2* 给定下列线性规划模型的数据,目标函数是最大化分配三种资源到两个非负活动的利润。

资源	每项活动每单位的资源用量		可获得的资源数量
	活动 1	活动 2	
1	2	1	10
2	3	3	20
3	2	4	20
每单位的贡献/美元	20	30	

单位贡献=活动的单位利润。

(a) 建立这个问题的线性规划模型。

(b) 使用图形法求解模型。

(c) 在 Excel 电子表格中列出模型。

(d) 使用电子表格检查下面的解: $(x_1, x_2) = (2, 2), (3, 3), (2, 4), (4, 2), (3, 4), (4, 3)$ 。这些解中哪些是可行的? 这些可行解中哪一个使目标函数达到最大?

(e) 使用 Excel Solver 通过单纯形法求解模型。

3.5-3 Ed Butler 是 Bilco 公司的产品管理者,公司生产三种类型的汽车备用件,每一个备用件均需经过两台机器(1,2)加工,所需的时间(小时)如下表所示:

机器	备件(A,B,C)加工时间/小时		
	A	B	C
1	0.02	0.03	0.05
2	0.05	0.02	0.04

每一台机器每个月可用时间为 40 小时。制造每一个备件产生的利润如下表所示:

	备 件		
	A	B	C
利润/美元	300	250	200

Ed 想决策备用件的生产组合,以最大化公司的利润。

- 建立这个问题的线性规划模型。
- 在 Excel 电子表格上列出模型。
- 列出你选择的最优解的三种猜测。使用电子表格检查每一个猜测的可行性。如果可行,找到目标函数值。可行的猜测有最大目标函数值吗?
- 使用 Excel Solver 通过单纯形法求解模型。

3.5-4 给定下列线性规划模型的数据,最小化操作非负活动的成本,目的是达到不低于最低水平的三个收益。

利 润	每项活动每单位的利润贡献		可接受的最低水平
	活动 1	活动 2	
1	5	3	60
2	2	2	30
3	7	9	126
单位成本/美元	60	50	

- 建立这个问题的线性规划模型。
- 使用图形法求解模型。
- 在 Excel 电子表格中列出模型。
- 使用电子表格检查下面的解: $(x_1, x_2) = (7, 7), (7, 8), (8, 7), (8, 8), (8, 9), (9, 8)$ 。这些解中哪些是可行的? 这些可行解中哪一个使目标函数达到最大?
- 使用 Excel Solver 通过单纯形法求解模型。

3.5-5* Fred Jonasson 管理一个家庭农场。农场除了种植几种农作物外,还喂养生猪以供销售。他现在希望决定喂养每一头猪的可用类型的饲料的数量(谷物、桶槽、紫花苜蓿)。因为猪将吃这些种类的混合饲料,目标是决策哪一种饲料混合可以最小成本满足营养需求。下表给出了三种类型的饲料所包含的基本营养成分的单位数,以及每一天的营养需求和成本:

营养成分	千克			每日需要的最小量
	谷物	桶槽	紫花苜蓿	
碳水化合物	90	20	40	200
蛋白质	30	80	60	180
维生素	10	20	60	150
成本(美分)	84	72	60	

- 建立这个问题的线性规划模型。

- (b) 在 Excel 电子表格中列出模型。
- (c) 使用电子表格检查下面的解： $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 1)$ 是可行的吗？如果是，对于这种组合每一天的成本是多少？每一天这种组合提供了多少营养成分？
- (d) 花一些时间使用实验法建立你对最优解的猜测。你猜测的每天的成本是多少？
- (e) 使用 Excel Solver 通过单纯形法求解模型。

3.5-6 Maureen Laird 是 Alva 电力公司的首席财务官，公司是一个中西部的的主要公用单位。从现在起的 5 年、10 年、20 年，公司计划建造新的水电厂，满足公司服务区域增长的需求。为了至少弥补建造成本，Maureen 需要投资一笔钱以满足将来公司的现金流需求。Maureen 可能只购买三种类型的财务资产，每单位为 100 万美元。购买的单位可能不是整数。从现在起，资产投资所带来的 5 年、10 年、20 年收入，应该至少满足这些年的现金流量需求（任何时间段超过的收入都将被用于股票持有者的分红，而不是节省它以满足下一个时间现金流的需求）。下表给出了当一个新的水电厂建立时每一种投资产生的单位收益和将来每一个时间段的最低收益。

年	每单位资产的收入			需要的最低现金流
	资产 1	资产 2	资产 3	
5	2	1	0.5	400
10	0.5	0.5	1	100
20	0	1.5	2	300

Maureen 希望决定这些投资的组合，以最小化的投资成本满足未来的现金流需求。

- (a) 建立这个问题的线性规划模型。
- (b) 在 Excel 电子表格中列出模型。
- (c) 使用电子表格检查购买 100 单位投资资产 1、100 单位投资资产 2、200 单位投资资产 3。这种投资组合带来的 5 年、10 年、20 年的现金流量各是多少？总的投资数量是多少？
- (d) 花一些时间使用实验法建立你对最优解的猜测。你猜测的解总的投资数量是多少？
- (e) 使用 Excel Solver 通过单纯形法求解模型。

3.6-1 Philbrick 公司有两个工厂，分别在美国的两端，生产同样的两种产品，然后销往工厂所在的国家的半个区域。来自销售者的未来两个月（2 月和 3 月）的订货，需求的数量如下（公司没有义务完全满足这些订货，但是如果不减少利润，公司将愿意满足）。

产 品	工厂 1		工厂 2	
	2 月	3 月	2 月	3 月
1	3 600	6 300	4 900	4 200
2	4 500	5 400	5 100	6 000

每家工厂在 2 月有 20 天、在 3 月有 23 天用于生产和运输这些产品。1 月末，存货被发出。但是如果超出的数量在 2 月生产 3 月销售，每家工厂有足够的存货能力

来存储两种产品共 1 000 单位的货物。在每家工厂,以这种方式存货的成本是产品 1 为 3 美元/单位,产品 2 为 4 美元/单位。

每家工厂有相同的两种生产线,每种都能够生产两种产品。每家工厂每单位产品的单位生产成本如下表所示:

产 品	美元			
	工厂 1		工厂 2	
	过程 1	过程 2	过程 1	过程 2
1	62	59	61	65
2	78	85	89	86

每家工厂每个生产线的每种产品的生产率(每天生产此产品的数量)如下:

产 品	美元			
	工厂 1		工厂 2	
	过程 1	过程 2	过程 1	过程 2
1	100	140	130	110
2	120	150	160	130

当一个工厂销售产品给自己的客户(公司所在区域的批销商)时,公司得到净销售收入(销售价格减去正常的运输成本)是产品 1 得到 83 美元,产品 2 得到 112 美元。然而,也有可能(偶然希望)一个工厂运输产品到国家的另一区域帮助弥补其他工厂的销售。在这种情况下,将增加每单位产品 1 的 9 美元,每单位产品 2 的 7 美元的额外运输成本。

管理层需要决定每月每家工厂每条生产线的每种产品应该生产多少、销售多少、应该运往其他工厂的客户是多少。目标是决定哪一个可行计划的利润最高(总的净收益减去生产成本、库存成本和额外的运输成本)。

- (a) 建立完整的线性规划模型的代数形式,表示出问题的单个约束和决策变量。
- C(b) 在 Excel 电子表格中建立同样的模型。然后使用 Excel Solver 求解模型。
- C(c) 使用 MPL 以简洁的方式建立模型,然后使用 MPL Solver CPLEX 求解模型。
- C(d) 使用 LINGO 简洁的方式建立模型,然后使用 LINGO Solver 求解模型。

C3.6-2 再考虑习题 3.1-11:

- (a) 使用 MPL/CPLEX 建立和求解模型。
- (b) 使用 LINGO 建立和求解模型。

C3.6-3 再考虑习题 3.4-12:

- (a) 使用 MPL/CPLEX 建立和求解模型。
- (b) 使用 LINGO 建立和求解模型。

C3.6-4 再考虑习题 3.4-16:

- (a) 使用 MPL/CPLEX 建立和求解模型。
- (b) 使用 LINGO 建立和求解模型。

C3.6-5 再考虑习题 3.5-5:

(a) 使用 MPL/CPLEX 建立和求解模型。

(b) 使用 LINGO 建立和求解模型。

C3.6-6 再考虑习题 3.5-6:

(a) 使用 MPL/CPLEX 建立和求解模型。

(b) 使用 LINGO 建立和求解模型。

3.6-7 Quality Paper 公司是一家大型造纸公司。该公司有 10 个造纸厂,需要供应 1 000 个客户。使用三种可替代类型的机器和四种原材料制造五种不同类型的纸产品。因此公司需要制订详细的生产分配计划,使每月份生产和销售纸的成本最低。具体地,必须联合决定每一工厂的每种类型的机器生产的每种纸的数量,以及每种纸从每一个工厂运到每一个客户的数量。

相关的数据的符号表述如下:

D_{jk} = 客户 j 需要的 k 类型纸的数量。

r_{klm} = 在机器 l 上生产 1 单位的 k 类型纸所需原材料 m 的数量。

R_m = 工厂 i 可用原材料 m 的数量。

c_{kl} = 生产 1 单位 k 类型纸消耗的机器 l 的生产能力。

C_{il} = 工厂 i 的 l 类型的机器的生产能力。

P_{ikl} = 工厂 i 的 l 类型的机器生产 k 类型纸的成本。

T_{ijk} = 从工厂 i 到客户 j 运输 k 类型纸的运输成本。

(a) 使用这些符号手工建立这个问题的线性规划模型。

(b) 这个模型有多少个决策变量和约束函数?

(c) 使用 MPL 建立模型。

(d) 使用 LINGO 建立模型。

3.7-1 从本章末参考文献下端部分,找出线性规划得奖应用的其中一篇。阅读该论文,然后用两页纸写出应用的概要及其带来的效益(包括非财务的效益)。

3.7-2 从本章末参考文献下端部分,选择线性规划得奖应用中的三篇,对每一篇进行阅读,并各用一页纸概述其应用和其带来的效益(包括非财务效益)。



案例 汽车装配

汽车联盟公司是一家大型汽车制造公司。它制造的汽车分三个车系:卡车系、小汽车系、中型和豪华车系。位于底特律郊外的一个工厂组装中型和豪华车系的两个车型。第一个车型——Family Thrillseeker,是四门的私家轿车,配有乙烯基座椅、塑料内饰、标准配置、低油耗。它定位为紧缩预算的中产阶级家庭,每销售一辆 Family Thrillseeker 可为公司产生 3 600 美元的利润。第二个车型——Classy Cruiser 是两门的豪华私家轿车,有皮革座椅、木质内饰、定制配置和巡航能力。它定位于有影响的富裕的中上层家庭。每销售一辆 Classy Cruiser 为公司产生 5 400 美元的利润。

Rachel Rosencrantz 是装配工厂的管理者,正在考虑下一个月的生产计划。具体地说,她必须决定生产多少 Family Thrillseeker 和 Classy Cruiser,以使公司的利润最大化。

她知道公司本月有 4 800 劳动力小时的生产能力,也知道组装一辆 Family Thrillseeker 需要 6 个工时,组装一辆 Classy Cruiser 需要 10.5 个工时。

因为工厂仅仅是一个组装工厂,组装两个车型必须的部分部件不在工厂生产,而需要从密歇根附近区域的其他工厂运输,例如轮胎、控制、车轮、窗户、座位和门都来自不同的供应工厂。Rachel 知道下个月她将从车门供应者那里获得 20 000 个车门(10 000 个左边的门,10 000 个右边的门)。最近的一次罢工迫使某个供应商工厂关闭了几天,该工厂下个月将不能满足它的生产计划。Family Thrillseeker 和 Classy Cruiser 也使用同样的车门。

此外,公司对上个月不同车型的需求预测表明,Classy Cruiser 的需求限于 3 500 辆,Family Thrillseeker 在组装工厂的生产能力内没有需求限制。

(a) 建立和求解线性规划模型,决定 Family Thrillseeker 和 Classy Cruiser 应该组装的数量。

在制订最终的生产计划之前,Rachel 决定独立研究下列问题,除非另有说明。

(b) 营销部门知道能够开展一个目标为 500 000 美元的广告计划,将带来下个月 Classy Cruiser 20% 的需求增长。这个计划应该进行吗?

(c) Rachel 知道通过超时使用劳动力增加工厂的生产能力,能增加工厂 25% 的生产能力。利用这个新的组装工厂的生产能力,能够组装多少辆 Family Thrillseeker 和 Classy Cruiser?

(d) Rachel 知道超时劳动力没有额外的成本不能够获得。愿意付出的以通常时间的劳动力成本之外的最大劳动力成本是多少? 给出你的总体答案。

(e) Rachel 研究了使用有目标的广告计划和超时劳动力两者的选择。广告计划带来 Classy Cruiser 20% 的增长,超时劳动带来 25% 生产能力的提高。如果 Classy Cruiser 带来的销售利润比 Family Thrillseeker 带来的多 50%,使用广告计划和超时劳动力,Family Thrillseeker 和 Classy Cruiser 应该组装多少辆?

(f) 已知广告计划的成本是 500 000 美元,在通常的时间以外,最大的劳动力超时使用的成本是 1 600 000 美元,(e)中得到的解比(a)中得到的解明智吗?

(g) 公司已经决定经销权确实使产品的 Family Thrillseeker 价格打折扣并减少很多,由于和经销者的利润共享,公司从 Family Thrillseeker 获得的利润不是 3 600 美元,而是 2 800 美元。在这个折扣价格下,决定 Family Thrillseeker 和 Classy Cruiser 的组装数量。

(h) 公司通过在组装线末端测试发现了 Family Thrillseeker 的质量问题。监督者发现有 60% 的概率,四个门中的两个不能正常地封闭。因为随机测试发现有缺陷的 Family Thrillseeker 的比率太高了,监督者决定对每一辆 Family Thrillseeker 执行质量控制测试。组装它的时间已经增加到 6~7.5 小时。确定在 Family Thrillseeker 新的组装时间下,每一种车型的组装数量。

(i) 公司的董事会希望得到豪华私家轿车市场更大的份额,因此将满足 Classy Cruiser 的全部需求。他们让 Rachel 确定与(a)中得出的利润相比将减少多少利润? 如果减少的利润不超过 2 000 000 美元,他们让 Rachel 满足 Classy Cruiser 的全部需求。

(j) 通过结合所有在(f)、(g)、(h)中描述的新的考虑,关于是否最终进行广告计划、是否使用超时劳动力、Family Thrillseeker 的组装数目、Classy Cruiser 的组装数目。她的最终决策是什么?

求解线性规划问题——单纯形法

我们现在开始学习求解线性规划问题的基本方法——单纯形法。单纯形法是 1947 年由乔治·丹捷格 George Dantzig^① 提出的,它已被证实是真正有效的方法,如今通常用于在计算机上解决大型问题。除了一些小的问题,这种方法总是在计算机上实现,而完善的软件包已得到广泛的应用。单纯形法的延伸和变化也被用来对模型进行优化后分析(包括灵敏度分析)。

本章介绍单纯形法的主要内容。第一节介绍单纯形法的一般原理,包括它的几何解释,接下来的三节讲述用单纯形法求解任意标准形式线性规划问题的一般过程,该标准形式结构为:目标函数最大化;所有约束条件以“ \leq ”连接;所有变量取值为非负的形式;所有的约束右端项 b_i 的值要求为非负。详细的求解过程在 4.5 节讲述,4.6 节讲述怎样对单纯形法进行改造以适用于其他模型形式。接下来的 4.7 节我们讨论优化后分析,4.8 节讲述单纯形法在计算机上的实现,4.9 节介绍求解大型线性规划问题时单纯形法的替代方法——内点算法。



4.1 单纯形法的实质

单纯形法是一个代数计算过程,然而,它本质上是基于几何原理。了解这些几何原理能为我们理解单纯形法的运算步骤提供非常直观的解释,同时也有助于我们理解为什么单纯形法会如此有效。因此,在详细讨论单纯形法的代数原理之前,本节将从几何角度来研究问题的图形。

为了说明一般的几何原理,我们将以 3.1 节中提到的 Wyndor Glass 公司问题为例(4.2 节和 4.3 节用单纯形法的代数算法解决的是同一个例子)。5.1 节将进一步说明解

^① 广受人们尊敬的乔治·丹捷格堪称运筹学最重要的先驱者,由于在单纯形法及其他方面的很多重要贡献,他被称为线性规划之父。本书作者很荣幸地在斯坦福大学工作近 30 年,直到丹捷格博士 2005 年于 90 岁去世前,他始终积极参与运筹学的活动。

决大型问题的几何原理。

让我们重新回顾一下这个例子的模型和图形(如图 4.1 所示)。在图 4.1 中,5 个约束条件的边界线及其交点被加重标出,因为它们是分析问题的关键。图中,每个约束边界(constraint boundary)是一条直线,该直线就是满足对应约束的边界线。交点是这个问题的角点解(corner-point solutions),可行域的五角点(0,0)、(0,6)、(2,6)、(4,3)和(4,0)是角点可行解(CPF solution)[另外三个角点(0,9)、(4,6)和(6,0)称作角点非可行解]。

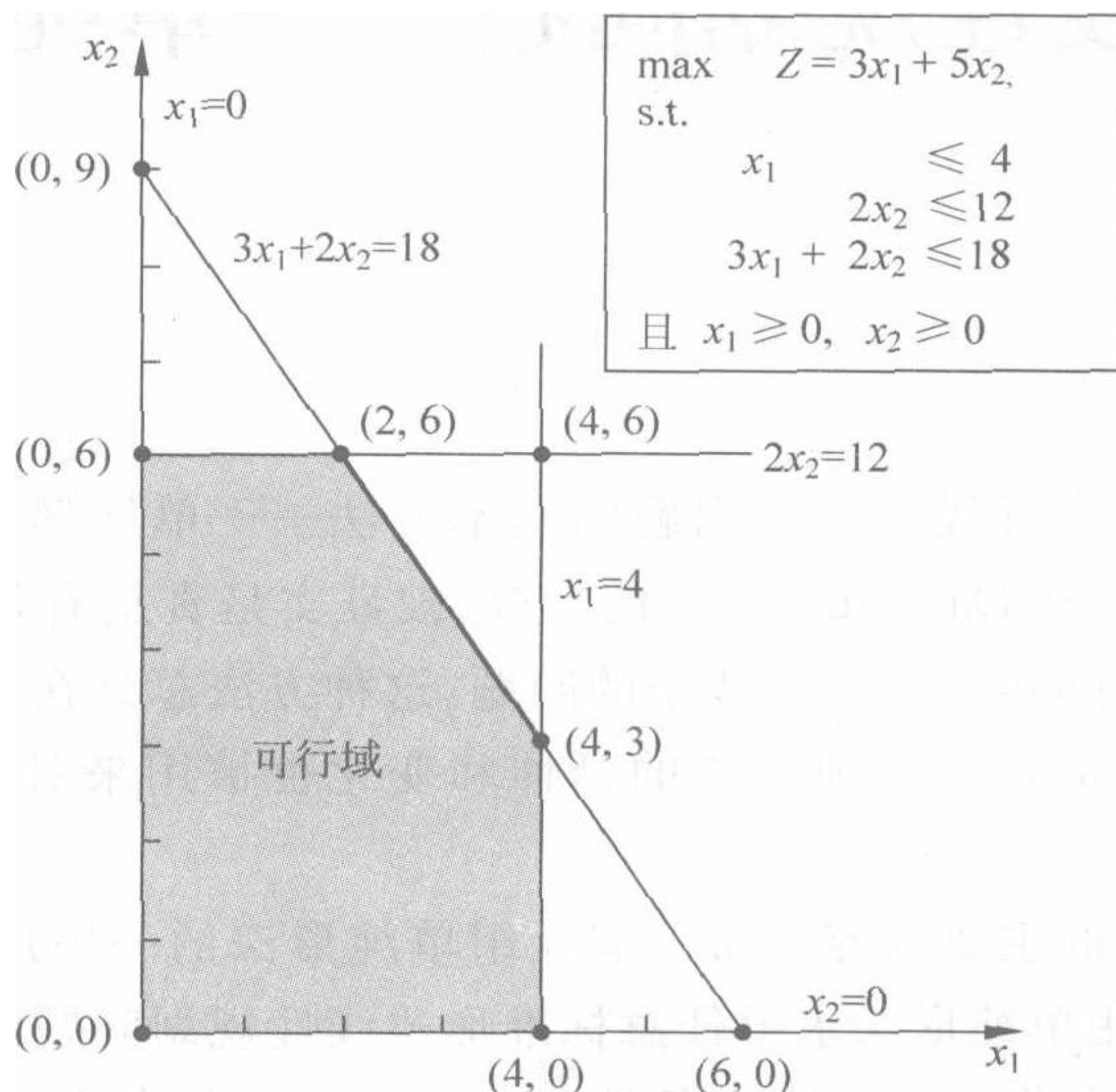


图 4.1 Wyndor Glass 公司问题的约束边界和角点解

在这个例子中,每个角点解位于两个约束边界线的交点处(对一个有 n 个决策变量的线性规划问题来说,每个角点解位于 n 条约束边界的交点处^①)。在图 4.1 中,某两个 CPF 解位于同一条约束边界上,而其他 CPF 解则不在这条线上。因此,用以下定义来区别这些情况是非常重要的。

对任意含 n 个决策变量的线性规划问题而言,当两个 CPF 解点位于 $n-1$ 条相同的约束边界上时,它们是相邻的(adjacent)。这两个相邻的 CPF 解连成一条线段,该线段就位于约束边界线上。这样一条线段就被称为可行域的边(edge)。

本例中,因为 $n=2$,所以它的两个 CPF 解在同一条约束边界线上时都是相邻的,例如(0,0)和(0,6)是相邻的,因为它们在同一条约束边界 $x_1=0$ 上。图 4.1 的可行域有五条边,是由形成这个可行域的五条线段组成的。注意,两条边界线产生一个 CPF 解。因此,每个 CPF 都有两个相邻的 CPF 解(每一个都在两条边之一的另一端),正如在表 4.1 中列举的那样(在该表的每一行,第一列里的 CPF 解与第二列里的两个 CPF 解都相邻,

^① 尽管 CPF 解是根据 n 条约束边界的交点定义的,但是一条或多条约束边界线通过同一个点也是很有可能的。

但是这两个 CPF 解并不相邻)。

我们之所以对相邻的 CPF 解感兴趣是因为后续介绍的这些解的基本性质能为我们判断某个 CPF 解是否最优提供一个有效的方法。

表 4.1 Wyndor Glass 公司问题每个 CPF 解的相邻 CPF 解

CPF 解	相邻 CPF 解
(0,0)	(0,6)和(4,0)
(0,6)	(2,6)和(0,0)
(2,6)	(4,3)和(0,6)
(4,3)	(4,0)和(2,6)
(4,0)	(0,0)和(4,3)

最优性检验(optimality test): 考虑任一个至少拥有一个最优解的线性规划问题。如果一个 CPF 解没有比它更好(以 Z 来衡量)的相邻 CPF 解,那么它就是最优解。

因此,例如,(2,6)必定最优,因为相应的 $Z=36$,大于(0,6)对应的 $Z=30$ 和(4,3)对应的 $Z=27$ (我们将会在第 5.1 节中深入讨论这个性质为什么成立)。最优性检验是单纯形法计算一个步骤,在判断是否得到最优解时使用。

我们下面就开始应用单纯形法求解该示例。

示例的求解

以下是单纯形法求解 Wyndor Glass 公司问题时的运算过程(从几何角度)的概述。在每一个步骤中,先给出了结论,然后在括号中给出了理由(参见图 4.1,可以直观看出)。

起始步骤: 选择(0,0)作为初始 CPF 解来测试(这是一个方便的选择,因为不必计算即可确定这个初始 CPF 解)。

最优性检验: 得出结论,(0,0)不是最优解(相邻的 CPF 解优于它)。

迭代 1: 通过执行以下 3 个步骤,移至较优的相邻 CPF 解(0,6)。

1. 考虑从(0,0)点发出的可行域的两个边界线,选择沿着 x_2 轴的边界线移动(由目标函数 $Z=3x_1+5x_2$ 可知,沿着 x_2 轴移动时 Z 的增长速度比沿着 x_1 轴移动时更快)。

2. 移动至第一个约束边界线 $2x_2=12$ 处停止。若沿着步骤 1 所说的方向移动至更远处则会离开可行域,例如,移至这个方向的第二个新的约束边界得到点(0,9),这个点是角点非可行解。

3. 解出新的一组约束边界线的交点(0,6)(这些约束边界的方程组 $x_1=0$ 和 $2x_2=12$ 立即能给出这个解)。

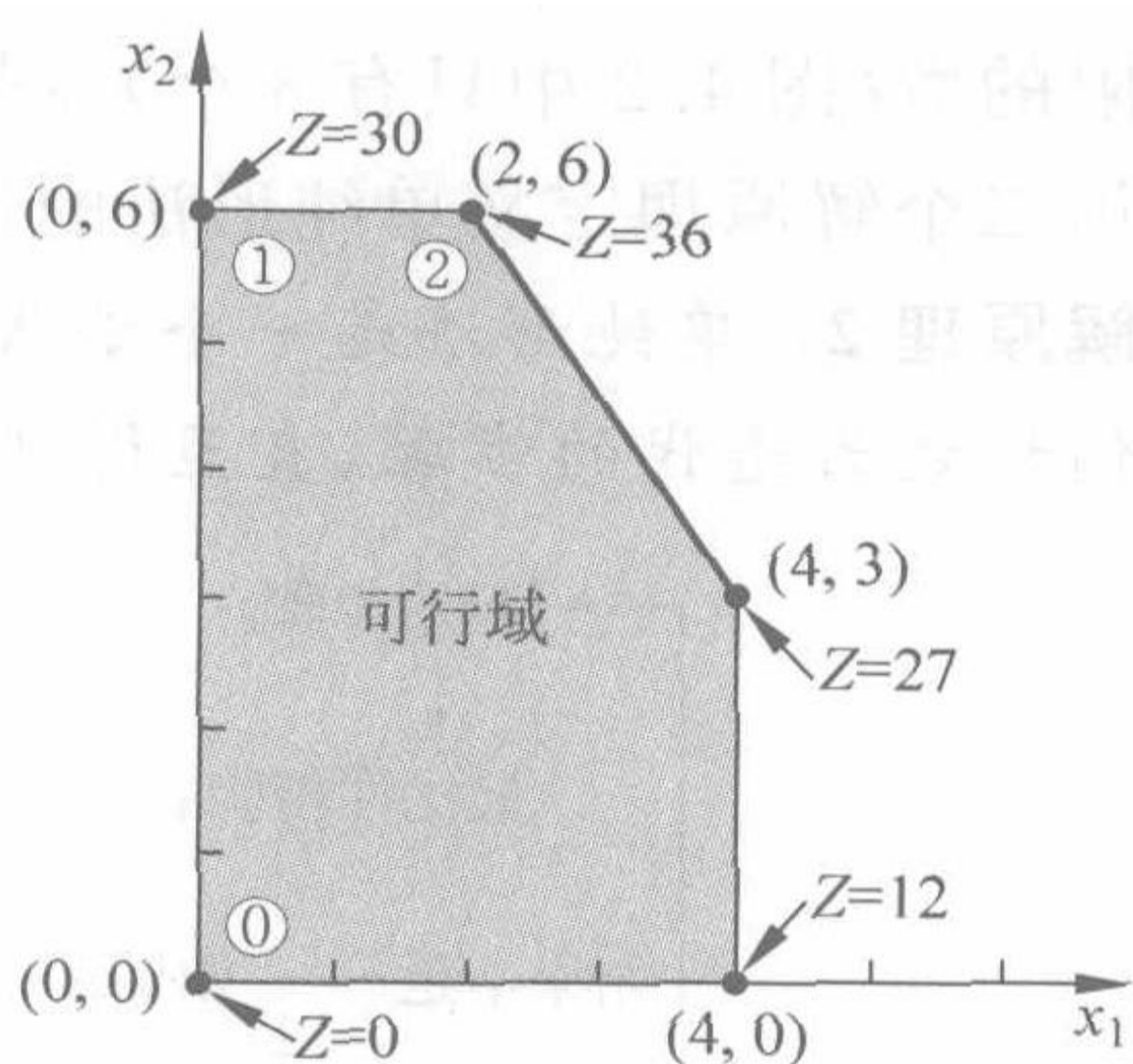


图 4.2 本图显示了用单纯形法求解 Wyndor Glass 公司问题时测试的 CPF 解序列(①、②),仅测试了这三个解后就得到了最优解(2,6)

最优性检验：得出结论，(0,6)不是最优解(有一个相邻的 CPF 解优于它)。

迭代 2：通过以下 3 个步骤，移至较优的相邻 CPF 解(2,6)。

1. 考虑从(0,6)点发出的可行域的两个边界线，选择沿着指向右边的边界线移动(沿着这个方向的边界线移动时 Z 增大，而返回沿着 x_2 轴移动时 Z 减小)。

2. 沿着 $3x_1 + 2x_2 = 12$ 移动时，在第一个约束边界 $2x_2 = 12$ 处停止(沿着步骤 1 所说的方向移动至更远处时会离开可行域)。

3. 解出新的一组约束边界线的交点(2,6)(联立这些约束边界的方程组 $3x_1 + 2x_2 = 12$ 和 $2x_2 = 12$ ，立即就能得出这个解)。

最优性检验：得出结论，(2,6)是最优解，结束(没有相邻的 CPF 解优于它)。

CPF 解检验的结果如图 4.2 所示。在图中，每个圈出的数字代表该次迭代得到了这个解。

现在，让我们来看看单纯形法六个关键的解原理，这些解原理提供了上述步骤背后的基本原理(记住，这些原理对拥有两个以上决策变量的问题也适用，但是要想快速地寻找最优解，则无法得到如图 4.2 那样的图形)。

关键的解原理

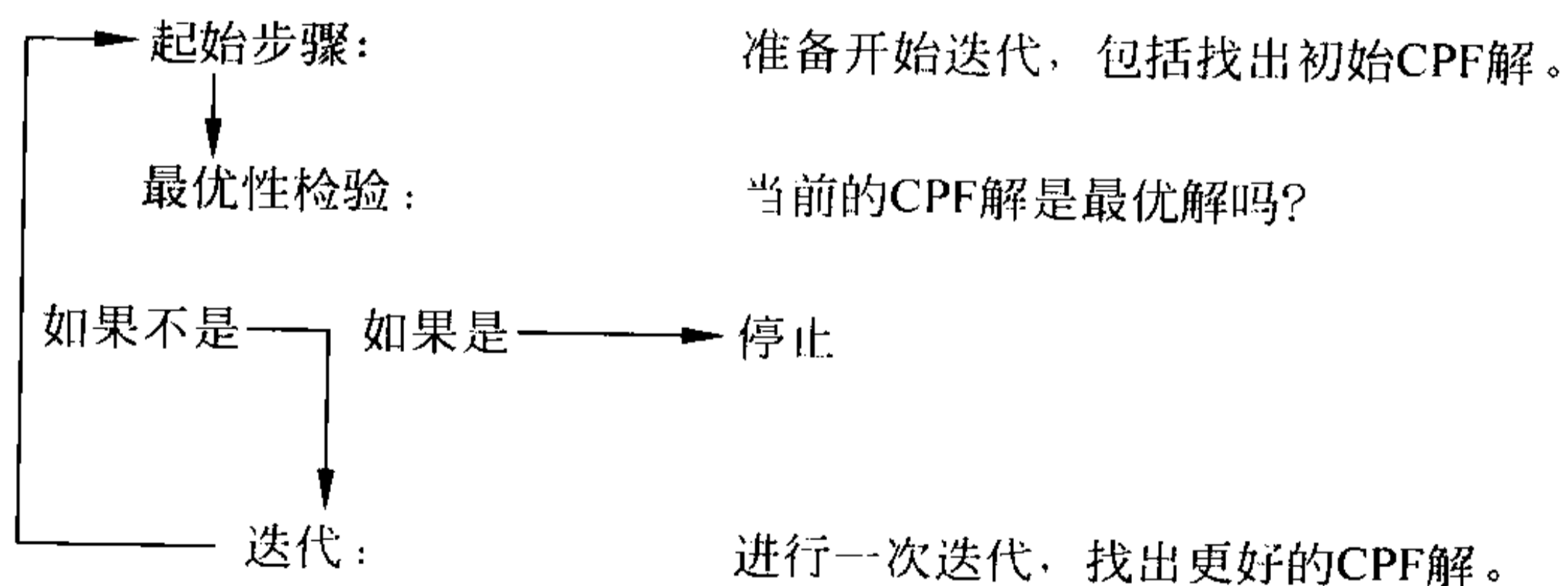
第一个解原理直接建立在 3.2 节结尾给出的最优解和 CPF 解的关系上。

解原理 1：单纯形法只关注 CPF 解。对于至少有一个最优解的问题来说，找到一个最优解只需找到最好的 CPF 解。^①

因为可行解的个数一般来说有无限多个，因此将需要测试的解的个数减至一个很小的有限的数(图 4.2 中只有 3 个)就是一个大大的简化。

第二个解原理定义单纯形法的过程。

解原理 2：单纯形法是一个迭代算法(一个系统化的求解过程，它重复着一系列固定的我们称之为迭代的步骤，直至得到期望的结果)，结构如下。



请注意，上述求解该问题的过程，两次迭代都是按着此流程图进行，直至找到最优解。下面讨论如何开始求解。

解原理 3：只要有可能，单纯形法的起始步骤就选择原点(所有的决策变量值为 0)作为初始 CPF 解。当有太多的决策变量以致不能以图解方式找出初始 CPF 解时，这个选择可以减少为寻找初始 CPF 解而需要使用的代数运算步骤。

^① 唯一的限制是这个问题必须有 CPF 解。只要可行域有界，这一点就能保证。

如果所有的决策变量为非负约束,一般选择原点作为初始 CPF 解是可能的,因为这些约束边界相交形成原点就是角点解,那么这个解也就是 CPF 解,除非它因不满足一个或多个约束条件而不可行。如果它是非可行解的话,则需要运用 4.6 节中讲述的寻找初始 CPF 解的特殊处理方式了。

下一个解原理关注的是在每次迭代中如何选择一个更好的 CPF 解。

解原理 4: 已知一个 CPF 解,从计算上来说,获取它的相邻 CPF 解的信息比获取其他 CPF 解的信息快。因此,在进行单纯形法迭代,从当前 CPF 解移向更好的 CPF 解的计算时,总是选择相邻的 CPF 解,不考虑其他 CPF 解。因此,后续直至寻找出最优解的全部轨迹实际上是沿着可行域的边界的。

下一个问题关注的是在每一次迭代中选择哪一个相邻的 CPF 解的问题。

解原理 5: 得到当前的 CPF 解后,单纯形法考察从这个解出发的可行域的每一条边。虽然每一条边都指向另一端的相邻 CPF 解,但是单纯形法并不需要费时去计算相邻 CPF 解,而是仅仅判断沿着这条边界线移动时的 Z 的增长率。在拥有正的增长率的边界线中,它选择沿着增长率最大的那条边界线移动。当求出这个边界线的另一端的相邻 CPF 解后,它也是进行最优性检验以及下一次迭代(如果需要的话)的当前 CPF 解,迭代就完成了。

在本例的第一次迭代中,从 $(0,0)$ 沿着 x_1 轴移动时 Z 的增长率是 3(x_1 每增加一个单位, Z 增加 3 个单位),而沿着 x_2 轴移动时 Z 的增长率是 5(x_2 每增加一个单位, Z 增加 5 个单位)。因此,选择沿着后者移动。在第二次迭代中,从 $(0,6)$ 发出的唯一的会使 Z 增长率为正的边界线是指向 $(2,6)$ 的边界线,因此沿着这个边界移动。

最后一个解原理阐明最优性检验是如何有效进行的。

解原理 6: 解原理 5 阐述了单纯形法是如何考察从当前 CPF 解发出的可行域的每条边的。这种对边界线的考察可以很快得出沿着边界线向另一端的相邻 CPF 解移动时 Z 的增长率。 Z 增长率为正,意味着相邻的 CPF 解优于当前 CPF 解; Z 增长率为负,意味着相邻的 CPF 解并不优于当前 CPF 解。因此,最优性检验就是检查是否有边界线会带给 Z 正的增长率,如果没有,则证明当前的 CPF 解是最优的。

在这个例子中,沿着 $(2,6)$ 出发的任何一条边界线移动时, Z 均会减少。因为我们要使 Z 最大,所以我们可以得出结论 $(2,6)$ 是最优解。



4.2 构建单纯形法

4.1 节强调了单纯形法所基于的几何原理。但是,这个算法通常是在计算机上实施的,而计算机只能执行代数运算,因此需要把上述的以几何原理叙述的求解过程转化为可应用的代数计算步骤。本节介绍单纯形法的代数表达,并把它与上一节中讲述的原理联系起来。

代数求解步骤是建立在求解方程组的基础上的,因此,构建单纯形法的第一步是把不等式约束转化为等价的等式约束(变量的非负约束保留不等式形式,因为它们被单独处理)。这个转化依靠引入松弛变量(slack variables)来完成。为了说明这一点,我们来看

3.1 节中 Wyndor Glass 公司例子的第一个约束条件： $x_1 \leq 4$ 。

松弛变量被定义为 $x_3 = 4 - x_1$ ，即等于不等式左边项的松弛量，因此， $x_1 + x_3 = 4$ 这个等式中，当且仅当 $4 - x_1 = x_3 \geq 0$ 时， $x_1 \leq 4$ 。因此，原来的约束 $x_1 \leq 4$ 与这组约束 $x_1 + x_3 = 4$ 和 $x_3 \geq 0$ 是完全等价的。

在对其他约束条件引入松弛变量后，本例的线性规划模型（见下面左边）可以被下面右边的一个等价的模型（称之为模型的扩展形式）替代。

模型的初始形式	模型的扩展形式 ^①
$\begin{aligned} \max \quad & Z = 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 \leq 4 \\ & 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ \text{且} \quad & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \max \quad & Z = 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s. t.} \quad & (1) \quad x_1 + x_3 = 4 \\ & (2) \quad 2x_2 + x_4 = 12 \\ & (3) \quad 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18 \\ & x_j \geq 0 (j=1, 2, 3, 4, 5) \end{aligned}$

尽管模型的两种形式完全代表一个问题，但是新的形式对于代数运算和求解 CPF 解而言更方便。我们称之为**模型的扩展形式** (augmented form)，因为通过引入运用单纯形法所需的松弛变量后，原形式被扩展表示。

如果当前解中的某一个松弛变量等于 0，则该解点位于对应约束条件的约束边界线上；如果值大于 0，则该解点在约束边界可行的一侧；如果值小于 0，该解点在约束边界不可行的一侧。这些性质在你的运筹指导册中的标题为“**松弛变量的解释**” (demonstration example) 的内容里给予了证明。

4.1 节中使用的术语 (CPF 解等) 适用于问题的原始形式，我们现在介绍与扩展形式相对应的术语。

扩展解 (augmented solution)：是原始变量 (决策变量) 取值再加入相应的松弛变量取值后形成的解。

例如，在上例中，解 (3, 2) 的扩展解是 (3, 2, 1, 8, 5)，因为相应的松弛变量的值是 $x_3 = 1, x_4 = 8, x_5 = 5$ 。

基本解 (basic solution)：是一个扩展后的角点解。

为了说明，我们考虑图 4.1 的角点非可行解 (4, 6)。通过引入松弛变量的值 $x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = -6$ 进行扩展，会得到相应的基本解 (4, 6, 0, 0, -6)。

角点解 (以及基本解) 既可以是可行解也可以是非可行解，这意味着有以下定义：

基本可行解 (BF 解) 是扩展的 CPF 解。

因此，例子中的 CPF 解 (0, 6) 与扩展形式的 BF 解 (0, 6, 4, 0, 6) 是等价的。

基本解和角点解 (或者 BF 解和 CPF 解) 的唯一区别在于是否包括松弛变量。对任何一个基本解而言，相应的角点解仅需通过删除松弛变量获得。因此，这两种解的代数、几何关系十分接近，如 5.1 节中所述。

因为**基本解**和 BF 解是线性规划标准词汇的非常重要的部分，我们现在需要弄清楚

^① 松弛变量在目标函数中不显示，因为它们的系数为 0。

它们的代数性质。对本例的扩展形式,注意约束条件方程组中有5个变量和3个等式。因此

$$\text{变量个数} - \text{方程个数} = 5 - 3 = 2$$

这个方程组有2个自由度,由于可任选2个变量来赋予任意数值,那么可据此求解这3个方程得出其余3个变量的值。^①单纯形法把这个任意值设为0,因此,其中2个变量(称为非基变量)等于0,3个方程的对其他3个变量(称为基变量)的联立解就是基本解。这些性质由以下定义阐述。

一个基本解有如下性质:

1. 每个变量都可以作为非基变量或基变量。
2. 基变量的个数等于约束条件(现在是方程)的个数。因此,非基变量的个数等于变量总数减去约束条件个数。
3. 非基变量(nonbasic variables)的值设为0。
4. 基变量(basic variables)的值作为方程组(约束条件的扩展形式)的联立解被求得[这一组基变量通常被称为“基(the basis)”]。
5. 如果基变量满足非负约束,基本解为BF解(BF solution)。

为了说明这些定义,再来看一下BF解(0,6,4,0,6)。这个解通过扩展CPF解(0,6)得到,然而,求出同样的解的另一个方法是选择 x_1 和 x_4 作为非基变量,因此这两个变量设为0。3个方程分别能求出 $x_3=4$ 、 $x_2=6$ 、 $x_5=6$,作为3个基变量的解。

如下所示(基变量用粗体标出):

令 $x_1=0$, $x_4=0$,因此,有

$$\begin{array}{lclcl} (1) & x_1 & + & \mathbf{x_3} & = & 4 & \mathbf{x_3} = & 4 \\ (2) & & & 2\mathbf{x_2} & + & \mathbf{x_4} & = & 12 & \mathbf{x_2} = & 6 \\ (3) & 3x_1 & + & 2\mathbf{x_2} & & & + & \mathbf{x_5} & = & 18 & \mathbf{x_5} = & 6 \end{array}$$

因为这3个变量都是非负的,这个基本解(0,6,4,0,6)事实上是一个BF解。

就像称某两个CPF解是相邻的一样,与之对应的BF解也被称作是相邻的。这里有一个判断两个BF解何时相邻的简单的方法。

当非基变量只有一个不同时,两个BF解相邻(adjacent)。这意味着基变量除了一个不同外其余也是相同的,虽然其数值可能不同。

因此,从当前BF解转到另一个相邻的BF解时,围绕着把一个变量从非基变量转变为基变量来进行,反过来对另一个而言也一样(然后调整基变量的值以继续满足方程)。

为了说明相邻BF解,考虑图4.1中的一对相邻角点解(0,0)和(0,6),它们的扩展解(0,0,4,12,18)和(0,6,4,0,6)自然也是相邻BF解。因此,你无须看图4.1就得出这个结论。另一个标志是它们的非基变量 (x_1, x_2) 和 (x_1, x_4) 除了 x_2 被 x_4 代替外也相同。因此,从(0,0,4,12,18)移到(0,6,4,0,6)包括了把 x_2 从非基变量转变为基变量,而 x_4 从基变量变成了非基变量。

^① 只要方程组中不包括任何冗余方程,这种用于判断方程组的自由度的方法是有效的。这个条件对于由线性规划模型扩展形式的约束条件生成的方程组也是有效的。

当我们处理问题的扩展形式时,同时把目标函数当作新的约束方程考虑和处理会很方便。因此,在我们开始单纯形法前,这个问题须用同样的方法再改写一下。

$$\begin{aligned} \max Z \\ \text{s. t.} \\ (0) \quad Z - 3x_1 - 5x_2 &= 0 \\ (1) \quad x_1 + x_3 &= 4 \\ (2) \quad 2x_2 + x_4 &= 12 \\ (3) \quad 3x_1 + 2x_2 + x_5 &= 18 \end{aligned}$$

以及 $x_j \geq 0, (j=1,2,\dots,5)$

这样,方程(0)实际上似乎就作为初始约束条件中的一个,但因为它已经是等式形式,所以无须引入松弛变量。在多加了这个方程的同时,我们也在方程组中多加进了一个未知量 Z 。因此,当如上所述利用方程(1)至方程(3)求得一个基本解时,我们同时利用方程(0)求解 Z 。

比较幸运的是,Wyndor Glass 公司的模型符合我们的标准形式,它的约束条件都有非负的右端项 b_i 。如果情况不是这样的话,在运用单纯形法前就需作一些额外的调整了。这些细节将在 4.6 节中讲述,我们现在关注的是单纯形法本身。



4.3 单纯形法的代数

我们继续运用 3.1 节给出的例子,如 4.2 节末改写的那样,来作说明之用。为把单纯形法的几何原理和代数原理联系起来,我们在表 4.2 中从代数和几何两个角度,并行地概述单纯形法是如何求解这个例子的。(4.1 节中首先阐述的)几何角度是建立在模型的原始形式(没有松弛变量)的基础上的,因此当你阅读表的第二列时,为了更直观,仍可以参照图 4.1。同样,当你阅读表的第三列时,可参照 4.2 节末给出的模型的扩展形式。

下面讲述表 4.2 的第三列的每一个步骤的具体细节。

表 4.2 单纯形法如何解决 Wyndor Glass 公司问题的几何和代数解释

计算步骤	几何解释	代数解释
开始	取(0,0)为初始 CPF 解	取 x_1 和 x_2 为非基变量($=0$)而形成初始 BF 解: (0,0,4,12,18)
最优性检验	非最优,因为从(0,0)沿任一边界线移动都将使 Z 增加	非最优,因为增加任何一个非基变量(x_1 或 x_2)都将使 Z 增加
第 1 次迭代		
第 1 步	沿 x_2 轴上的边向上移动	增加 x_2 ,同时调整其他变量的值来满足约束方程组
第 2 步	当到达首个新约束边界($2x_2 = 12$)时停止	当首个基变量(x_3, x_4 或 x_5)下降到 0 时停止($x_4 = 0$)

续表

计算步骤	几何解释	代数解释
第3步	找到两个新约束边界线的交点： $(0, 6)$ 即为新的 CPF 解	x_2 成为新的基变量, x_4 成为新的非基变量, 解方程组, 得 $(0, 6, 4, 0, 6)$ 成为新的 BF 解
最优性检验	非最优, 因为从 $(0, 6)$ 沿边界向右移动, 可使 Z 增加	非最优, 因为增加一个非基变量 (x_1) 会使 Z 增加
第2次迭代		
第1步	沿边界向右移动	增加 x_1 , 同时调整其他变量的值来满足约束方程组
第2步	当到达首个新约束边界 ($3x_1 + 2x_2 = 18$) 时停止	当首个基变量 (x_2, x_3 或 x_5) 下降到 0 时停止 ($x_5 = 0$)
第3步	找到两个新约束边界线的交点： $(2, 6)$ 即为新的 CPF 解	x_1 成为新的基变量, x_5 成为新的非基变量, 解方程组, 得 $(2, 6, 2, 0, 0)$ 成为新的 BF 解
最优性检验	$(2, 6)$ 是最优的, 因为从该点沿任何一个边界移动都将使 Z 减少	$(2, 6, 2, 0, 0)$ 是最优的, 因为增加任一个非基变量 (x_4 或 x_5) 都将使 Z 减少

初始化

选择 x_1, x_2 为非基变量(这些变量设为 0), 作为初始 BF 解是建立在解原理 3 的基础上的。这个选择减少了从以下方程组(基变量用粗体标出)中求解 (x_3, x_4, x_5) 所需的工作。

令 $x_1 = 0, x_2 = 0$, 因此, 有

$$(1) \quad x_1 \quad + \mathbf{x}_3 = 4 \quad \mathbf{x}_3 = 4$$

$$(2) \quad 2x_2 \quad + \mathbf{x}_4 = 12 \quad \mathbf{x}_4 = 12$$

$$(3) \quad 3x_1 + 2x_2 \quad + \mathbf{x}_5 = 18 \quad \mathbf{x}_5 = 18$$

因此, 初始 BF 解(initial BF solution)是 $(0, 0, 4, 12, 18)$ 。

注意这个解是立即能够得到的, 因为每个方程只有一个基变量, 这个基变量的系数为 1, 且不在其他任何方程中出现。你很快将会看到当基变量的组合改变时, 单纯形法运用一个代数程序(高斯消元法)把方程组转化为同样的形式以便立即得出每一个 BF 解。这个形式称为高斯消元法的常态形(proper form from Gaussian elimination)。

最优性检验

目标函数为 $Z = 3x_1 + 5x_2$, 因此对于初始可行解, $Z = 0$ 。因为基变量 (x_3, x_4, x_5) 中没有一个在目标函数中有不为零的系数, 所以如果每一个非基变量 (x_1, x_2) 从零开始增长(基变量的值随之调整以满足方程组的约束^①)时, 它们的系数就会给 Z 一个正的贡献。

^① 注意到对变量 x_j 的系数的说明是基于这些变量位于等号右端的情况, 如 $Z = 3x_1 + 5x_2$ 。如果这些变量被移到等号左端, 如方程(0), $Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$, 这些非零系数即改变了符号。

这些贡献率(3 和 5)是正的。因此,基于 4.1 节所述的解原理 6,就可以得出(0,0,4,12,18)不是最优解。

后续的每一个经过迭代后而产生的 BF 解,都至少有一个基变量在目标函数中的系数不为零。因此,最优性检验将使用新方程(0)把目标函数改写成只含有非基变量的形式,稍后你将会看到。

应用案例

在动态和静态存储器及其他数字集成电路设备的销售商中,三星电子有限公司(SEC)是一家具有领先地位的公司。该公司位于韩国 Kiheung 地区(该地区可能是世界上最大的半导体制造区),每个月制造的硅晶片超过 30 万个,雇用的员工超过 1 万人。

循环周期这个行业术语是指从一批空白硅晶片投入制造过程直到晶片上的所有设计配件均装配完成所经历的时间。缩短循环周期现在是公司的一个目标,因为这样不但可以降低成本,而且可以缩短向顾客的交货时间。在竞争激烈的产业中,这种做法是保持或增加市场份额的一项关键因素。

要实现缩短循环周期的目的必须克服三个主要的挑战。首先是产品结构经常变化。其次,由于顾客需求预测的修改,公司需要经常在一个目标循环周期内修改休息时间安排。最后,由于通用类型的机器并不能完全相互协调,因此仅有一部分机器能够按照每一步的设计步骤进行装配。

为应对以上的挑战,运筹学团队开发了一个巨型线性规划模型,其中有上万个决策变量和函数约束。目标函数包括最小化延迟交货和成品库存。尽管该模型的规模较大,但是在 CPLEX 优化软件中应用成熟的单纯形法(及相关技术),在需要时可以在几分钟内求解该模型(CPLEX 将在 4.8 节详细讨论)。

该模型现在仍在运行,并且极大地减少了制造动态随机存储器的生产循环周期,过去需要 80 天时间,而现在仅需要 30 天时间。巨大的改进及由此产生的制造成本及销售价格的降低使三星每年均会获得额外的 2 亿美元销售收入。

资料来源: R. C. Leachman, J. Kang, and Y. Lin, "SLIM: Short Cycle Time and Low Inventory in Manufacturing at Samsung Electronics," *Interfaces*, 32(1): 61-77, Jan.-Feb. 2002. (以下网址提供本文的链接: www.mhhe.com/hillier.)

确定移动的方向(迭代的步骤 1)

将一个非基变量从 0 开始增加(同时调整基变量的值以满足方程组的约束),相当于沿着从当前顶点可行解发出的边界线移动。在 4.1 节的解原理 4 和解原理 5 的基础上,做出增加哪一个非基变量的选择,如下:

$$Z = 3x_1 + 5x_2$$

增加 x_1 ? Z 的增长率 = 3

增加 x_2 ? Z 的增长率 = 5

$5 > 3$, 因此选择增加 x_2 。

正如接下来所说的,我们把 x_2 称为迭代 1 的入基变量。

在单纯形法的每一次迭代中,步骤 1 的目的是要选择一个非基变量,让它的值从 0 开始增加(同时调整基变量的值以满足方程组的约束)。从 0 开始增加这个非基变量的值将其转变为下一个 BF 解中的基变量。因此,这个变量被称为当前迭代的入基变量(因为它进入了基中)。

确定在何处停下(迭代的步骤 2)

步骤 2 说明的是在停止移动前入基变量能增加多少的问题。 x_2 增加, Z 会随之增加,因此,在可行域的范围我们希望移动的足够远以尽可能地增加 x_2 的值。满足扩展形式的约束条件(如下面所示)的要求意味着增加 x_2 (同时保持非基变量 $x_1=0$) 改变了一些基变量的值,如下面的右边所示:

令 $x_1=0$, 有

$$(1) \quad x_1 \quad \quad \quad + x_3 \quad \quad \quad = 4 \quad \quad \quad x_3 = 4$$

$$(2) \quad \quad \quad 2x_2 \quad \quad \quad + x_4 \quad \quad \quad = 12 \quad \quad \quad x_4 = 12 - 2x_2$$

$$(3) \quad 3x_1 \quad + 2x_2 \quad \quad \quad + x_5 = 18 \quad \quad \quad x_5 = 18 - 2x_2$$

另一个对可行性的要求是所有的变量必须为非负。非基变量(包括入基变量)是非负的,但是我们需要考察在基变量不破坏非负约束的条件下 x_2 值能增加多少。

$$x_3 = 4 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{对 } x_2 \text{ 增加没有上限限制}$$

$$x_4 = 12 - 2x_2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 \leq \frac{12}{2} = 6 \quad \leftarrow \text{最小值}$$

$$x_5 = 18 - 2x_2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 \leq \frac{18}{2} = 9$$

因此, x_2 只能增加至 6, 此时 x_4 减少为 0。若增加 x_2 的值超过 6 会使 x_4 变为负数, 违背了可行性要求。

这些计算被称为**最小比值试算**(minimum ratio test)。这个试算的目的是决定当入基变量增加时,哪个基变量最先减至 0。如果某一个约束方程中的入基变量系数为 0 或者为负值,我们可以立即划去该方程中的基变量,因为当入基变量增加时,这个基变量不会随之减少[正如方程(1)中的 x_3 那样]。然而,对入基变量的系数严格为正的方程来说,这个试算的内容是右端项与入基变量系数的比值。方程中拥有最小比值的基变量会随着入基变量值的增加首先减小到 0。

单纯形法迭代的步骤 2,是通过计算最小比值找出随着入基变量的增加首先减少到 0 的基变量。这个基变量变为 0 意味着在下一个 BF 解中它变成了非基变量。因此,这个变量被称为当前迭代的**出基变量**(leaving basic variable)(因为它被替换而离开了基)。

因此, x_4 是迭代的出基变量。

求解新的 BF 解(迭代的步骤 3)

把 x_2 从 0 增至 6 使左边的初始 BF 解变成了右边的新的 BF 解。

	初始 BF 解	新的 BF 解
非基变量	$x_1=0, x_2=0$	$x_1=0, x_4=0$
基变量	$x_3=4, x_4=12, x_5=18$	$x_3=?, x_2=6, x_5=?$

步骤 3 的目的是把方程组转化为对当前 BF 解进行最优性检验和下次迭代时(如果需要的话)更为方便的形式(高斯消元法的常态形)。在这个过程中,这种形式也会求出新的解中 x_3 和 x_5 的值。

以下再次出现完整的初始方程组,新的基变量以粗体标示(Z 变量在目标函数方程中作为基变量)。

$$\begin{aligned} (0) \quad Z - 3x_1 - 5x_2 &= 0 \\ (1) \quad x_1 + x_3 &= 4 \\ (2) \quad 2x_2 + x_4 &= 12 \\ (3) \quad 3x_1 + 2x_2 + x_5 &= 18 \end{aligned}$$

这样,在方程(2)中, x_2 代替 x_4 成为基变量。为了求解这个关于 Z, x_2, x_3 和 x_5 的方程组,我们需要进行一些初等代数变换运算(elementary algebraic operations)来把当前 x_4 的系数形式(0,0,1,0)变成 x_2 的新系数。我们可以运用以下两类初等代数变换运算:

1. 方程乘以(或除以)一个非零常量。
2. 从一个方程中加上(或减去)另一个方程的倍数。

要做上述运算,须注意在以上方程组中 x_2 的系数分别为 -5、0、2 和 2,而我们希望这些系数变为 0、0、1 和 0,为了把方程(2)的系数 2 变为 1。为此,我们用第一类初等代数变换运算,将方程(2)除以 2,就得到

$$(2) \quad x_2 + \frac{1}{2}x_4 = 6$$

为了把系数 -5 和 2 变为 0,我们运用第二类初等代数变换运算。我们把方程(0)加上新的方程(2)的 5 倍,方程(3)减去新的方程(2)的 2 倍,结果新的方程组如下

$$\begin{aligned} (0) \quad Z - 3x_1 + \frac{5}{2}x_4 &= 30 \\ (1) \quad x_1 + x_3 &= 4 \\ (2) \quad x_2 + \frac{1}{2}x_4 &= 6 \\ (3) \quad 3x_1 - x_4 + x_5 &= 6 \end{aligned}$$

因为 $x_1=0, x_4=0$,由这个形式的方程组可立即得出新的 BF 解, $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 6, 4, 0, 6), z=30$ 。

得出线性方程组联立解的这个计算过程称为高斯-乔丹消去法,或简称高斯消元法(Gaussian elimination)。^① 这个方法的核心原理是运用初等代数变换运算把初始方程组变为高斯消元法的常态形。在这个形式中,每一个基变量从原来所在的方程以外的其他方程中消去,而在该方程中系数为 +1。

^① 事实上,高斯-乔丹消去法与高斯消元法在技术上存在一些不同之处,但我们在此忽略这一点。

新 BF 解的最优性检验

当前方程(0)给出以目前的非基变量表示的目标函数的值:

$$Z = 30 + 3x_1 - \frac{5}{2}x_4$$

从 0 开始增加任意一个非基变量(同时调整基变量的值以继续满足方程)都会导致移向两个相邻 BF 解得其中之一。因为 x_1 有正系数,增加 x_1 会导致相邻可行解优于当前 BF 解,因此当前解不是最优。

第 2 次迭代和最优解结果

由于 $Z = 30 + 3x_1 - \frac{5}{2}x_4$, Z 随着 x_1 而不是 x_4 的增加而增加,因此,步骤 1 选择 x_1 作为入基变量。

步骤 2 中,由当前方程组得出下述关于 x_1 能增加多少的结论。

$$x_3 = 4 - x_1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \leq \frac{4}{1} = 4$$

$$x_2 = 6 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{对 } x_1 \text{ 无上限约束}$$

$$x_5 = 6 - 3x_1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \leq \frac{6}{3} = 2 \leftarrow \text{最小比值}$$

因此,最小比值检验显示 x_5 是出基变量。

步骤 3 中, x_1 代替 x_5 成为基变量,我们对当前方程组进行初等代数变换把 x_5 的当前系数(0,0,0,1)变为 x_1 的新系数,得到如下新方程

$$(0) \quad Z \quad \quad \quad + \frac{3}{2}x_4 \quad \quad + x_5 = 36$$

$$(1) \quad \quad \quad x_3 \quad + \frac{1}{3}x_4 \quad - \frac{1}{3}x_5 = 2$$

$$(2) \quad \quad \quad x_2 \quad \quad \quad + \frac{1}{2}x_4 \quad \quad \quad = 6$$

$$(3) \quad x_1 \quad \quad \quad - \frac{1}{3}x_4 \quad + \frac{1}{3}x_5 = 2$$

因此,由下一个 BF 解 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 6, 2, 0, 0)$, 得出 $Z = 36$ 。对新的 BF 解进行最优性检验,我们依方程(0)把 Z 表达成目前非基变量的函数

$$Z = 36 - \frac{3}{2}x_4 - x_5$$

增加 x_4 或 x_5 均会使 Z 减少,因此任意一个相邻 BF 解都不会与当前 BF 解一样好。因此,根据 4.1 的解原理 6 可知,当前 BF 解必定最优。

根据问题的原始形式(无松弛变量),最优解为 $x_1 = 2, x_2 = 6$ 。由此求得 $Z = 3x_1 + 5x_2 = 36$ 。

下一节介绍更方便使用的单纯形法计算的另一例子,建议你阅读 OR Tutor 中标题为单纯形法——代数形式的介绍。这个形象逼真的介绍一步一步动态展示了单纯形法的代数和几何进展。类似本书其他部分介绍的例子,这项计算机的介绍突出了难以用文字

表达的概念。本书网站的工作例子部分包含了另一个应用单纯形法的例子。

为了帮助你学习单纯形法,你的 OR Courseware 中的 IOR Tutorial 中包含了一个标题为用单纯形法交互求解的程序。当你一步一步决策时,这个程序能执行几乎所有计算,使你能从烦琐的计算中抽身出来,专心研究概念。可能在你的家庭作业中要用到这个程序。这个软件还会帮助你在对问题第一次迭代出现错误时及时发现。

学习了单纯形法以后,你需要在计算机上实现并立即得到线性规划问题的最优解。为了你的方便,在 IOR Tutorial 中包含了一个被称为用单纯形法自动求解(Solve Automatically by the Simplex Method)的程序。这个程序设计仅仅用于教科书规模的问题,包括检查应用这个程序得到的解。第 4.8 节将介绍用于线性规划的更强大的软件方案,这也将在这本书网站中提供。

下一节包含对单纯形法更为方便的表格形式的概述。



4.4 单纯形法的表格形式

4.3 节中讲述的单纯形法的代数计算形式可能是理解这个算法基本逻辑关系的最好的计算形式。然而,它不是进行所需计算的最简便的形式。当你需要手工解决问题(或者借助运筹学课件进行交互学习时),我们推荐这节中讲述的表格形式。^①

单纯形法的表格形式仅反映模型的基本信息:①变量的系数;②方程式的右端项常量;③在每个方程中出现的基变量。这么做省去了书写每个方程变量字母符号的麻烦,但更重要的是它突出了计算中的数字以及精简了运算的记录内容。

表 4.3 比较了 Wyndor Glass 公司问题的原始方程组的代数形式(左边)和表格形式(右边),右边的表格被称为单纯形表,左边每个方程的基本变量都用粗体标出,且右边单纯形表的第一列也列出了基变量[尽管只有 x_j 是基变量或非基变量, Z 在方程(0)中也起基变量作用]。未列在这个基变量列的其余所有变量(x_1, x_2)自然就是非基变量,在我们设 $x_1=0, x_2=0$ 后,“右端项”这一列将给出基变量的解。因此初始 BF 解是 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 4, 12, 18), Z=0$ 。

表 4.3 Wyndor Glass 公司问题的初始方程组

(a) 代数形式	(b) 表格形式						右端项		
	基变量	方程	系数						
			Z	x_1	x_2	x_3		x_4	x_5
(0) $Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$	Z	(0)	1	-3	-5	0	0	0	0
(1) $x_1 + x_3 = 4$	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
(2) $2x_2 + x_4 = 12$	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
(3) $3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18

单纯形法的表格形式运用单纯形表(simplex tableau)来简洁地表示求解当前 BF 解的方程组。对这个解而言,最左侧列的每个变量等于最右侧列的相应的数值(未列出的变

^① 一种对计算机自动化操作更为简单的表格将在 5.2 节中讲述。

量值为0)。当进行最优性检验或迭代时,仅仅与Z列右侧的那些数值相关。^①行(row)指的是Z列右面的一行数字(包括右端项数字),行*i*与方程(*i*)相对应。

我们下面总结单纯形法的表格形式,同时,简单地介绍它在Wyndor Glass公司问题中的应用。记住,这个逻辑与上一节讲述的代数形式是一样的。只是当前和后续迭代得到的方程组的表现形式有了改变(还有,在最优性检验或进行迭代中步骤1和步骤2作判断时,我们无须把变量移到方程的右端项)。

单纯形法的总结(以迭代1为例)

初始化

引入松弛变量,选择决策变量作为非基变量(使之变为0),松弛变量则作为基变量。[当模型不为标准形式(标准形式:最大化,约束条件只是 \leq 的形式,所有变量为非负或者 b_i 值为负)时所需做的一些调整,参见4.6节。]

本例中,这种选择得出了表4.3中(b)栏所显示的单纯形表,从而初始BF解为(0,0,4,12,18)。

最优性检验

当且仅当0行的每个系数为非负(≥ 0)时,当前BF解为最优解。如果是最优,就停止计算;否则,进行一次迭代以得到下一个BF解,迭代内容包括将一个非基变量转换为基变量(步骤1),以及相应的把一个基变量转变为非基变量(步骤2),然后寻求新的解(步骤3)。

本例中:对于目标函数 $Z=3x_1+5x_2$,显然,增加 x_1 或 x_2 会使 Z 增加,所以当前BF解不是最优的,同样的结论也可以从方程 $Z-3x_1-5x_2=0$ 中得出,系数-3和-5出现在表4.3中(b)栏的0行上。

迭代

步骤1:确定入基变量:选择拥有最大绝对值的负系数(即最负的系数)的变量(自然是非基变量)作为入基变量。框出在这个系数下面的列,称其为枢轴列(pivot column)。

本例中,最负的系数是 x_2 的系数-5,因此 x_2 将会变成基变量(表4.4指出了这种变化,在 x_2 列-5的下面用框标出)。

表4.4 运用最小比值测算确定Wyndor glass公司问题的第一个出基变量

基变量	方程	系数						右端项	比率
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Z	(0)	1	-3	-5	0	0	0	0	
x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4	
x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	$12 \rightarrow \frac{12}{2} = 6 \leftarrow$ 最小值	
x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	$18 \rightarrow \frac{18}{2} = 9$	

^① 因为这个原因,为了减少单纯形表的容量,也允许把方程序号列和变量Z列去掉。我们更愿意保留这些列,以提示我们单纯形表中正在求解的当前方程组,Z是方程(0)的变量之一。

步骤 2: 通过最小比值测算确定出基变量。

最小比值测算:

1. 找出枢轴列中每一个严格为正(≥ 0)的系数;
2. 用每一个系数除以同一行的右端项, 写到同一行上;
3. 找出比值最小的行;
4. 该行上的基变量即为出基变量, 因此在下一个单纯形表中的基变量列中用入基变量代替这个变量。

框出这一行, 称为枢轴行(pivot row)。同样把在同时处在两个框中的数字称为枢轴数(pivot number)。

本例中, 最小比值测算的计算已写在表 4.4 的右边。因此, 第 2 行是枢轴行(看表 4.5 的第一张单纯形表中这一行中的框), x_4 是出基变量。在下一张单纯形表(见表 4.5 的底部)中, x_2 取代 x_4 成为第 2 行的基变量。

步骤 3: 通过初等行变换运算(一行乘以或者除以一个非零常数; 一行加上或减去另一行的倍数), 按高斯消元法, 在当前表的下方构建一个新的单纯形表, 然后返回最优性检验步骤。需要实施的特定的初等行变换运算如下:

1. 枢轴行除以枢轴数。在步骤 2 和步骤 3 中用到新的枢轴行。
2. 对枢轴列中有负系数的其他行(包括 0 行), 把该负系数的绝对值和新枢轴行的乘积加到该行中去。
3. 对每枢轴列中拥有正系数的其他行(包括 0 行), 减去该系数和新枢轴行的乘积。

表 4.5 Wyndor Glass 公司问题中, 第一个枢轴行除以第一个枢轴数后的单纯形法

迭代	基变量	方程	系 数					右端项	
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4		x_5
0	Z	(0)	1	-3	-5	0	0	0	0
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18
1	Z	(0)	1						
	x_3	(1)	0						
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
	x_5	(3)	0						

本例中, 由于 x_2 代替 x_4 成为基变量, 所以我们需要把第 1 个表中的 x_4 列系数(0, 0, 1, 0)格式复制给第 2 张表格中的 x_2 列。首先, 枢轴行(第 2 行)除以枢轴数(2), 就得到了表 4.5 中新的第 2 行。接下来, 我们在第 0 行上加上新第 2 行数的 5 倍, 再从第 3 行减去新第 2 行数的 2 倍(或者等价的, 减去原来的第 2 行数)。这些计算形成表 4.6 中迭代 1 所示的新单纯形表。因此, 新的 BF 解是(0, 6, 4, 0, 6), 且 $Z=30$ 。下一步我们回到最优性检验, 看新的 BF 解是否为最优解。因为新的 0 行中仍有负系数(x_1 的 -3), 这个解仍不是最优解, 因此, 至少还需要一次迭代。

表 4.6 Wyndor Glass 公司问题的前两张单纯形表

迭代	基变量	方程	系 数					右端项	
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4		x_5
0	Z	(0)	1	-3	-5	0	0	0	0
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18
1	Z	(0)	1	-3	0	0	$\frac{5}{2}$	0	30
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
	x_5	(3)	0	3	0	0	-1	1	6

本例的第 2 次迭代与最优解

第 2 次迭代从表 4.6 的第 2 个单纯形表重新开始寻找下一个 BF 解。按照步骤 1 和步骤 2 的说明,我们找到 x_1 是入基变量, x_5 是出基变量,如表 4.7 所示。

步骤 3 中,我们先把表 4.7 中枢轴行(第 3 行)除以枢轴数(3)。接着,把新第 3 行的 3 倍加到第 0 行上,最后,从第 1 行中减去新第 3 行。

表 4.7 Wyndor Glass 公司问题中迭代 2 的步骤 1 和步骤 2

迭代	基变量	方程	系 数					右端项	比率	
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4			x_5
1	Z	(0)	1	-3	0	0	$\frac{5}{2}$	0	30	
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4	$\frac{4}{1}=4$
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6	
	x_5	(3)	0	3	0	0	-1	1	6	$\frac{6}{3}=2 \leftarrow$ 最小值

我们现在得到了表 4.8 所示的单纯形法。新的 BF 解是(2,6,2,0,0),且 $Z=36$ 。在进行最优性检验时,我们发现这个解是最优的,因为 0 行无负系数,所以迭代结束。

表 4.8 Wyndor Glass 公司问题的完整单纯形表

迭代	基变量	方程	系 数					右端项	
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4		x_5
0	Z	(0)	1	-3	-5	0	0	0	0
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18

续表

迭代	基变量	方程	系数					右端项	
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4		x_5
1	Z	(0)	1	-3	0	0	$\frac{5}{2}$	0	30
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
	x_5	(3)	0	3	0	0	-1	1	6
2	Z	(0)	1	0	0	0	$\frac{3}{2}$	1	36
	x_3	(1)	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
	x_1	(3)	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2

最终, Wyndor Glass 公司问题的最优解(未引入松弛变量之前)为 $x_1=2, x_2=6$ 。

现在我们来对比一下表 4.8 和 4.3 节中的工作, 证实单纯形法的这两种形式是等价的。注意, 当要了解单纯形法背后的逻辑原理时, 使用代数形式较好; 但表格形式使计算工作能以更简单、更简洁的形式进行。以后, 我们一般都采用表格形式。

应用表格单纯形法的一个补充例子见 OR Tutor 中标题为 Simplex Method——Tabular Form 的介绍。另一个例子包含在本书网站的工作例子部分。



4.5 单纯形法的突破

如果由于一些相持或其他类似的模糊情况出现, 按单纯形法的各种选取规则并无法提供一个明确的选择时应如何处理? 你可能注意到了, 在之前两节中我们从未涉及这方面的内容, 下面我们详细讨论这部分的内容。

入基变量的相持

每次迭代的步骤 1 选择方程(0)中拥有绝对值最大的负系数的非基变量作为入基变量。现在假设两个或者更多的非基变量有相同最大值(绝对值)的负系数, 这时就出现了相持。例如, 当 Wyndor Glass 公司问题的目标函数变为 $Z=3x_1+3x_2$ 时, 初始方程(0)变为 $Z-3x_1-3x_2=0$, 第 1 次迭代时就会出现相持。这个相持如何突破呢?

答案是, 可以任选一个作为入基变量。不管相持的变量如何选择, 最终都会得到最优解, 不存在一种便捷方法能预先指出哪个选择会更快得到最优解。在本例中, 单纯形法到达最优解(2, 6)的过程中, 如果选择 x_1 作为初始入基变量, 须经三次迭代; 与它对比, 如果选择 x_2 则只需两次迭代。

出基变量的相持——退化

现在假设迭代的步骤 2 在选择出基变量时,两个或多个基变量相持。选择哪个重要吗?理论上,严格来说是重要的,因为可能会有后续一系列事情发生。第一,当入基变量增加时,相持的基变量同时到达 0。因此,在新的 BF 解中,未被选作出基变量的变量的值也为 0[注意,值为 0 的基变量称为退化的变量(degenerate),同样的称呼也被用于 BF 解]。第二,如果这些退化的基变量之一保持零值直至成为下一次迭代的出基变量,相应的人基变量也必须保持 0 值(因为如果出基变量不为 0 的话,它就无法增长),因此 Z 的值就会保持不变。第三,如果 Z 保持不变而不是在每次迭代中都有所增加,单纯形法就会陷入一个循环,周期性地循环同一组解而非朝着最优解方向增加 Z 。事实上,由于所举例子都是由人为构造的,因此的确会造成陷入这样一个周期性的循环。^①

幸运的是,尽管周期性循环在理论上是可能的,但是在实际生活中却极少发生。如果发生循环,我们也能通过改变出基变量跳出循环。而且,也有一些特定的法则^②用来突破相持,因此这样的循环总是能避免。然而,在实际应用中,这些法则常被忽视,这里不再重复。对于你而言,只需任意选择突破这种相持而继续进行计算,无须担心退化的基变量会导致什么样的后果。

无出基变量—— Z 无界

在迭代的步骤 2 中,还会出现一个我们尚未讨论的可能结果,即没有变量能具备成为出基变量的条件。^③当入基变量可以无限增加,而不会造成当前任何一个基变量为负值时,就会出现这种情况。在表格形式中,这意味着枢轴列的每个系数(包括 0 行)都是负数或 0。

如表 4.9 所示,这种情况在图 3.6 所举的例子中出现过。该例没有考虑 Wyndor Glass 公司问题的后两个约束条件,模型中也未包括这两个条件。注意图 3.6 中 x_2 是如何在可行域范围内无限增长(因此带来 Z 的无限增长)的。然后注意在表 4.9 中, x_2 是入基变量,但是枢轴列唯一的系数是 0。因为最小比值试算只针对大于 0 的系数,因此无法根据比值来决定出基变量。

对表 4.9 所示的表格可以理解为约束条件无法阻止目标函数 Z 值的无限增加,因此单纯形法可以告诉一个信息—— Z 无界,从而停止计算。因为线性规划根本没有发现可以创造无限利润的方法,原始问题的真实的信息是发生了错误。也许是模型构建错误,要

^① 对陷入周期性循环的进一步研究,参见 J. A. J. Hall 和 K. J. M. McKinnon: "The Simplest Examples Where the Simplex Method Cycles and Conditions Where EXPAND Fails to Prevent Cycling," *Mathematical Programming, Series B*, 100(1):135-150, May 2004.

^② R. Bland, "New Finite Pivoting Rules for the Simplex Method," *Mathematics of Operations Research*, 2: 103-107, 1977.

^③ 注意这种类似的情况(无入基变量)不会在迭代的步骤 1 中出现,因为最优性检验会报告已得到最优解从而停止运算。

么是遗漏了相关约束条件,要么是这些约束条件被错误地表示。也有可能是出现了计算错误。

表 4.9 Wyndor Glass 公司问题去掉最后两个约束时的初始单纯形表

基变量	方程	系数				右端项	比率
		Z	x_1	x_2	x_3		
Z	(0)	1	-3	-5	0	0	
x_3	(1)	0	1	0	1	4	不存在

当 $x_1=0, x_2$ 增加时,
 $x_3=4-1x_1-0x_2=4>0$

多个最优解

在 3.2 节中我们提到(在最优解的定义下)一个问题可以有多个最优解。图 3.5 描述了这个事实,通过把 Wyndor Glass 公司问题的目标函数变为 $Z=3x_1+2x_2$, (2,6)和(4,3)间线段上的每一点都是最优的。因此,所有的最优解都是这两个最优解的加权平均。

$$(x_1, x_2) = w_1(2, 6) + w_2(4, 3)$$

其中,权数 w_1 和 w_2 满足关系: $w_1 + w_2 = 1, w_1 \geq 0, w_2 \geq 0$ 。

例如,令 $w_1 = \frac{1}{3}, w_2 = \frac{2}{3}$, 则

$$(x_1, x_2) = \frac{1}{3}(2, 6) + \frac{2}{3}(4, 3) = \left(\frac{2}{3} + \frac{8}{3}, \frac{6}{3} + \frac{6}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}, 4\right) \text{ 也是一个最优解。}$$

一般说来,由两个或多个解(向量)的任意加权平均得到的解,当权数项为非负且之和为 1 时,被称为解的凸组合(convex combination)。因此,本例中的每个最优解都是解(2,6)和(4,3)的凸组合。

这个例子是一个典型的有多个最优解的问题。

正如 3.2 节末指出的,任意一个有多个最优解(并且可行域有界)的线性规划问题至少有两个最优的 CPF 解。每个最优解是这些最优 CPF 解的凸组合。因此,在扩展形式中,每个最优解都是最优 BF 解的凸集。

(习题 4.5-5、4.5-6 会引导你思考得出这个结论的理由。)

当找到一个最优 BF 解时,单纯形法会自动停止。然而,在线性规划的许多应用中,一些不清晰因素并未包含在模型中,而这些因素却是在这些最优解中做出最恰当选择的依据。在这种情况下,必须再找出其他的最优解。如上所述,需要找出所有其他 BF 解,而每一个最优解就是最优 BF 解的凸组合。

用单纯形法找到 1 个最优 BF 解后,你可以检查一下是否还有其他最优 BF 解。如果有,可按照下述方法找出来。

一个拥有多于一个最优 BF 解的问题,在最终表的 0 行中至少有一个非基变量系数为 0,所以增加任意一个这样的变量都不会改变 Z 的值。因此,可以通过单纯形法进行进一步的迭代来获得其他最优 BF 解(如果需要的话),进一步迭代时,每次选择 1 个系数为 0 的非基变量作为入基变量。^①

① 如果迭代中找不到出基变量,那就意味着可行域无界,入基变量的值可无限增加,而 Z 值不变。

为了说明这一点,再次考虑刚才提到的情况: Wyndor Glass 公司问题的目标函数为 $Z=3x_1+2x_2$ 。应用单纯形法得到表 4.10 所示的前三个单纯形表,并找到最优 BF 解后停止。然而,因为有一个非基变量(x_3)在 0 行的系数为 0,我们在表 4.10 中再进行一次迭代去找出其他最优 BF 解。因此,两个最优 BF 解为 $(4,3,0,6,0)$ 和 $(2,6,2,0,0)$,每个都得出 $Z=18$ 。注意在最后一个表格中,仍有一个非基变量(x_4)在 0 行的系数为 0。这种情况是不可避免的,因为追加的迭代并不改变 0 行,所以这个出基变量仍需保持 0 系数。若把 x_4 作为入基变量,只能又回到第 3 个表(验证)。因此,这两个是仅有的最优 BF 解,其他最优解是它们的凸组合。

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = w_1(2, 6, 2, 0, 0) + w_2(4, 3, 0, 6, 0),$$

$$w_1 + w_2 = 1, w_1 \geq 0, w_2 \geq 0$$

表 4.10 $c_2=2$ 时,为求 Wyndor Glass 公司问题最优解的完整单纯形法

迭代	基变量	方程	系数					右端项	是否最优	
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4			x_5
0	Z	(0)	1	-3	-2	0	0	0	否	
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0		4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0		12
	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1		18
1	Z	(0)	1	0	-2	3	0	0	12	否
	x_1	(1)	0	1	0	1	0	0	4	
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12	
	x_5	(3)	0	0	2	-3	0	1	6	
2	Z	(0)	1	0	0	0	0	1	18	是
	x_1	(1)	0	1	0	1	0	0	4	
	x_4	(2)	0	0	0	3	1	-1	6	
	x_2	(3)	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3	
另一个	Z	(0)	1	0	0	0	0	1	18	是
	x_1	(1)	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2	
	x_3	(2)	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2	
	x_2	(3)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6	



4.6 改造适用于其他模型形式

到目前为止,我们在假设问题是标准形式(Z 最大化,约束于 \leq 形式的约束条件,所有变量非负)以及 $b_i \geq 0 (i=1,2,3,\dots,m)$ 的情况下介绍了单纯形法的详细内容。

本节我们将指出对一些不符合标准的线性规划模型形式所需做的调整。你将看到,所有的调整会在开始步骤内完成,余下的可以按你已经学过的单纯形法步骤进行。

由约束条件的其他形式(=或 \geq 形式,或右端为负)带来的唯一的问题在于如何确定初始 BF 解。以前,把松弛变量作为初始基本变量,每个变量等于它所在方程的非负右端项,这样可以很方便地确定初始解。现在需要做另外一些处理。处理这些情况的标准方法被称为**人工变量法**(artificial-variable technique)。这种方法通过对每个需要的约束条件引入一个虚拟变量(称为人工变量)构建一个更简便的人工问题。引进这个变量只是为了使该方程出现初始基变量。通常还会限制它们为非负约束。目标函数也要做修改,若它们取值大于 0,就对目标函数强加一个严厉的惩罚。单纯形法的每次迭代会自动地迫使人工变量消失(变为 0),一次一个,直至它们都消失,真正的问题就解决了。

为了描述人工变量法,首先我们考虑问题中不标准形式仅表现为 1 个或多个等式约束的情况。

等式约束

任意一个等式约束 $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$

实际上等价于一组不等式约束:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$$

然而,为了不做这种替代以避免增加约束条件的数量,可以采用更简便的人工变量法。我们通过以下例子讲述这个方法。

例 假设 3.1 节中的 Wyndor Glass 公司问题修改为 3 车间能力必须全部利用,在其线性规划模型中引起的唯一的改变就是第 3 个约束条件 $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ 变成了等式约束 $3x_1 + 2x_2 = 18$,因此,完整的模型如图 4.3 右上角所示。图中还以粗线条标出了可行域,但可行域仅为连接点(2,6)和点(4,3)的线段。

当引入不等式约束仍需的松弛变量后,问题的等价形式的方程组变为:

$$(0) \quad Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$$

$$(1) \quad x_1 + x_3 = 4$$

$$(2) \quad 2x_2 + x_4 = 12$$

$$(3) \quad 3x_1 + 2x_2 = 18$$

遗憾的是,这些方程没有明显的初始 BF 解,因为方程(3)不存在松弛变量可以用作初始基变量。因此,有必要找一个初始 BF 解以便应用单纯形法。

这个难题可以通过以下方法解决。

获得初始 BF 解

方法是通过对原始问题做两次修改而构建一个人工问题,这个人工问题与实际的问题拥有相同的最优解。

1. 应用人工变量法,向方程(3)引入非负人工变量(以 \bar{x}_5 表示^①),就好像它是一个松弛变量一样

^① 我们总是把人工变量表示成 \bar{x}_i 的形式。

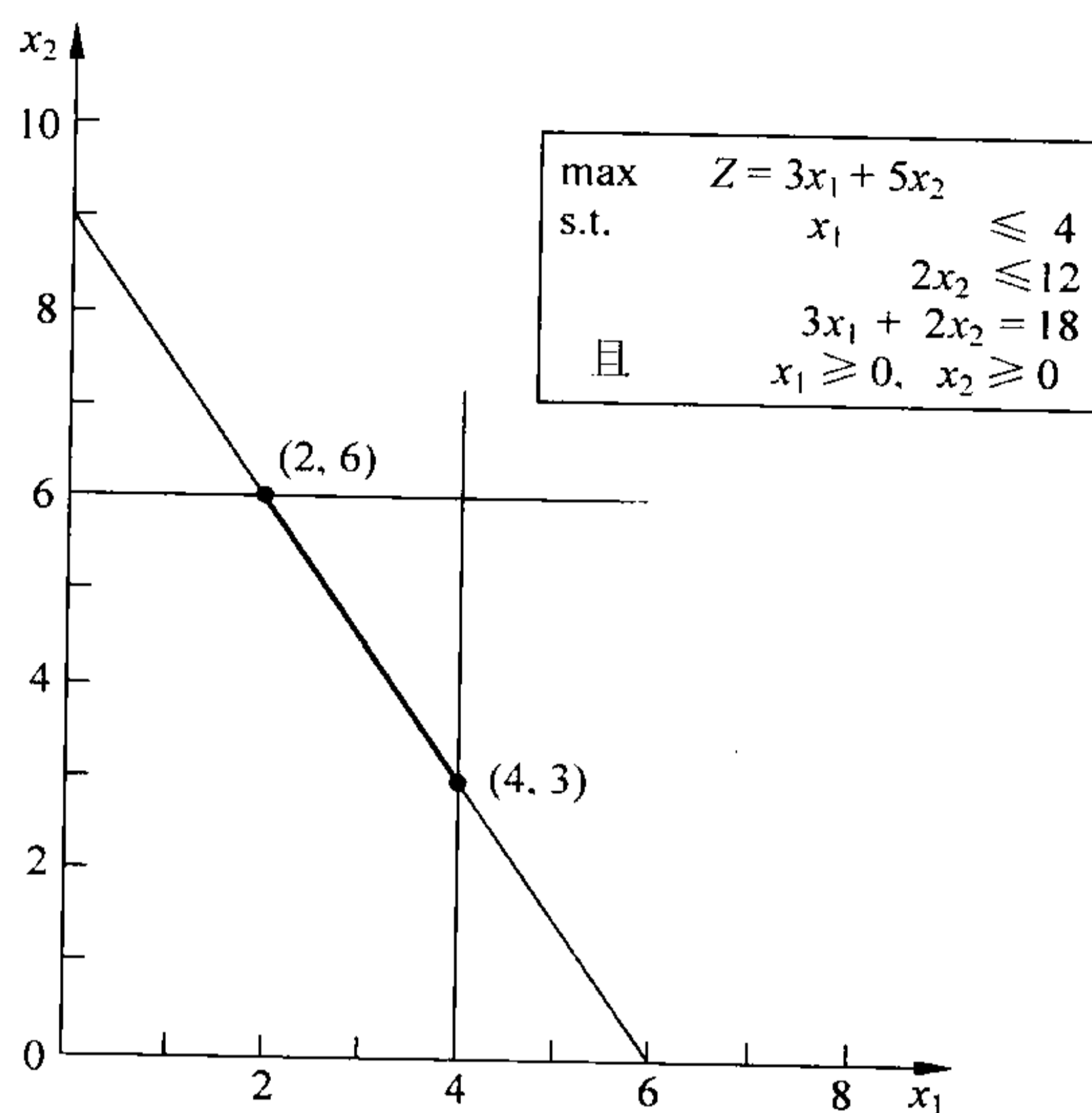


图 4.3 当第三个约束条件变为等式约束时, Wyndor Glass 公司问题的可行域变为了点(2,6)和点(4,3)之间的线段

$$(3) \quad 3x_1 + 2x_2 + \bar{x}_5 = 18$$

2. 修改目标函数: 强约束 $\bar{x}_5 > 0$, 使得目标函数 $Z = 3x_1 + 5x_2$ 改变为 $Z = 3x_1 + 5x_2 - M\bar{x}_5$ 。

其中, M 代表一个无穷大的数(这种在最优解中迫使 $\bar{x}_5 = 0$ 的方法称为 **大 M 法**(big M method))。

现在, 通过对人工问题应用单纯形法找出原始问题的最优解, 从下述初始 BF 解开始计算。

初始 BF 解

非基变量: $x_1 = 0, x_2 = 0$

基变量: $x_3 = 4, x_4 = 12, \bar{x}_5 = 18$

因为在人工问题的第三个条件中, \bar{x}_5 起一个松弛变量作用, 因此这个约束与 $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ 等价(如同 3.1 节中原始的 Wyndor Glass 公司问题一样)。我们将人工问题(扩展前)与原始问题列示如下:

原始问题	人工问题
$\begin{aligned} \max \quad & Z = 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 \leq 4 \\ & 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ \text{且} \quad & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{定义} \quad & \bar{x}_5 = 18 - 3x_1 - 2x_2 \\ \max \quad & Z = 3x_1 + 5x_2 - M\bar{x}_5 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 \leq 4 \\ & 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & (\text{因此 } 3x_1 + 2x_2 + \bar{x}_5 = 18) \\ \text{且} \quad & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \bar{x}_5 \geq 0 \end{aligned}$

因此,正如 3.1 节所述,人工问题中的变量 (x_1, x_2) 的可行域如图 4.4 所示。这个可行域与原始问题的可行域相交于 $\bar{x}_5 = 0$ (所以, $3x_1 + 2x_2 = 18$)。

图 4.4 也显示了单纯形法检查角点(或扩展后的 BF 解)的顺序。带圈的数字指出了是哪次迭代得到这个解的。注意这里单纯形法逆时针移动,而在初始 Wyndor Glass 公司问题中是顺时针移动的(见图 4.2)。这个区别是由于人工问题中目标函数里附加形式 $-M\bar{x}_5$ 的存在。

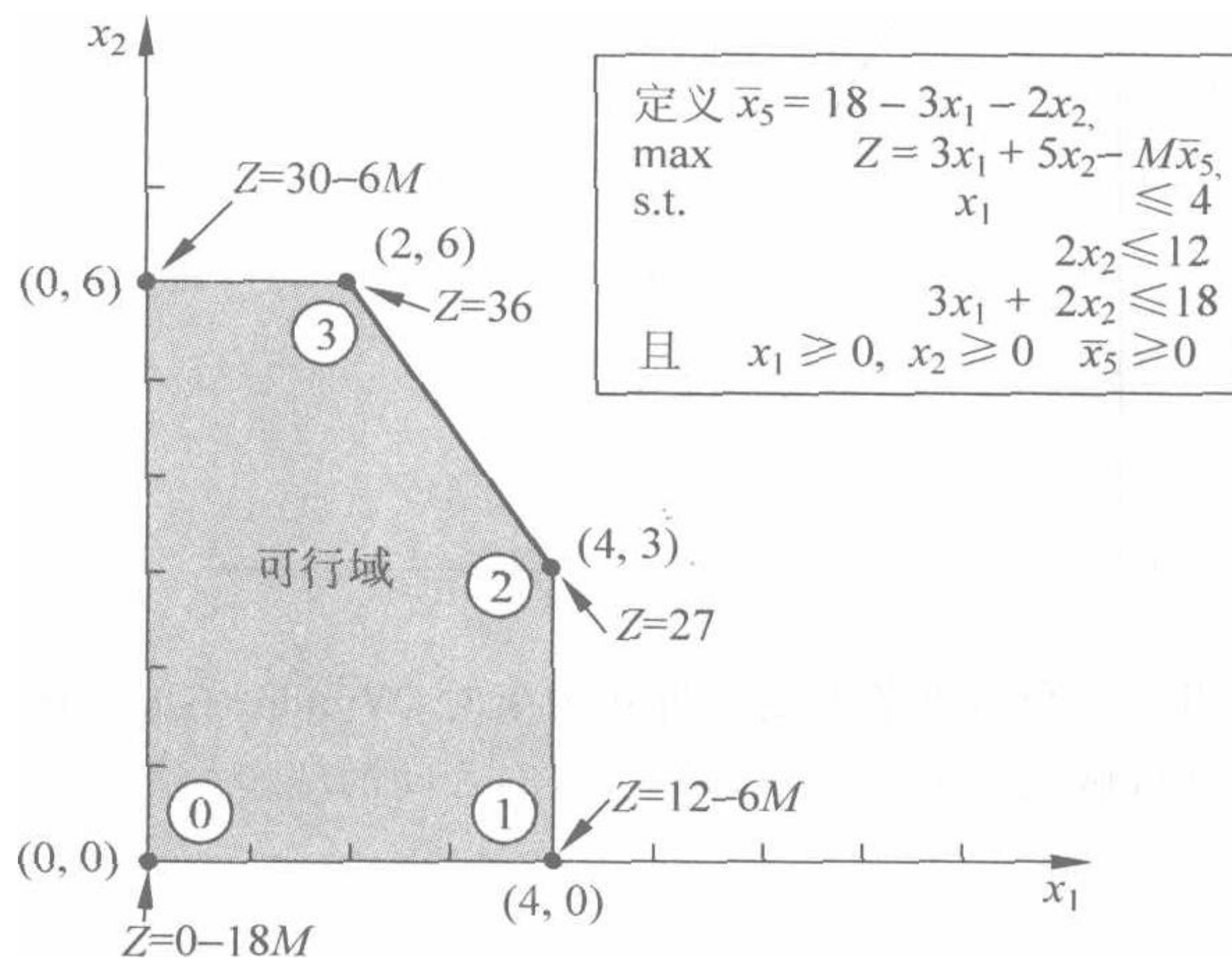


图 4.4 这个图形描述了采用单纯形法解决与图 4.3 中的原始问题相对应的人工问题的可行域和一系列的可行解(①、①、②、③)

在运用单纯形法和确定它是沿着图 4.4 所示路径移动之前,需要做以下准备工作。

把方程(0)变为适当形式

人工问题扩展后的方程组为:

$$\begin{aligned} (0) \quad & Z - 3x_1 - 5x_2 + M\bar{x}_5 = 0 \\ (1) \quad & x_1 + x_3 = 4 \\ (2) \quad & 2x_2 + x_4 = 12 \\ (3) \quad & 3x_1 + 2x_2 + \bar{x}_5 = 18 \end{aligned}$$

其中的初始基变量 (x_3, x_4, \bar{x}_5) 以粗体标出。然而这个方程组并不是高斯消元法的常形式,因为在方程(0)中基变量 \bar{x}_5 有非零系数。回想一下,在单纯形法运用最优性检验或找出入基变量之前,所有基变量必须用代数方法从方程(0)中消去。这种消去是必须做的,这样当非基变量从 0 开始增加,基变量随之调整时,每个非基变量的负系数才会使 Z 有正的增长。

为从方程(0)中消去 \bar{x}_5 ,我们需从方程(0)中减去方程(3)的 M 倍。

$$\begin{aligned} & Z - 3x_1 - 5x_2 + M\bar{x}_5 = 0 \\ & -M(3x_1 + 2x_2 + \bar{x}_5 = 18) \end{aligned}$$

$$\text{新方程(0): } Z - (3M+3)x_1 - (2M+5)x_2 = -18M$$

应用单纯形法

新方程(0)仅用非基变量 x_1, x_2 表示 Z :

$$Z = -18M + (3M + 3)x_1 + (2M + 5)x_2$$

因为 $3M + 3 > 2M + 5$ (记住 M 代表无穷大的数), x_1 的增加会比 x_2 增加带给 Z 更快的增加率, 因此选择 x_1 作为入基变量。这在迭代 1 中导致从点 $(0, 0)$ 移到点 $(4, 0)$, 如图 4.4 所示, 因此 Z 增加了 $4(3M + 3)$ 。

M 仅在方程(0)而不会在其他方程中出现。因此只需在进行最优性检验和决定入基变量时考虑它们。处理这些数量的一种方法是赋予 M 某个特定(极大)常数值。按常规方式对待方程(0)中赋值后的系数。然而, 这种方法可能会导致明显的舍入误差而使最优性检验无效。因此, 最好的方法如我们刚才所示, 即通过单独标明和更新(1)乘数因子 a 和(2)加项 b 的当前数值, 把方程(0)每一项的系数表示成为符号数 M 的线性函数 $aM + b$ 。

因为 M 值被假定得很大, 所以当 a 不等于 0 时, 与 M 相比 b 的影响可以忽略不计, 因此除了需要借助加项突破相持外, 最优性检验和入基变量的选择只需按常规方利运用乘数因子来计算。

对本例运用这种方法得到了如表 4.11 所示的单纯形表。注意在前两个单纯形表中人工变量 \bar{x}_5 是基变量 ($\bar{x}_5 > 0$), 而后两个单纯形表中是非基变量 ($\bar{x}_5 = 0$)。因此, 这个人工问题的前两个 BF 解对原始问题不可行, 而后两个对原始问题可行。

表 4.11 图 4.4 所示问题的完整单纯形表

迭代	基变量	方程	系数					右端项	
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4		\bar{x}_5
0	Z	(0)	1	$-3M-3$	$-2M-5$	0	0	0	$-18M$
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
	\bar{x}_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18
1	Z	(0)	1	0	$-2M-5$	$3M+3$	0	0	$-6M+12$
	x_1	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
	\bar{x}_5	(3)	0	0	2	-3	0	1	6
2	Z	(0)	1	0	0	$-\frac{9}{2}$	0	$M+\frac{5}{2}$	27
	x_1	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	(2)	0	0	0	3	1	-1	6
	x_2	(3)	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3
3	Z	(0)	1	0	0	0	$\frac{3}{2}$	$M+1$	36
	x_1	(1)	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
	x_3	(2)	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
	x_2	(3)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6

这个例子只含有一个等式约束, 如果一个线性规划模型有多于 1 个的等式约束, 每一个都用这种方法处理(如果右端项为负, 先在两端同时乘以 -1)。

负的右端项

前面处理右端项为负数的等式约束的内容中提到的方法(即两端各乘以 -1),也适用于右端项为负数的不等式约束。不等式两边同乘以 -1 还改变了不等号的方向,即“ \leq ”变为“ \geq ”,或者反过来也一样。例如,对约束条件 $x_1 - x_2 \leq -1$ (即 $x_1 \leq x_2 - 1$)做这样的变化,得到等价的约束条件为 $-x_1 + x_2 \geq 1$ (即 $x_2 - 1 \geq x_1$),但现在右端项是正的。所有约束条件右端项为非负时,单纯形法就可以开始了,因为(扩展后)这时右端项就变成了各个初始基变量的值,它们满足了变量的非负要求。

接下来我们讨论如何利用人工变量法扩展“ \geq ”的形式,如约束条件 $-x_1 + x_2 \geq 1$ 。

\geq 形式的约束条件

为了说明人工变量法如何解决 \geq 形式的约束条件,我们将利用在3.4节中提到的设计玛丽放射治疗方案这个模型。为方便起见,下面重述一下模型。在模型中,我们把要特别注意的约束条件加了框。

放射治疗问题

$$\begin{array}{ll}
 \min & Z = 0.4x_1 + 0.5x_2 \\
 \text{s. t.} & 0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7 \\
 & 0.5x_1 + 0.5x_2 = 6 \\
 & \boxed{0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6} \\
 \text{且} & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{array}$$

这个例子的图示(原图3.12所示)在图4.5中以一种略有不同的形式再现。图中的三条边和两个轴,组成了问题的五个约束边界线,每组约束边界的交点上的是角点解。仅有的两个角点的可行解是 $(6, 6)$ 和 $(7.5, 4.5)$,可行域是连接这两个点的线段。最优解 $(x_1, x_2) = (7.5, 4.5)$, $Z = 5.25$ 。

很快我们将讲解通过直接求解相应的人工问题单纯形法是如何解决这个问题的,不过我们首先描述如何处理第3个约束条件。

我们的方法包括引入一个剩余变量 x_5 (设 $x_5 = 0.6x_1 + 0.4x_2 - 6$)和一个人工变量 \bar{x}_6 ,如下所示:

$$\begin{array}{ll}
 0.6x_1 + 0.4x_2 & \geq 6 \\
 \rightarrow 0.6x_1 + 0.4x_2 - x_5 & = 6 \quad (x_5 \geq 0) \\
 \rightarrow 0.6x_1 + 0.4x_2 - x_5 + \bar{x}_6 & = 6 \quad (x_5 \geq 0, \bar{x}_6 \geq 0)
 \end{array}$$

在这里, x_5 被称为**剩余变量**(surplus variable),因为减去该剩余变量(代表方程左端项与右端项之差)后,不等式方程约束就变成了等价的等式约束,一旦转换完成,就按等式约束那样引入人工变量。

在第一个约束条件引入松弛变量 x_3 、第二个约束条件引入人工变量 \bar{x}_4 后,就可以使用大 M 法,因此,完整的人工问题(扩展形式)是

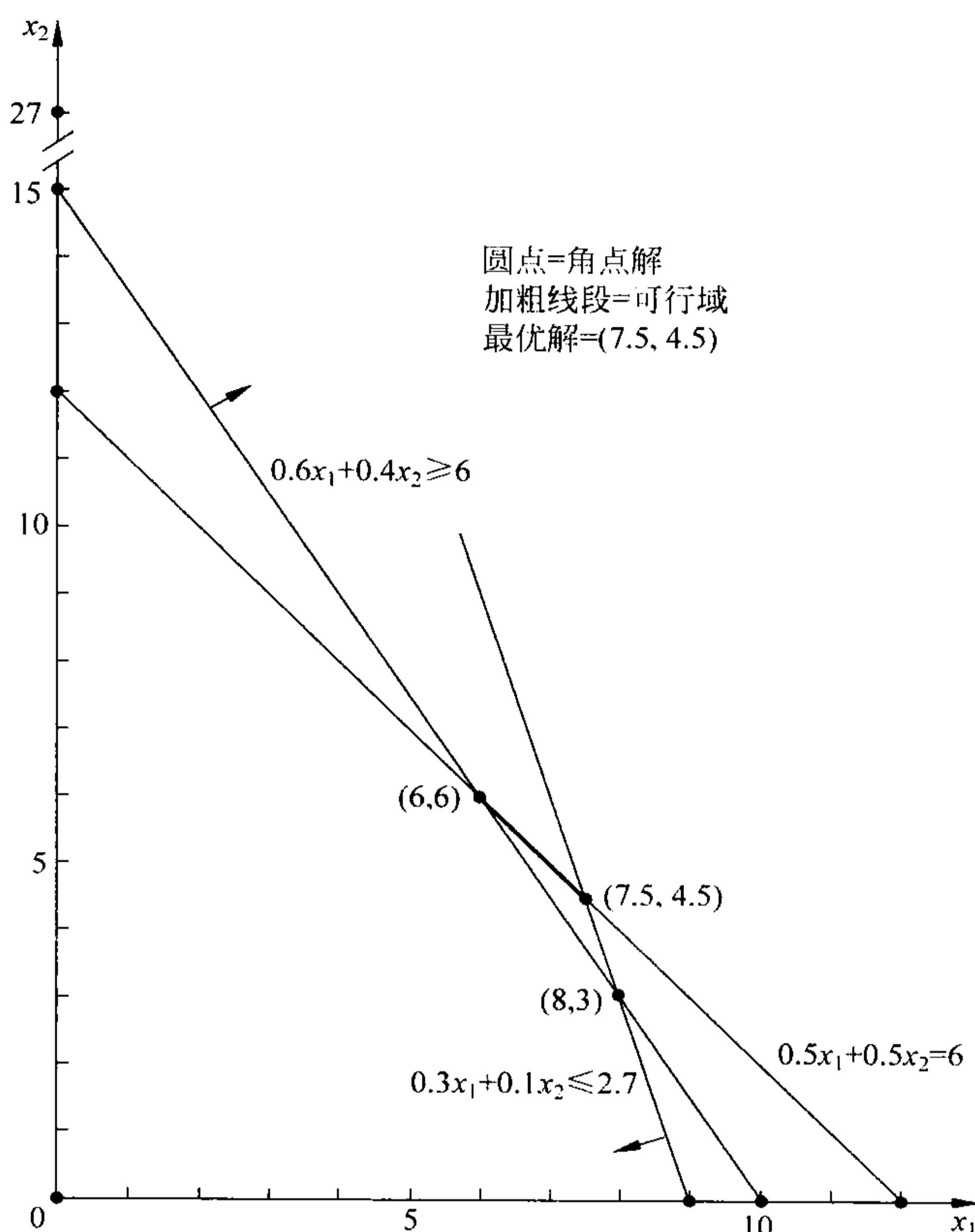


图 4.5 放射治疗问题和它的角点解的图形演示

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = 0.4x_1 + 0.5x_2 + M\bar{x}_4 + M\bar{x}_6 \\ \text{s. t.} \quad & 0.3x_1 + 0.1x_2 + x_3 = 2.7 \\ & 0.5x_1 + 0.5x_2 + \bar{x}_4 = 6 \\ & 0.6x_1 + 0.4x_2 - x_5 + \bar{x}_6 = 6 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \bar{x}_4 \geq 0, x_5 \geq 0, \bar{x}_6 \geq 0 \end{aligned}$$

注意,目标函数中人工变量系数为 $+M$,而不是一 $-M$,因为我们现在要使 Z 最小化,因此,尽管对人工变量而言 $\bar{x}_4 > 0$ 和(或) $\bar{x}_6 > 0$ 是可行解,但 M 所起的巨大单位惩罚会阻止这种情况出现在最优解中。

像以往一样,引入人工变量扩大了可行域。下面把原始问题对 (x_1, x_2) 的原始约束条件同人工问题对 (x_1, x_2) 的相应约束进行对比。

原始问题对 (x_1, x_2) 的约束	人工问题对 (x_1, x_2) 的约束
$0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7$	$0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7$
$0.5x_1 + 0.5x_2 = 6$	$0.5x_1 + 0.5x_2 \leq 6$ ($\bar{x}_4 = 0$ 时成立)
$0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6$	无这个约束(除 $\bar{x}_6 = 0$ 外)
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

引入人工变量作为第二个约束条件的松弛变量使得 (x_1, x_2) 的值在图中 $0.5x_1 + 0.5x_2 = 6$ 线之下。对原始问题第三个约束条件引入 x_5 和 \bar{x}_6 , 并将它们移至右端得到方程

$$0.6x_1 + 0.4x_2 = 6 + x_5 - \bar{x}_6$$

因为 x_5, \bar{x}_6 均只能为非负, 它们的差 $x_5 - \bar{x}_6$ 可以为正, 也可以为负, 因此, $0.6x_1 + 0.4x_2$ 可以有任意值, 同时可以把第三个约束从人工问题中消去, 使角点可以在图 4.5 中 $0.6x_1 + 0.4x_2 = 6$ 的两边(我们将第三个约束条件放在方程组中, 是因为当大 M 法使 \bar{x}_6 变为 0 后, 它会再次相关)。因而, 人工问题的可行域是图 4.5 的整个多面体。这个多面体的顶点是 $(0, 0)$ 、 $(9, 0)$ 、 $(7.5, 4.5)$ 和 $(0, 12)$ 。

既然现在原点是人工问题的可行解, 那么单纯形法就选择原点作为初始 CPF 解, 也就是以 $(x_1, x_2, x_3, \bar{x}_4, x_5, \bar{x}_6) = (0, 0, 2.7, 6, 0, 6)$ 作为初始 BF 解(使原点可行解成为单纯形法计算的一个简便开始点, 是构建人工问题的关键), 很快我们将按单纯形法的思路, 勾画出人工和原始问题从原点到最优解的全部轨迹。但是, 首先, 单纯形法如何解决最小化呢?

最小化

单纯形法解决最小化问题的最直接方法是对最优性检验和迭代的第 1 步, 交换 0 行正系数与负系数的角色。然而, 我们更愿意在这种情况下不改变单纯形法的计算方法, 而是通过下面一种简单的方法把任意一个最小值问题转变为等价的极大值问题。

$$\min Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

等价于

$$\max -Z = \sum_{j=1}^n (-c_j) x_j$$

即这两个表达式有同样的最优解。

这两个形式是等价的, 因为 Z 越小, $-Z$ 越大, 因此在整个可行域内使 Z 最小的解必会使 $-Z$ 在这个区域内值最大。

这样, 在这个放射治疗例子中, 我们对这个形式做如下改变:

$$\begin{aligned} \min Z &= 0.4x_1 + 0.5x_2 \\ \rightarrow \max -Z &= -0.4x_1 - 0.5x_2 \end{aligned}$$

当引入人工变量 \bar{x}_4 和 \bar{x}_6 之后, 应用大 M 法, 相应的转换为

$$\begin{aligned} \min Z &= 0.4x_1 + 0.5x_2 + M\bar{x}_4 + M\bar{x}_6 \\ \rightarrow \max -Z &= -0.4x_1 - 0.5x_2 - M\bar{x}_4 - M\bar{x}_6 \end{aligned}$$

求解放射治疗例子

我们现在开始运用单纯形法求解这个例子, 利用刚才得到的最大化形式, 现在方程组为:

$$\begin{aligned}
 (0) \quad & -Z + 0.4x_1 + 0.5x_2 + M\bar{x}_4 + M\bar{x}_6 = 0 \\
 (1) \quad & 0.3x_1 + 0.1x_2 + x_3 = 2.7 \\
 (2) \quad & 0.5x_1 + 0.5x_2 + \bar{x}_4 = 6 \\
 (3) \quad & 0.6x_1 + 0.4x_2 - x_5 + \bar{x}_6 = 6
 \end{aligned}$$

人工问题的初始 BF 解的基变量 ($x_3, \bar{x}_4, \bar{x}_6$) 以粗体列示。

注意这个方程组不是单纯形法要求的高斯消元法的常态形, 因为基变量 \bar{x}_4 和 \bar{x}_6 仍需从方程(0)中消去。由于 \bar{x}_4 和 \bar{x}_6 均有系数 M , 方程(0)需减去方程(2)的 M 倍和方程(3)的 M 倍, 对(0)行所有系数(包括右端项)的运算总结如下, 其中向量代表与上面方程相适应的单纯形表的相应行。

0 行:

$$\begin{array}{cccccccc}
 [0.4, & & 0.5, & & 0, & M, & 0, & M, & 0] \\
 -M[0.5, & & 0.5, & & 0, & 1, & 0, & 0, & 6] \\
 -M[0.6, & & 0.4, & & 0, & 0, & -1, & 1, & 6]
 \end{array}$$

$$\text{新(0)行} = [-1.1M + 0.4, \quad -0.9M + 0.5, \quad 0, \quad 0, \quad M, \quad 0, \quad -12M]$$

所得到的可据以开始单纯形法的初始单纯形表列在表 4.12 的顶部。用常规方法运用单纯形法得到表 4.12 中其余的单纯形表。在最优性检验和每次迭代选择入基变量时, 对包含 M 的数量处理如同表 4.11 讨论的一样。特别地, 当有 M 时, 只有它的乘数因子起作用, 除非有相持情况, 要用到后面的加项确定相持的突破。这样的一个相持发生在最后一次选择入基变量时(见倒数第二张单纯形表), x_3 和 x_5 在 0 行的系数都有乘数因子为 $-\frac{5}{3}$, 比较加项, 有 $\frac{11}{6} < \frac{7}{3}$, 导致选择 x_5 作为入基变量。

注意表 4.12 中, 人工变量 \bar{x}_4 和 \bar{x}_6 及 Z 值的变化过程。我们从大的值开始, $\bar{x}_4 = 6$, $\bar{x}_6 = 6$, 此时 $Z = 12M$ ($-Z = -12M$)。第一次迭代大大减少了这些值。在第二次迭代中, 大 M 法成功地使 $\bar{x}_6 = 0$ (成为新的非基变量), 在下一次迭代中 \bar{x}_4 也为 0。当 $\bar{x}_4 = 0$, $\bar{x}_6 = 6$ 时, 就保证了最后一张单纯形表给出的基本解对原始问题是可行解。由于它通过了最优性检验, 因此它也是最优的。

下面看大 M 法的图示过程(见图 4.6)。人工变量的可行域初始时有 4 个 CPF 解 $(0,0)$ 、 $(9,0)$ 、 $(0,12)$ 和 $(7.5, 4.5)$ 。然后, 前 3 个被两个新的 CPF 解—— $(8,3)$ 、 $(6,6)$ ——替代。同时, \bar{x}_6 减少到 0, $0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6$, 变成了一个附加约束条件(注意这三个被代替的 CPF 解 $(0,0)$ 、 $(9,0)$ 、 $(0,12)$ 实际上是图 4.5 所示的原始问题的角点非可行解)。选择原点作为人工问题的一个简便的 CPF 解, 我们沿着这个边界移至其他三个 CPF 解—— $(9,0)$ 、 $(8,3)$ 和 $(7.5, 4.5)$ 。这几个解的最后一个为原始问题的可行解。幸运的是, 这第一个可行解也是最优解, 因此无须另外的迭代。

表 4.12 解放射治疗问题的大 M 法

迭代	基变量	方程	系数						右端项	
			Z	x_1	x_2	x_3	\bar{x}_4	x_5		\bar{x}_6
0	Z	(0)	-1	$-1.1M+0.4$	$-0.9M+0.5$	0	0	M	0	$-12M$
	x_3	(1)	0	0.3	0.1	1	0	0	0	2.7
	\bar{x}_4	(2)	0	0.5	0.5	0	1	0	0	6
	\bar{x}_6	(3)	0	0.6	0.4	0	0	-1	1	6
1	Z	(0)	-1	0	$-\frac{16}{30}M+\frac{11}{30}$	$\frac{11}{3}M-\frac{4}{3}$	0	M	0	$-2.1M-3.6$
	x_1	(1)	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$	0	0	0	9
	\bar{x}_4	(2)	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	1	0	0	1.5
	\bar{x}_6	(3)	0	0	0.2	-2	0	-1	1	0.6
2	Z	(0)	-1	0	0	$-\frac{5}{3}M+\frac{7}{3}$	0	$-\frac{5}{3}M+\frac{11}{6}$	$\frac{8}{3}M-\frac{11}{6}$	$-0.5M-4.7$
	x_1	(1)	0	1	0	$\frac{20}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	8
	\bar{x}_4	(2)	0	0	0	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0.5
	x_2	(3)	0	0	1	-10	0	-5	5	3
3	Z	(0)	-1	0	0	0.5	$M-1.1$	0	M	-5.25
	x_1	(1)	0	1	0	5	-1	0	0	7.5
	x_5	(2)	0	0	0	1	0.6	1	-1	0.3
	x_2	(3)	0	0	1	-5	3	0	0	4.5

对于有人工变量的其他问题,在得到第一个可行解后,为了寻求最优解,可能需要再进行另外的迭代(表 4.11 解决的正是这种情况)。因此,大 M 法可以被认为有两个阶段:在第一个阶段,所有的人工变量都变为 0(因为 M 的单位惩罚量会远大于 0),以得到实际问题的初始 BF 解。在第二阶段,所有人工变量会保持为 0(因为同样的惩罚措施),同时,由单纯形法产生的原始问题的一系列 BF 解会逐步引向最优解。下面将阐述的两阶段法是一个直接进行这两个阶段而不引入 M 的过程。

两阶段法

对刚在表 4.12 求解的放射治疗问题,回忆它的实际目标函数。

原始问题: $\min Z=0.4x_1+0.5x_2$

然而,大 M 法在整个过程中使用下述目标函数(或者与它等价的最大化形式)。

大 M 方法: $\min Z=0.4x_1+0.5x_2+M\bar{x}_4+M\bar{x}_6$

由于前两个系数相对于 M 来说可以忽略,故两阶段可以通过运用如下两个目标函数来消去 M,这两个目标函数中的 Z 有完全不同的定义。

两阶段法:

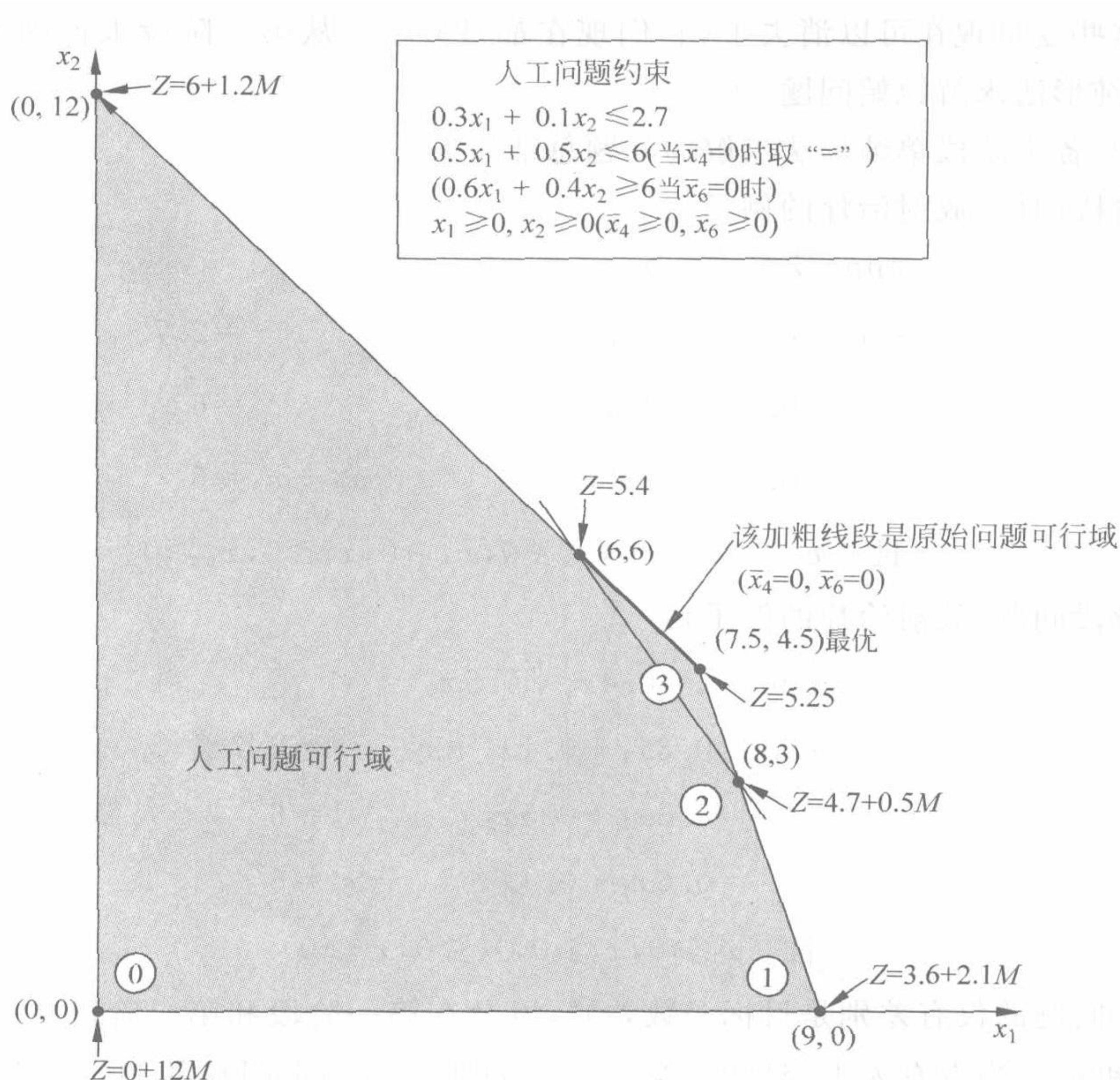


图 4.6 这个图形描述了单纯形法的大 M 法解决的与图 4.5 的原始问题相对应的人工问题的可行域和一系列的 CPF 解(①、①、②、③)

第一阶段：最小化 $Z = \bar{x}_4 + \bar{x}_6$ (直到 $\bar{x}_4 = 0, \bar{x}_6 = 0$)

第二阶段：最小化 $Z = 0.4x_1 + 0.5x_2$ ($\bar{x}_4 = 0, \bar{x}_6 = 0$)

第一阶段的目标函数通过把大 M 法的目标函数除以 M 后, 去掉可忽略的加项而得到。因为第一阶段得到原始问题的 BF 解(当 $\bar{x}_4 = 0, \bar{x}_6 = 0$ 时), 在第二阶段中的这个解, 被作为对现实问题运用单纯形法时的初始 BF 解。

在使用这种方法求解例题前, 我们先总结一下这个方法。

两阶段法的总结

初始化：通过引入人工变量修改原始问题的约束条件, 从而得到人工问题必需且明显的初始 BF 解 0

第一阶段：这个阶段的目标是找出原始问题的 BF 解, 为此

$$\min Z = \sum \text{人工变量}, \text{约束于修改后的限制条件}$$

这个问题的最优解($Z=0$)将会是原始问题的 BF 解。

第二阶段：这个阶段的目标是找到原始问题的最优解, 因为人工变量是原始问题的

一部分。这些变量现在可以消去了(它们现在都是0)。^①从第一阶段末得到的BF解出发,应用单纯形法求解原始问题。

本例中,各个阶段单纯形法求解的问题总结如下:

第一阶段问题(放射治疗的例子):

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = \bar{x}_4 + \bar{x}_6 \\ \text{s. t.} \quad & 0.3x_1 + 0.1x_2 + x_3 = 2.7 \\ & 0.5x_1 + 0.5x_2 + \bar{x}_4 = 6 \\ & 0.6x_1 + 0.4x_2 - x_5 + \bar{x}_6 = 6 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \bar{x}_4 \geq 0, x_5 \geq 0, \bar{x}_6 \geq 0 \end{aligned}$$

第二阶段问题(放射治疗的例子):

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = 0.4x_1 + 0.5x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 0.3x_1 + 0.1x_2 + x_3 = 2.7 \\ & 0.5x_1 + 0.5x_2 = 6 \\ & 0.6x_1 + 0.4x_2 - x_5 = 6 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

这两个问题的仅有差别是目标函数差异,以及在第一阶段和第二阶段中是否包括人工变量 \bar{x}_4 和 \bar{x}_6 。当没有人工变量时,第二阶段问题没有一个明显的初始BF解,求解第一阶段问题的唯一目标在于得到当 $\bar{x}_4=0, \bar{x}_6=0$ 时的BF解,以便使这个解(不含人工变量)成为第二阶段的初始BF解。

表4.13显示的是对第一阶段问题运用单纯形法的过程[初始表中的0行通过转换 $\min Z = \bar{x}_4 + \bar{x}_6$ 为 $\max(-Z) = -\bar{x}_4 - \bar{x}_6$ 得到,然后运用初等行变换把基变量 \bar{x}_4 和 \bar{x}_6 从 $-Z + \bar{x}_4 + \bar{x}_6 = 0$ 中消去]。在倒数第二张表格中,选择入基变量时在 x_3 和 x_5 之间有一个相持,可以任意突破,我们选择 x_3 。在第一阶段末得到的解为 $(x_1, x_2, x_3, \bar{x}_4, x_5, \bar{x}_6) = (6, 6, 0.3, 0, 0, 0)$,或者,当删去 \bar{x}_4 和 \bar{x}_6 后, $(x_1, x_2, x_3, x_5) = (6, 6, 0.3, 0)$ 。

正如总结中所言,来自第一阶段的解确实是原始问题(第二阶段问题)的BF解,因为这是第二阶段问题的有三个约束条件组成的方程组的解(在设 $x_5=0$ 之后)。事实上,删去 \bar{x}_4 列和 \bar{x}_6 列和0行后的每一次迭代,是表4.13表述的高斯消元法求解这个线性方程组的一种方法。这种方法通过把方程组简化为最后一张单纯形表所示的形式而实现。

^① 我们跳过了另外三种可能:(1)人工变量 >0 (将在下一小节讨论);(2)人工变量是退化的基变量;(3)在第二阶段中保持人工变量作为非基变量(限制它们成为非基变量),作为下一小节优化后分析的辅助手段。利用 IOR Tutorial,你可以探索这些可能性。

表 4.13 放射治疗问题的两阶段法的第一阶段

迭代	基变量	方程	系 数							右端项
			Z	x_1	x_2	x_3	\bar{x}_4	x_5	\bar{x}_6	
0	Z	(0)	-1	-1.1	-0.9	0	0	1	0	-12
	x_3	(1)	0	0.3	0.1	1	0	0	0	2.7
	\bar{x}_4	(2)	0	0.5	0.5	0	1	0	0	6
	\bar{x}_6	(3)	0	0.6	0.4	0	0	-1	1	6
1	Z	(0)	-1	0	$-\frac{16}{30}$	$\frac{11}{3}$	0	1	0	-2.1
	x_1	(1)	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$	0	0	0	9
	\bar{x}_4	(2)	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	1	0	0	1.5
	\bar{x}_6	(3)	0	0	0.2	-2	0	-1	1	0.6
2	Z	(0)	-1	0	0	$-\frac{5}{3}$	0	$-\frac{5}{3}$	$\frac{8}{3}$	-0.5
	x_1	(1)	0	1	0	$\frac{20}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	8
	\bar{x}_4	(2)	0	0	0	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0.5
	x_2	(3)	0	0	1	-10	0	-5	5	3
3	Z	(0)	-1	0	0	0	1	0	1	0
	x_1	(1)	0	1	0	0	-4	-5	5	6
	x_3	(2)	0	0	0	1	$\frac{3}{5}$	1	-1	0.3
	x_2	(3)	0	0	1	0	6	5	-5	6

表 4.14 展示的是第一阶段完成后,第二阶段开始前的准备工作。从表 4.13 的最后一张单纯形表出发,我们去掉人工变量(\bar{x}_4 和 \bar{x}_6),把第二阶段目标函数(最大值形式表示的 $-Z = -0.4x_1 - 0.5x_2$)换入 0 行,然后以代数方式从 0 行中消去基变量 x_1 和 x_2 还原出高斯消元法的常态形式。因此,最后一张单纯形表中的 0 行是通过倒数第二张单纯形表格进行基本的代数运算得到的:从 0 行减去第 1 行的 0.4 倍、第 3 行的 0.5 倍。除了被消去的两列外,注意到第 1 行至第 3 行并没有改变。唯一变化在第 0 行,目的是用第二阶段目标函数代替第一阶段目标函数。

现在我们看到了图 4.7 所示两阶段法的图形描述。从原点出发,第一阶段总共检查了人工问题的四个 CPF 解。前三个实际上是图 4.5 中所示原始问题的角点非可行解,第

表 4.14 准备开始放射治疗问题的第二阶段

迭代	基变量	方程	系 数							右端项
			Z	x_1	x_2	x_3	\bar{x}_4	x_5	\bar{x}_6	
第 1 阶段 最终表	Z	(0)	-1	0	0	0	1	0	1	0
	x_1	(1)	0	1	0	0	-4	-5	5	6
	x_3	(2)	0	0	0	1	$\frac{3}{5}$	1	-1	0.3
	x_2	(3)	0	0	1	0	6	5	-5	6

续表

迭代	基变量	方程	系数							右端项
			Z	x_1	x_2	x_3	\bar{x}_4	x_5	\bar{x}_6	
去掉 \bar{x}_4 和 \bar{x}_6	Z	(0)	-1	0	0	0		0	0	
	x_1	(1)	0	1	0	0		-5	6	
	x_3	(2)	0	0	0	1		1	0.3	
	x_2	(3)	0	0	1	0		5	6	
以第2阶段目标函数替换	Z	(0)	-1	0.4	0.5	0		0	0	
	x_1	(1)	0	1	0	0		-5	6	
	x_3	(2)	0	0	0	1		1	0.3	
	x_2	(3)	0	0	1	0		5	6	
由高斯消元法恢复合适形式	Z	(0)	-1	0	0	0		-0.5	-5.4	
	x_1	(1)	0	1	0	0		-5	6	
	x_3	(2)	0	0	0	1		1	0.3	
	x_2	(3)	0	0	1	0		5	6	

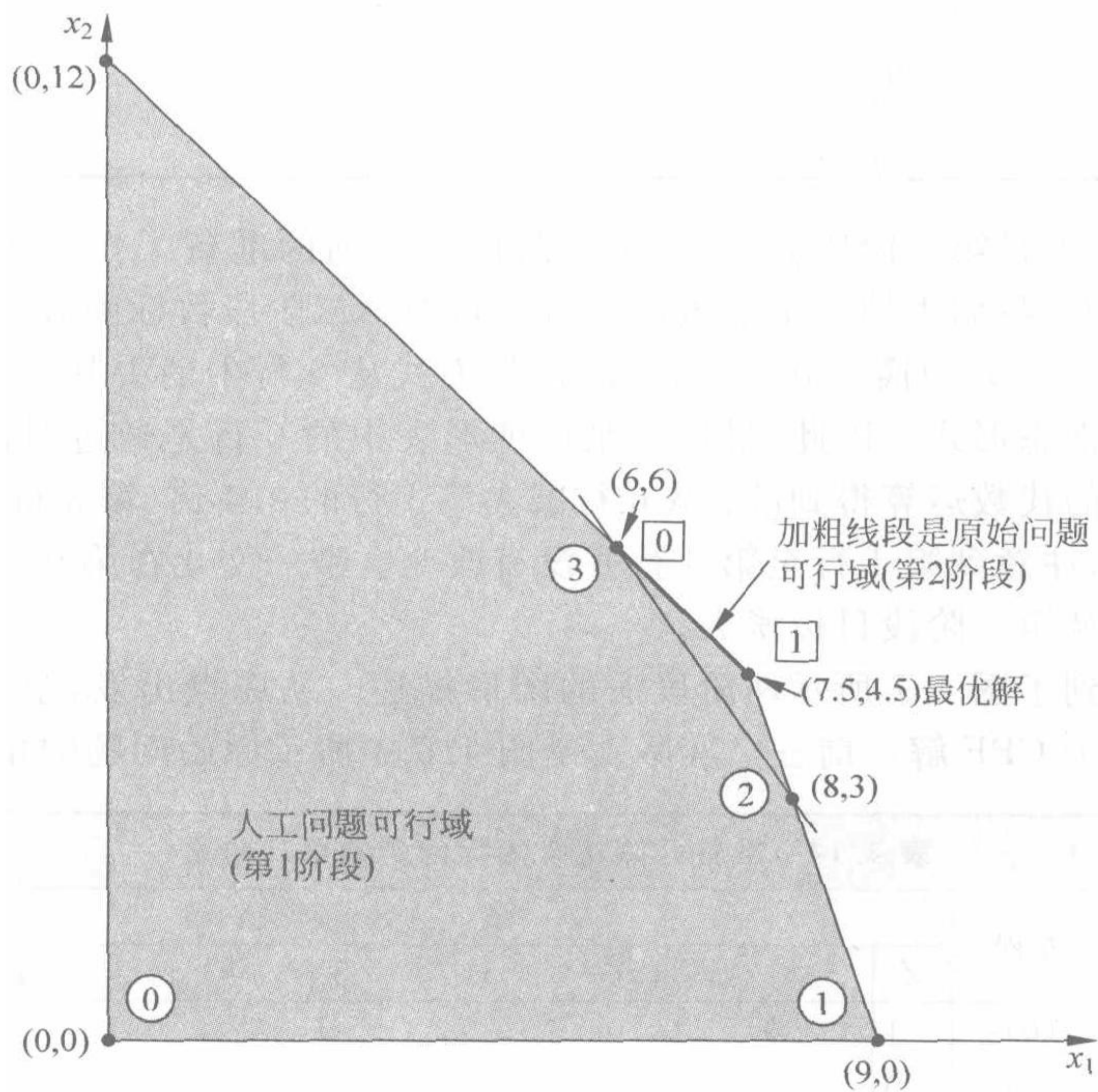


图 4.7 图形表述的是应用两阶段法求解放射治疗问题时,第一阶段的 CPF 解(①、①、②、③)和第二阶段的 CPF 解(①、①)

四个 CPF 解(6,6)是第一个对原始问题也可行的解,因此它成为第二阶段的初始 CPF 解,第二阶段中经过一次迭代得到了最优 CPF 解(7.5,4.5)。

表 4.14 的最后一张单纯形表是第二阶段问题应用单纯形法的初始表格,如表 4.15 顶部所示,只一次迭代就得到了最优解,如第二张表所示: $(x_1, x_2, x_3, x_5) = (7.5, 4.5, 0, 0.3)$ 。这个解是原始问题希望的最优解,但不是第一阶段构建的人工问题最优解。

表 4.15 放射治疗问题的第二阶段

迭代	基变量	方程	系数					右端项
			Z	x_1	x_2	x_3	x_5	
0	Z	(0)	-1	0	0	0	-0.5	-5.4
	x_1	(1)	0	1	0	0	-5	6
	x_3	(2)	0	0	0	1	1	0.3
	x_2	(3)	0	0	1	0	5	6
1	Z	(0)	-1	0	0	0.5	0	-5.25
	x_1	(1)	0	1	0	5	0	7.5
	x_5	(2)	0	0	0	1	1	0.3
	x_2	(3)	0	0	1	-5	0	4.5

对表 4.13 倒数第二张表格中的入基变量的相持,如果可以用其他方法突破的话,第一阶段可以直接从(8,3)到(7.5,4.5)。当运用(7.5,4.5)构造第二阶段的单纯形表时,最优性检验会显示这个解最优,就不用再进行迭代。

对比大 M 法和两阶段法是很有意思的。先对比目标函数。

大 M 法:

$$\min Z = 0.4x_1 + 0.5x_2 + M\bar{x}_4 + M\bar{x}_6$$

两阶段法:

第一阶段: $\min Z = \bar{x}_4 + \bar{x}_6$

第二阶段: $\min Z = 0.4x_1 + 0.5x_2$

因为大 M 法的目标函数中 $M\bar{x}_4$ 和 $M\bar{x}_6$ 的贡献远大于 $0.4x_1$ 和 $0.5x_2$, 当 $\bar{x}_4 > 0$ 和 (或) $\bar{x}_6 > 0$ 时, 这个目标函数与第一阶段目标函数本质上是等价的。因此, 当 $\bar{x}_4 = 0$, $\bar{x}_6 = 0$ 时, 大 M 法的目标函数与第二阶段完全等价。

因为目标函数实际上是等价的, 大 M 法和两阶段法通常有相同的一系列的 BF 解。当两阶段法的第 1 阶段中存在入基变量相持时, 也有例外的可能, 如表 4.13 的第 3 张单纯形表中所出现的情况。注意表 4.12 和表 4.13 的前三张单纯形表几乎是相同的, 唯一的不同在于表 4.12 中的乘数因子 M 在表 4.13 对应的位置上变成了单位量。因而, 在表 4.12 的第三张单纯形表中的加项对突破入基变量相持的作用很小, 在表 4.13 中对突破同样的相持则没有出现。本例的结果是两阶段需要再进行一次迭代。然而总的来说, 加项因素所起的作用很小。

两阶段法优于大 M 法的是只在第一阶段使用乘数因子, 而在第二阶段就去掉人工变量(大 M 法可以通过赋予 M 一个极大的值把乘数和加项结合起来, 但这会产生数据不可靠现象)。因此, 计算机程序运算中通常用两阶段法。

无可行解

至此,本节涉及的主要是当不存在一个明显的初始 BF 解时如何确定一个初始 BF 解这样的基础问题。你已经看到如何运用人工变量方法来构造人工问题从而得到人工问题的初始 BF 解。然后,运用大 M 法和两阶段法,确保单纯形法迭代朝着原始问题的 BF 解,最终朝着获取原始问题最优解的方向运行。

但是,你应该注意到这个方法存在一定的缺陷,那就是可能无明晰的初始 BF 解可选,因为根本没有可行解。然而,通过构建人工可行解,单纯形法仍会照常进行,最终得到一个伪最优解。

幸运的是,当这种情况发生时,人工变量法提供了下列信号:

如果原始问题无可行解,大 M 法和两阶段法的第一阶段得到的解中至少有一个人工变量值大于 0。否则,它们均等于 0。

为了说明这一点,我们把放射治疗问题(参见图 4.5)的第一个条件做一下改变:

$$0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7 \quad \rightarrow \quad 0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 1.8$$

至此,这个问题不再有可行解了。像以前一样(见表 4.12)应用大 M 法会得到如表 4.16 所示的单纯形表(两阶段法的第一阶段会得到同样的表格,只是含有 M 的每个表达式都被乘数代替)。因此,大 M 法正常会显示最优解是 $(3, 9, 0, 0, 0, 0.6)$ 。然而,因为人工变量 $\bar{x}_6 = 0.6 > 0$,这个问题的真实信息是无可行解。^①

表 4.16 修改为无可行解的放射治疗问题用大 M 法求解

迭代	基变量	方程	系数							右端项
			Z	x_1	x_2	x_3	\bar{x}_4	x_5	\bar{x}_6	
0	Z	(0)	-1	$-1.1M+0.4$	$-0.9M+0.5$	0	0	M	0	$-12M$
	x_3	(1)	0	0.3	0.1	1	0	0	0	1.8
	\bar{x}_4	(2)	0	0.5	0.5	0	1	0	0	6
	\bar{x}_6	(3)	0	0.6	0.4	0	0	-1	1	6
1	Z	(0)	-1	0	$-\frac{16}{30}M + \frac{11}{30}$	$\frac{11}{3}M - \frac{4}{3}$	0	M	0	$-5.4M - 2.4$
	x_1	(1)	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$	0	0	0	6
	\bar{x}_4	(2)	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	1	0	0	3
	\bar{x}_6	(3)	0	0	0.2	-2	0	-1	1	2.4
2	Z	(0)	-1	0	0	$M+0.5$	$1.6M-1.1$	M	0	$-0.6M-5.7$
	x_1	(1)	0	1	0	5	-1	0	0	3
	x_2	(2)	0	0	1	-5	3	0	0	9
	\bar{x}_6	(3)	0	0	0	-1	-0.6	-1	1	0.6

^① 已经开发出一些方法(已集成于线性规划应用软件)用来分析究竟是什么原因引起一个大型线性规划问题无可行解,以便于修改表达式中的错误。例如见 J. W. Chinneck, *Feasibility and Infeasibility in Optimization: Algorithms and Computational Methods*, Springer Science+Business Media, New York, 2008.

允许为负的变量

在大多数原始问题中,决策变量的负值可能无实际意义,因此在构建线性规划模型时需要包括非负的约束。然而,情况并不总是这样。为说明起见,假设 Wyndor Glass 公司问题变为产品 1 已经在生产中,第 1 个决策变量 x_1 代表产品 1 产量的增加数。因此, x_1 的负值就代表产品 1 产量被削减的数。这样的削减也许会发生,因为这将容许利润更大的新产品 2 产量大幅度地增加。因此,模型 x_1 允许为负。

由于确定出基变量的过程要求所有变量具有非负的约束,因此任何一个包含允许为负的变量的问题必须转化为只有非负变量的等价的问题。所幸这个转换是可以实现的,每个变量所需的修改都取决于它的值是否有(负值的)下界。下面讨论两种情况。

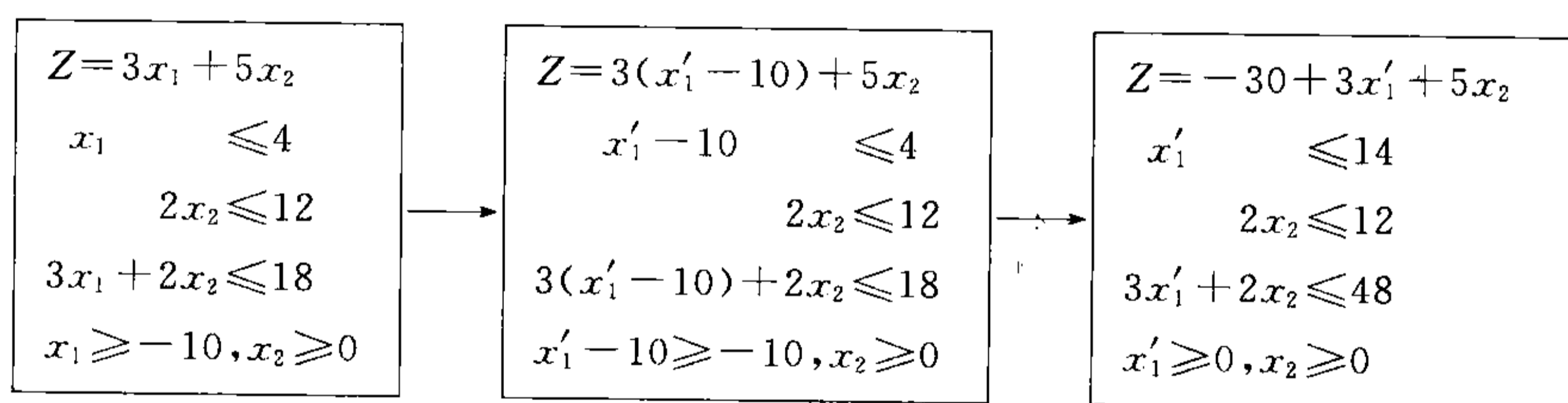
允许为负的有界变量

考虑一个允许有负值约束且满足约束 $x_j \geq L_j$ (L_j 是一个负常数)的决策变量,可以通过变量变换把这个约束条件转化成非负约束。

令 $x'_j = x_j - L_j$, 则 $x'_j \geq 0$ 。

这样,在整个模型中, $x'_j + L_j$ 都被用来取代 x_j , 因此重新定义的决策变量 x'_j 不可能为负值(当 L_j 为正值,要把它约束条件 $x_j \geq L_j$ 转变为非负的变量约束 $x'_j \geq 0$ 时,也可以用同样的方法获得)。

为了说明这一点,假定 Wyndor Glass 公司问题的产品 1 当前产量为 10。根据给定的 x_1 定义,除了非负的约束 $x_1 \geq 0$ 变为 $x_1 \geq -10$ 之外,现在整个模型和 3.1 节中给出的是同样的。为了得到单纯形法所需的等价模型,该决策变量被重新定义为产品 1 的总产量 $x'_1 = x_1 + 10$,这就使得目标函数和约束改变了,表示如下:



允许为负的非有界变量

如果在模型表达式中 x_j 无下界约束,则需要另一种方法:整个模型 x_j 被两个非负变量的差

$$x_j = x_j^+ - x_j^-, \text{ 其中 } x_j^+ \geq 0, x_j^- \geq 0$$

所代替。因此 x_j^+ 和 x_j^- 可以有任意非负值,它们的差 $x_j^+ - x_j^-$ 可以是任意值(正或负),因此它是模型中 x_j 的合法替代品。但经过这种替代后,模型中只含有非负变量,单纯形法就可以进行了。

新变量 x_j^+ 和 x_j^- 意义十分简单。正如下一段所述,新形式模型的每一个 BF 解都会具有以下性质: $x_j^+ = 0$ 或是 $x_j^- = 0$, 或者全部为零。因此在单纯形法的最优解(一个 BF 解)中

$$x_j^+ = \begin{cases} x_j & x_j \geq 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad x_j^- = \begin{cases} |x_j| & x_j \leq 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

因此 x_j^+ 代表决策变量 x_j 的正的部分, x_j^- 代表负的部分(就像变量右上角标所提示的)。

例如,如果 $x_j = 10$,上述表达式会得出 $x_j^+ = 10, x_j^- = 0$ 。相同的值 $x_j = x_j^+ - x_j^- = 10$ 也会出现在 x_j^+ 和 x_j^- 值较大时,因此 $x_j^+ = x_j^- + 10$ 。在一个二维图中描出 x_j^+ 和 x_j^- 的点得到一条直线,该直线以 $x_j^+ = 10, x_j^- = 0$ 为端点以符合非负约束的要求。这个端点是这条直线上唯一的角点解。因此,在包括模型所有变量的解中,只有这个端点可以作为一个全部 CPF 解或者 BF 解的一部分。这就说明了为什么每一个 BF 解必须有 $x_j^+ = 0$ 或 $x_j^- = 0$ (或全部为 0)。

为了说明 x_j^+ 和 x_j^- 的用途,我们回到上面的例子中,当时 x_1 被重新定义为 Wyndor Glass 公司产品 1 的增量,当前产品 1 的生产量为 10。

然而,现在假设 $x_1 \geq -10$ 这个约束不被包括在原模型中,因为很明显它并不会改变最优解(在某些问题中,变量无须特定的下界约束,因为约束条件表达式已经阻止了更小的值)。因此在运用单纯形法前, x_1 由 $x_1 = x_1^+ - x_1^-$ 所取代,其中 $x_1^+ \geq 0, x_1^- \geq 0$ 。表述如下:

$\begin{aligned} \max \quad & Z = 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 \leq 4 \\ & 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & x_2 \geq 0 \text{ (仅有的)} \end{aligned}$	→	$\begin{aligned} \max \quad & Z = 3x_1^+ - 3x_1^- + 5x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1^+ - x_1^- \leq 4 \\ & 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1^+ - 3x_1^- + 2x_2 \leq 18 \\ & x_1^+ \geq 0, x_1^- \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$
--	---	--

从计算角度来说,这个方法有一个缺点,即新的等价模型变量比初始模型多。事实上,如果所有初始变量没有下界约束,新的模型会有两倍的变量。所幸这个方法可稍作修改以使不管有多少初始变量需要被代替时,变量数目只增加一个。这个修订通过把每个这样的变量 x_j 变为 $x_j = x_j' - x_j''$ ($x_j' \geq 0, x_j'' \geq 0$) 而实现。此处的 x_j'' 对于所有相关的 j 来说是同一个变量。对本例中 x_1'' 的含义是: x_1'' 是最大(绝对值)的负原始变量的当前值,因此 x_1' 是 x_1 超过这个值的量。因此当 $x_1'' = 0$ 时,单纯形法也可以使一些 x_1' 变量大于 0。



4.7 优化后分析

在 2.3 节、2.4 节和 2.5 节中,我们强调了优化后分析——该分析在求得初始形态模型的最优解之后进行——构成了运筹学研究中非常主要、非常重要的部分。优化后分析非常重要,这一点对典型线性规划应用是千真万确的。本节讨论在优化后分析中单纯形法的作用。

表 4.17 总结了进行线性规划研究的优化后分析的主要步骤,最右列给出了包括单纯形法在内的一些计算方法。本节将简要介绍这些方法,具体内容在以后章节详细介绍。

表 4.17 线性规划的优化后分析

任 务	目 的	方 法
模型调试	寻找模型中的不足和缺陷	再优化
模型确认	确定最终模型的有效性	见 2.4 节
对资源(b_i)分配的最终管理决策	将组织资源在研究的活动和其他重要活动之间做出恰当的分配	影子价格
测评模型参数估计值	确定一些重要的估计值,做进一步研究时这些可能会影响最优解	敏感度分析
模型参数之间平衡点测评	确定最好的平衡点	参数线性规划

再优化

正如 3.6 节中讨论的,从现实中产生的线性规划模型通常都很大,有几百个、几千个甚至几百万个约束条件和决策变量。在这些情况下,当考虑从不同情境的角度出发时,我们会对基本模型的许多变化感兴趣。因此,在找到一个线性规划模型的最优解之后,对该问题略加变化的模型,我们经常需要再次(常常是多次)求解。在模型调试阶段(如 2.3 节和 2.4 节所述),我们几乎总是需要重新求解很多次;同样,在优化后分析的后阶段我们也必须进行多次求解。

一种处理方法是简单地对模型的每个变化都从头开始重新运用单纯形法,即使对一个大型问题的每次运行都可能需要执行上百次甚至上千次的迭代。然而,一个更有效的方法是再优化。再优化方法包括推断如何把模型的变化反映到最终的单纯形表中(如 5.3 节和 6.6 节所述)。那么,被修改的单纯形表和原先模型的最优解就可以作为求解新模型的初始表和初始基本解。如果这个解对新模型是可行的,那么就从该初始 BF 解开始,照常运用单纯形法;如果解不可行,被称为对偶单纯形法(7.1 节所述)的相应算法可能被用来找到新的最优解,这个方法同样是从这个基本解开始进行的。^①

再优化方法相对从头开始重新求解方式的一个最大优点就是修改后模型的最优解可能更靠近原先模型的最优解,而不是靠近比照常规运用单纯形法构建的初始 BF 解。因此,假设模型修改适度,那么进行再优化只需几次迭代就可以了,而无须从头开始进行上百次、上千次的运算。事实上,原先模型和修改后的模型常常具有相同的最优解,这时,再优化方法只需一次最优化性检验而无须迭代计算。

影子价格

我们知道,线性规划问题常常可以被理解为一些活动分配资源的方法。特别地,当约束条件是“ \leq ”形式时,我们把 b_i (右端项)理解为活动中所考虑的被利用的各种资源的数量。在许多情况下,可用的数量也许会有一个限制范围。如果这样的话,在初始(有效的)模型中 b_i 的值实际上可以代表管理上试验性的初始决策,它表示在管理范围内有多少组

^① 这里应用对偶单纯形法的一个要求是在对修订后的最终表的 0 行上,仍能通过最优性检验。如果不能通过,仍可由一个被称为原始-对偶(primal-dual)方法的算法来替代。

织的资源可用于模型中被考虑的活动而非其他重要活动的估计。从更广的角度来说,在修改的模型中某些 b_i 值可以增加,但仅当有足够强的事实证明时,这种修改才是有利的。因此,在当前研究中,有关资源对 Z 表现度量上经济贡献的信息特别重要。单纯形法以影子价格形式提供了各种资源的这种信息。

资源 i 的影子价格(用 y_i^* 表示)衡量这种资源的边际值,即当(稍微)增加所使用资源 (b_i) 的数量时, Z 的增长率。^{①②} 单纯形法可确定影子价格: y_i^* = 最终单纯形表中 0 行第 i 个松弛变量系数。

为了说明这点,仍以 Wyndor Glass 公司问题为例。

资源 i = 对两种新产品来说能够利用的 i ($i=1,2,3$) 车间的生产能力, b_i = 车间 i 两种新产品可利用的每周生产工时数。

假设因新产品要求较多的生产工时,而需要调整当前产品的生产工时, b_i 值的选择就是一个复杂的管理决策。3.1 节和本章基本模型中反映的试验性初始决策 $b_1=4, b_2=12, b_3=18$ 。然而,管理层现在希望估计当 b_i 值任意改变时的结果。

这三种资源的影子价格提供的正是管理所需的信息,由表 4.8 给出的最终表得出:

$y_1^* = 0$ = 资源 1 的影子价格

$y_2^* = \frac{3}{2}$ = 资源 2 的影子价格

$y_3^* = 1$ = 资源 3 的影子价格

当仅有两个决策变量时,这些数字可通过图形分析得到证实。当任意 b_i 单独增加 1 个单位时, Z 的最优值的确会增加 y_i^* 。例如,图 4.8 证实了对于资源 2 来说的这个增量,这是通过重新运用 3.1 节中所述的图形法得到的。当 b_2 增加一个单位(从 12 增到 13)时,最优解由 $(2, 6)$ 、 $Z=36$, 变为 $(\frac{5}{3}, \frac{13}{2})$ 、 $Z=37\frac{1}{2}$ 。因此

$$y_2^* = \Delta Z = 37\frac{1}{2} - 36 = \frac{3}{2}$$

因为 Z 代表周利润是以“千美元”为单位的,这样 $y_2^* = \frac{3}{2}$ 表示的就是车间 2 每周对两种新产品多增加 1 个生产工时,会使总利润每周增加 1 500 美元。这个实际上可行吗?这有赖于目前利用这个生产工时的其他产品的边际利润。如果车间 2 的当前产品周生产工时的每小时贡献利润少于 1 500 美元,那么把生产工时转移到新产品上就是值得的。

我们将在 6.7 节中继续讨论这个例子——Wyndor Glass 公司运筹小组运用影子价格作为对模型灵敏度分析的一部分。

图 4.8 证实 $y_2^* = \frac{3}{2}$ 是 b_2 稍作增加时 Z 的增长率。然而,它也证明了仅在 b_2 增量很小的情况下才成立的这种普遍现象。当 b_2 增量超过 18 时,最优解将保持在 $(0, 9)$, Z 也

① b_i 的增长应足够小以保证当前基变量仍然最优,因为只要基变量组改变时增长率(边际值)就会改变。

② 当约束条件是“ \geq ”或“ $=$ ”形式时,它的影子价格被定义为 b_i 增加时 Z 的增长率,尽管 b_i 现在可被理解为其他内容而非资源可得的数量。

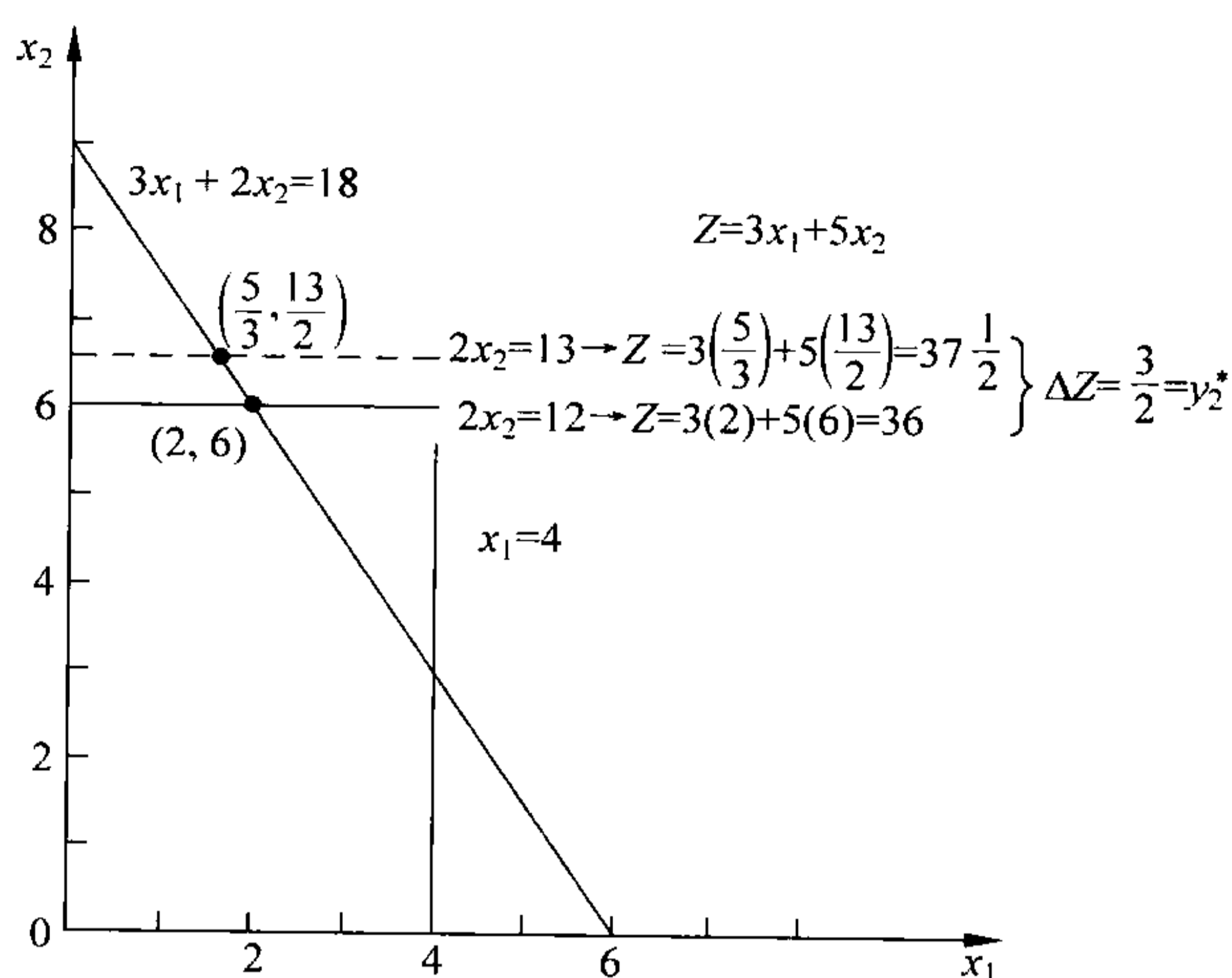


图 4.8 这个图形显示 Wyndor Glass 公司问题的资源 2 的影子价格是 $y_2^* = \frac{3}{2}$ 。

这两个点是 $b_2 = 12$ 或 $b_2 = 13$ 的最优解,把这些解代入目标函数揭示了

增加一个单位 b_2 可增加 $y_2^* = \frac{3}{2}$ 个单位的 Z

不再增加(在该点,最优解对应的基变量组改变了,因此会得到一个新的单纯形表,表中显示新的影子价格,包括 $y_2^* = 0$)时的新的最终单纯形法。

注意图 4.8 中为何 $y_1^* = 0$ 。因为资源 1 的约束, $x_1 \leq 4$, 在最优解 $(2, 6)$ 时没有约束力,这个资源有剩余。因此, b_1 增加超过 4 并不会得到一个具有更大 Z 值的新的最优解。

相反,对资源 2 和资源 3 的约束, $2x_2 \leq 12$, $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ 是有约束力的约束(binding constraints)(在最优解时约束以等式成立)。因为这些资源的有限供应量($b_2 = 12$, $b_3 = 18$)限制了 Z 的进一步增长,它们有正的影子价格。经济学家称这类资源是稀缺资源,而把处于剩余状态的资源(如资源 1)称为免费资源(其影子价格为 0)。

当考虑组织内部资源的再分配时,影子价格所提供的这种信息对于管理来说十分有用。当要从组织外部的市场购进更多资源来增加 b_i 时,影子价格信息也非常有帮助。例如,假定 Z 代表利润,项目活动的单位利润(c_j 的值)包含了所耗资源的成本(以常规价格计)。资源 i 的正的影子价格 y_i^* 代表以常规价格购买 1 个单位的这种资源时,总利润可以增加 y_i^* 。相反,如果在市场上必须为这种资源支付加价时, y_i^* 代表值得支付的最大加价费用。^①

影子价格的基本理论由第 6 章的对偶理论提供。

灵敏度分析

在 3.3 节结尾讨论对线性规划模型的确定假设时,我们指出模型参数值(表 3.3 所列的 a_{ij} 、 b_i 和 c_j)一般来说仅是估计量,它们的真实值只有在线性规划研究结果在将来某个时间实施后才会知道。灵敏度分析的主要目的就是要确定敏感参数(sensitive

^① 如果单位利润年不包括所耗资源成本, y_i^* 代表增加 b_i 时值得支付的总价。

parameters)(即若没有最优解的改变就不能改变的参数)。敏感参数是那些需特别注意估计的参数,目的是最小化产生错误最优解的风险。当研究结果被执行时,还需密切监测这些参数。如果发现模型中敏感参数的真实值与估计值不同,这就直接发出了一个信号:需要立即改变这个解。

如何求得灵敏性参数呢?就 b_i 而言,你会看到由影子价格所给出的这个信息,影子价格是由单纯形法计算得到的。特别地,当 $y_i^* > 0$ 时, b_i 改变,则最优解改变,因此 b_i 是敏感性参数。而 $y_i^* = 0$ 暗示着最优解至少是对 b_i 小的改变不敏感。因此,如果所用 b_i 的值是对可得(而非管理决策)资源量的估计时,那么一些具有正影子价格特别是大的影子价格的 b_i 值,就需要被密切关注。

当仅有两个变量时,不同参数灵敏度分析可由图示完成。例如,图 4.9 中, $c_1 = 3$ 可以变为 0 至 7.5 中的任何一个值,而不会使最优解(2,6)发生变化(原因是这个范围内的任意值 c_1 都可使 $Z = c_1x_1 + 5x_2$ 位于线段 $2x_2 = 12$ 和 $3x_1 + 2x_2 = 18$ 之中)。类似地,如果 $c_2 = 5$ 是唯一改变的参数,它可以是大于 2 的任意值,而不会影响最优解。因此, c_1 和 c_2 都不是敏感参数(你的 IOR Tutorial 上名为“图示方法和灵敏度分析”(Graphical Method and Sensitivity Analysis)的过程可以使你有效地进行这种图示分析)。

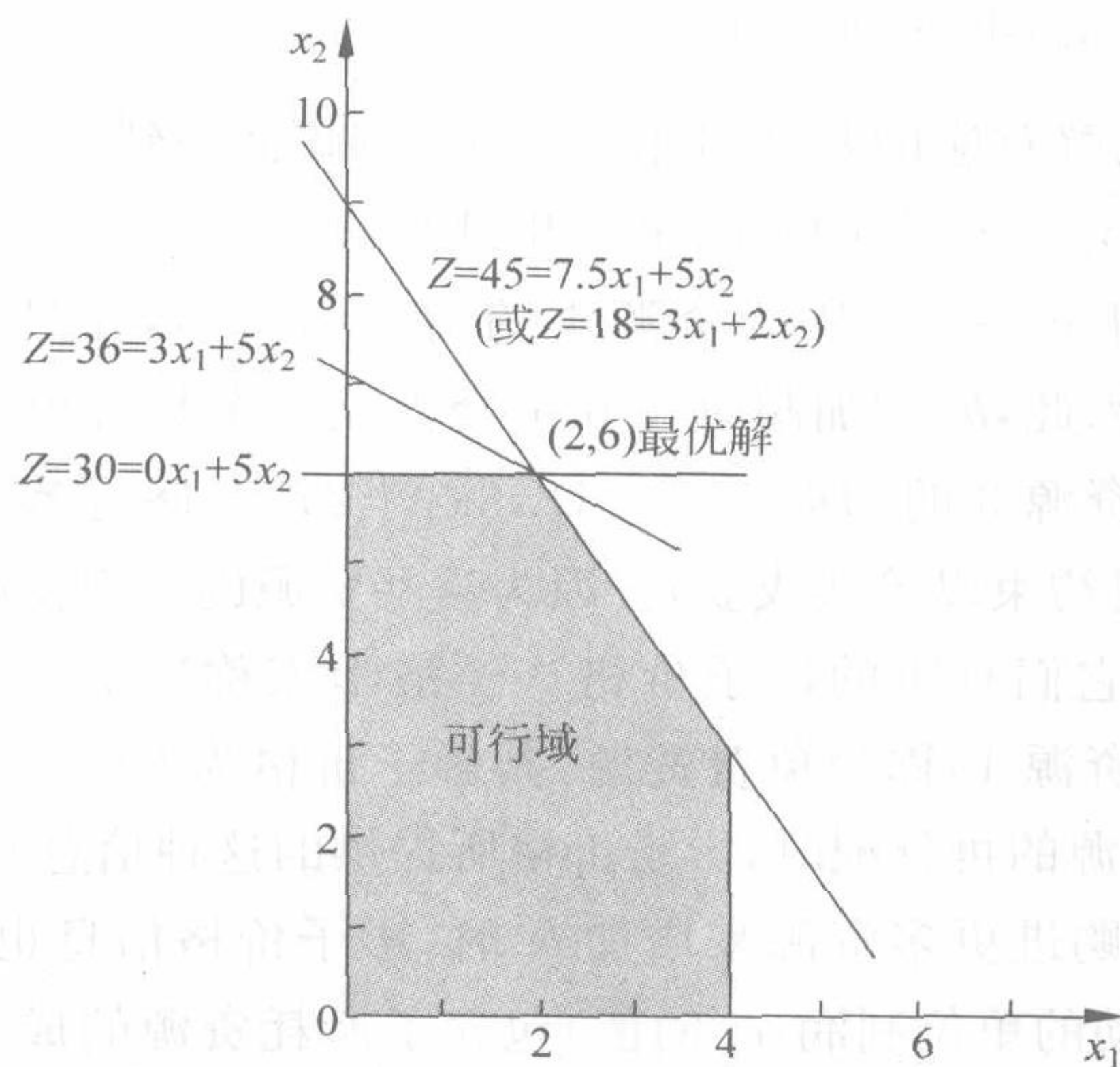


图 4.9 这个图形描述了 Wyndor Glass 公司问题的 c_1 和 c_2 的灵敏度分析。以初始目标函数线 $c_1 = 3, c_2 = 5$, 最优解是(2,6), 另两条线显示了目标函数线变化以及保持最优解(2,6)的范围。因此,当 $c_2 = 5$ 时, c_1 的允许变化范围是 $0 \leq c_1 \leq 7.5$; 而 $c_1 = 3$ 时, c_2 的允许变化范围是 $2 \leq c_2$

从图解分析每个参数的灵敏度的最简单的方法是判断对应的约束在最优解时是否有限制作用。因为 $x_1 \leq 4$ 不是有限制作用的约束,它的系数($a_{11} = 1, a_{12} = 0$)的一个充分小的变化不会改变最优解,所以这些不是敏感参数。另外, $2x_2 \leq 12, 3x_1 + 2x_2 \leq 18$ 是有限制作用的约束,它们的任意一个系数($a_{21} = 0, a_{22} = 2, a_{31} = 3, a_{32} = 2$)改变都会引起最优解的改变,所以它们是敏感参数。

通常,我们相对 a_{ij} 参数会更注意对 b_i 和 c_j 的灵敏度分析。对于有着上百个或者上千个约束和变量的现实问题,改变一个 a_{ij} 的值的影晌通常是可以忽略的;但改变一个 b_i 或 c_j 的值却会有实质的影响。进一步说,在许多场合, a_{ij} 值是由所采用的工艺决定的(a_{ij} 值有时被称为工艺系数),因此它们的终值不确定性相对较小(或者没有)。这是好的,因为大型问题中参数 a_{ij} 数量远多于参数 b_i 和 c_j 。

对决策变量多于两个(也可能是三个)的问题,你不能像刚才分析 Wyndor Glass 公司问题那样,用图示法分析参数的灵敏度。但是,你可以从单纯形法中提取同样的信息。获取这种信息需要用到 5.2 节中所述的基础的审视来推断改变初始模型参数值时所引起的最终单纯形表的变化。剩下的程序将在 6.6 节和 6.7 节中讲述。

运用 Excel 产生灵敏度分析信息

灵敏度分析通常含在基于单纯形法的软件包中。比如,Excel 求解器会按照请求指令产生灵敏度分析信息,如图 3.21 所示。当求解器给出“解已经被找到”的信息时,也会在右侧给出三个可以提供的报告的清单。在求出 Wyndor Glass 公司问题解时,选择第二个表(标记为“灵敏度”),你会得到如图 4.10 所示的灵敏度报告,报告中上面的表提供了决策变量和它们在目标函数中的系数的灵敏度分析信息,下面的表是对约束条件和它们的右端项的灵敏度分析信息。

可调整单元						
单元	名称	最终值	减少的成本	目标函数系数	允许增加值	允许减少值
\$C\$12	门的批次数	2	0	3 000	4 500	3 000
\$D\$12	窗的批次数	6	0	5 000	1E+30	3 000
约束条件						
单元	名称	最终值	影子价格	约束右端项	允许增加值	允许减少值
\$E\$7	使用工厂 1 的工时	2	0	4	1E+30	2
\$E\$8	使用工厂 2 的工时	12	1 500	12	6	6
\$E\$9	使用工厂 3 的工时	18	1 000	18	6	6

图 4.10 Excel 求解器产生的 Wyndor Glass 公司问题的灵敏度报告

先看图中上面的表。“最终值”列指出的是最优解。下一列给出“减少的成本”(我们不再讨论“减少的成本”,因为它提供的信息也可以从这张表的其他部分获得)。接下来的三列给出的是保持这个最优解时,目标函数的每个系数 c_j 的允许变化范围的信息。

对 c_j 而言,它的允许变化范围是假定其他系数不变,能够保持当前最优解仍为最优时的系数变化范围。

“目标函数系数”列给出了每个系数的当前值,接下来的两列给出的是这个值在允许变化范围内的允许增加和允许减少的量。电子表格版的模型(见图 3.22)的每批利润以美元为单位表示,而代数版的线性规划模型中的 c_j 单位是千美元,这样,要保持与 c_j 单位的一致性,这三列的数量需除以 1 000。因此, $\frac{3\,000-3\,000}{1\,000} \leq c_1 \leq \frac{3\,000+4\,500}{1\,000}$, 从而 $0 \leq c_1 \leq 7.5$ 是当前最优解保持最优(假设 $c_2=5$ 时)时,允许 c_1 变化的范围,这与图 4.9 中得

出的结论一样。同样,因 Excel 运用 $1\text{E}+30(10^{30})$ 代表无穷,故而 $\frac{5\,000-3\,000}{1\,000} \leq c_2 \leq \frac{5\,000+\infty}{1\,000}$, 即 $2 \leq c_2$ 是保持最优解不变时 c_2 的允许变化范围。

决策变量系数的允许增加和允许减少都大于 0 这一事实可以给出另一条有用信息,叙述如下。

当 Excel 求解器产生的灵敏度报告的上部分表格中指出每个目标函数允许增加和允许减少值都大于 0 时,这表明“最终值”列中的最优解是唯一最优解。相反,任意一个允许增加和允许减少的值等于 0,是存在多个最优解的标志。相应的系数改变一个大于 0 且在允许范围内的极小的量,再次求解后会得到原模型的另一个最优 CPF 解。

现在考虑图 4.10 中下面的表,这是关于三个约束条件的灵敏度分析结果。“终值”列给出的是最优解时,每个约束条件左边的值,接下来两列给出了每个约束条件的影子价格和右端项的当前数值(这些电子表格模型的影子价格是以美元为单位的,因此为与线性规划代数版 Z 的单位千美元保持一致,需除以 1 000)。当仅有一个 b_i 值改变时,后两列给出的是在允许范围内 b_i 的允许增加和允许减少。

对于任意 b_i 而言,它的允许变化范围是当其他右端项保持不变的情况下,使当前最优 BF 解(基变量的值有调整^①)仍为可行解的范围。这个范围的一个重要性质是:当评价 b_i 的改变会对 Z 产生影响时,只要 b_i 的值在这个允许变化范围之内, b_i 的当前影子价格就仍然有效。

这样,运用图 4.10 下面的表,把后两列与右端项的当前值结合起来,就得出保持可行解的 b_i 的允许变化范围:

$$2 \leq b_1$$

$$6 \leq b_2 \leq 18$$

$$12 \leq b_3 \leq 24$$

Excel 求解器产生的灵敏度报告是由线性规划软件包提供的典型的灵敏度分析信息。你会在附录中看到 LINDO 会提供几乎一样的报告。对 MPL/CPLEX,当在解文件对话框中提出请求时,也会给出同样的报告。再重复一遍,对于两变量而言,这种代数上可获得的信息从图解分析中也可以获得(见习题 4.7-1)。例如,在图 4.8 中,当 b_2 从 12 开始增加时,仅在 $b_2 \leq 18$ 时,在约束边界 $2x_2 = b_2$ 和 $3x_1 + 2x_2 = 18$ 的交点上原来的最优 CPF 解才会保持可行(包括满足 $x_1 \geq 0$)。第 6 章的后面部分会更深入地讨论对这种类型的分析。

本书网站工作例子部分包含应用灵敏度分析(既用图解法,也用敏感性分析报告)的另一个例子。第 6 章的后面部分将更深入探讨这类分析。

参数线性规划

灵敏度分析围绕一次改变一个初始模型中的参数来考察它对最优解的影响。而参数

^① 因为基变量的值由方程组(扩展形式的约束条件)的联立求解得到,当一个右端项改变时至少有某些值会改变,然而,只要右端项的新值在允许变化范围内,当前基变量的调整值仍会满足非负约束,因此仍然可行。如果调整后的基本解仍可行,它也仍然最优。在 6.7 节中我们会进一步讨论。

线性规划(parametric linear programming)(或简称参数规划)则是系统地研究几个参数在某个范围内同时变化时最优解的变化情况。这种研究给灵敏度分析提供了一个有用的延伸,例如,检查由于外在因素变化如经济状况变化,导致关联参数同时改变时带来的影响。然而,更重要的应用是对参数值平衡点的研究。例如, c_j 值代表各个活动的单位利润,通过适当转换活动中涉及的人和设备的手段,以减少其他 c_j 值为代价而增加某些 c_j 值是可能的。同样地,如果 b_i 值代表可得资源的数量,也可能通过允许减少其他一些 b_i 的值而增加一些 b_i 的值。这种可能性的分析将在 6.7 节末讲述。

在一些应用中,这种研究的主要目的是决定两个基本因素(如成本和利润)的最适当的平衡点。最常用的方法是把一个因素表示在目标函数(例如总成本最小)中,把相关另一个放入约束条件(如利润 \geq 可接受的最低水平)中,如 3.4 节中 Niro&Leets 公司的空气污染问题所做的。当通过某些代价改善了一个因素而使基于平衡点(如利润的最低期望值)的初始假设决策发生改变时,参数线性规划方法就能对其做出系统研究。

参数线性规划的算法是灵敏度分析方法的自然延伸,因此,它也是建立在单纯形法基础上的。这个过程将在 7.2 节介绍。



4.8 在计算机上的实施

如果计算机未被发明,毫无疑问你根本就不会听说线性规划和单纯形法。尽管可以手工运用单纯形法解决一些小问题,但依常规基础进行所涉及的计算太冗长乏味了。单纯形法非常适合在计算机上执行。计算机革命使线性规划在近几十年的广泛应用成为可能。

单纯形法的实施

单纯形法的计算机编码如今在所有的现代计算机系统中都可广泛应用。这些编码通常是精细的数学规划软件包的一部分,这样的软件包也包括了后续章节中讲述的许多程序(包括用于优化后分析的)。

计算机编码产品并不严格遵循 4.3 节和 4.4 节所讲述的单纯形法的代数形式或表格形式,这些形式从计算机实现角度考虑可以被简化。因此,编码采用的是特别适合计算机使用的矩阵形式(通常称为改进单纯形法)。这种形式会完成与代数形式或表格形式同样的工作,但是它在处理过程中,计算和储存对当次迭代有实际用处的数字,然后带着这些更简洁格式的基本数据进行下去。改进单纯形法如 5.2 节和 5.4 节中所述。

单纯形法常被用来求解大型线性规划问题。例如,大的台式计算机(包括工作站)常被用来求解有上千个约束条件和更多决策变量的问题。有时,成功解决的问题有几十万

个约束条件和几百万个决策变量。^①对线性规划的某些特殊模型(例如本书以后会讲到的运输问题、分配问题和最小费用流问题)而言,再大的问题现在也可以通过单纯形法的一些特殊形式予以求解。

运用一般单纯形法求解线性规划问题所耗的时间取决于几个因素。最重要的是常规约束条件的数量。事实上,计算时间与这个数量的立方成正比,因此这个数量的2倍会使运算时间大约变为8倍。相反,变量数目的影响是一个相对小的因素。^②因此,变量数目变为2倍不太可能导致2倍运算时间。另一个具有某种重要性的因素是约束系数表的密度(即非0系数的比例),因为它会影响每次迭代运算的时间(对实践中遇到的大型问题而言,密度小于5%甚至低于1%都是常见的,这样大的稀疏性会大大加速单纯形法的计算)。迭代次数的一个常用的简单计算法则是:它大约是约束条件数的两倍。

对于大型线性规划问题,初始建模以及将其输入计算机时发生一些错误或失误是难免的。因此,正如2.4节中所述,需要一个测试和修改模型(模型有效性)的完整过程。通常最终产品不是一个仅由单纯形法一次求解的单纯的静态模型。相反,运筹小组和管理层特别考虑基于基本模型的一系列的变化(有时是上千种的变化)作为优化后分析的一部分,目的是为了测试不同的情境结果。当可以在台式计算机上交互运行时,整个过程会加速完成。由于线性规划模型语言和计算机技术的帮助,现在这已经很常见了。

20世纪80年代中期之前,线性规划模型还几乎是在大型计算机上求解的。从那以后,台式计算机(包括个人计算机和工作站)求解线性规划问题的能力大大提高。工作站包括一些具有相同的处理能力的个人计算机,现在一般也用来代替大型机解决大型线性规划模型。最快的个人计算机也不滞后,尽管求解大型问题仍需额外的存储器。

本书所述的线性规划软件

许多优秀的线性规划软件包和它的延伸可以满足各种需求,其中一种处于领先地位的软件包(Express-MP)是Dash Optimization(现已加入Fair Isaac)的产品,另一种被广泛认为特别强大的解决大型问题的软件包CPLEX是位于硅谷的ILOG公司的产品。1988年以来,CPLEX一直致力于帮助引导求解越来越大的线性规划问题。一个延伸的研究和开发努力使它有了一系列的升级,而效率也有了极大的提高。2007年发布的CPLEX11有了更大的进步,这个软件包已成功地求解了工业中产生的现实线性规划问题,这个问题有几千万个约束条件和决策变量。CPLEX运用单纯形法和它的不同形式(如7.1节将讲述的对偶单纯形法)来解决这些大型问题。除了单纯形法,CPLEX还推出另一些攻克线性规划问题的强有力武器。一种是光速算法(称为障碍算法),它运用了4.9节中介绍的内点算法。这种算法可以求解单纯形法解决不了的某些更大型的线性规划问题。另一种方法是网络单纯形法(将在9.7节讲述),这种方法可以解决更大的特别问题。

^① 不要在家里尝试这个。解决这样的大型问题需要一个特别复杂的线性规划系统,该系统将运用最新的技术来处理系数矩阵的稀疏性,也使用其他特殊方法(如用急速技术快速寻找高级的初始可行解)。在数据少许更新后问题被周期性重复求解时,通过应用(或修改)最后得到的最优解而提供一个初始BF解来进行新的运算会节省许多时间。

^② 这个说法是假定已经应用了5.2节和5.4节中讲述的改进单纯形法。

CPLEX11 超越了线性规划,还包括了整数规划(第 11 章)、二次规划(12.7 节)和整数二次规划等当今的算法。

我们期望当今的主要优化软件包像 CPLEX 那样在未来继续取得进步。计算机速度的不断提高也必将推动未来软件包的提速。

因为 CPLEX 常被用来解决大的问题,所以它通常与数学规划建模语言结合使用。如 3.7 节所述,建模语言是为了能以压缩方式更有效地表示大型线性规划模型,然后调用求解器求解这个模型而设计的。一些优秀的建模语言支持 CPLEX 作为求解器。ILOG 也推出了自己的建模语言,称为 OPL,它可以和 CPLEX 同时使用组成 OPL-CPLEX Development System,这种产品的试用版在 ILOG 的网站上可以得到(www.ilog.com)。

正如我们在 3.7 节中提到的,OR Courseware 中有 CPLEX 的学生版,可以作为 MPL 建模语言的求解器。该版本突出的是解线性规划问题的单纯形法。OR Courseware 中的 MPL 学生版包含两个其他的求解器,可供应用 CPLEX 求解线性规划问题和整数规划问题(将在第 11 章讨论)时选择。其中之一为 CoinMP,是一种公共资源的求解器,可求解比 CPLEX 学生版规模更大的问题(限定 300 个约束条件和决策变量),另一个为 LINDO。

LINDO 在求解线性规划问题及其延伸方面比 CPLEX 的历史更长,易于使用的 LINDO 界面可以作为 LINGO 优化软件包的子集应用。LINDO 的长期普及部分是受益于其应用的简便。它特别适用于教科书规模的问题,模型比较直观和直接求解。所以 LINDO 的界面为学生提供了方便使用的工具。虽然方便用于小型模型,但 LINDO/LINGO 也能求解大型模型。最大的版本已解决过含 400 万个决策变量和 200 万个约束条件和实际问题。

本书网站提供的 OR Courseware 包含一个 LINDO/LINGO 的学生版及扩充的教学指导材料,附录提供了一个简要的介绍。OR Courseware 还包含本书中用到的主要例子的建模。

建立在电子表格基础上的求解器如今对线性规划和它的扩展问题来说越来越受欢迎。处于领先地位的是 Excel 的 Frontline 系统的求解器及其他电子表格软件包。除了这些软件包的基本求解器外,更强大的 Premium 求解器产品已经面世。因为电子表格软件包的广泛使用,如今天的 Excel 产品,这些求解器正向许多人首次介绍线性规划的应用潜能。对教科书规模大小的线性规划问题(以及更大的问题),电子表格提供了模型表达和求解的一种简便的方法,如 3.5 节所述,更强大的电子表格求解器能求解含有数千个决策变量的相当大的模型。然而当电子表格增至一个很难处理的规模时,一个好的建模语言和它的求解器会提供制订和求解模型的更好的方法。

电子表格提供了一个优秀的交流工具,尤其是对一些管理人员。这些人对模型的表格形式感觉很舒服,但对运筹模型的代数表达形式感觉不舒服。因此,优化软件包和建模语言现在可以普通地输入和输出数据,最后形成一张电子表格。例如,MPL 建模语言包括了一个加强(称为 OptiMax 2000 Component Library)功能,它可以使建模者为使用者创造一个电子表格模型,同时运用 MPL 语言非常有效地表示这个模型。(OptiMax 2000 的学生版包含在运筹学课程软件中)



4.9 求解线性规划问题的内点算法

20世纪80年代运筹学上最神奇的新发展是求解线性规划问题的内点算法的发现。这是1984年由AT&T Bell实验室的一名年轻数学家 Narendra Karmarkar 发明的,当时他借助该方法成功地开发出一种解线性规划问题的新算法。尽管这种特殊算法在与单纯形法的竞争中只取得了部分的成功,但以下所述的主要解原理在解特大型线性规划问题方面有巨大的潜力,而这样的问题是单纯形法力所不及的。许多顶尖的研究者陆续地致力于修改 Karmarkar 算法以使其完全达到这种潜力,已经取得了(并且将继续取得)重大进步。使用内点算法的许多强大算法也已开发出来了。如今,更强大的用来解决真正大型线性规划问题的软件包(如 CPLEX)除包含单纯形法及其衍生方法外,至少还包括一个采用内点算法的计算方法。随着对这些算法研究的继续,它们的计算机实现也在不断改进。这刺激了对单纯形法的重新研究,单纯形法计算机实施也因而得到不断改进。关于这两种方法中的哪一种在解特大型问题上更先进的争论还在继续。

现在让我们来看一下 Karmarkar 算法的主要思想及它后续の利用内点算法的一些变化。

主要的解原理

尽管与单纯形法截然不同,但 Karmarkar 算法也与其有些相同的特征。它是一种迭代算法。它从得出一个可行的试验解开始,在每次迭代中,它在可行域内从当前试验解开始移动至另一个更好的试验解。然后继续这个过程直到试验解(基本上)达到最优解为止。

大的区别在于这些试验解的性质。对于单纯形法而言,试验解是 CPF 解(或扩展后的 BF 解)。因此,所有的移动都是在可行域的边界上进行的。对于 Karmarkar 算法而言,试验解是内点(interior points),即可行域边界以内的点。正是出于这个原因,Karmarkar 算法及其衍生算法被称为内点算法(interior-point algorithms)。

因为内点算法获得专利的早期版本称为障碍点算法,故内点算法也通常被称为障碍算法(或障碍法)(barrier algorithm)。用“障碍”一词是因为从搜索的角度去看,所找的试验解都是内点,每一个约束边界都被作为障碍对待。许多优化软件包在提到它的基于内点算法的求解器选项时,都使用“障碍”这一术语。CPLEX 和 LINDO API 都包括障碍算法,它既可以用于解线性规划问题也可用于解二次规划问题(见 12.7 节)。

为了描述内点算法,图 4.11 描绘了在运筹学课程软件中按内点算法解 Wyndor Glass 公司问题时得到的轨迹,这条轨迹是从初始试验解(1,2)开始的。注意路径达到最优解(2,6)时,这条轨迹上显示的所有试验解(点)是如何留在可行域边界之内的(所有后续的未标出的试验解也位于可行域边界内部)。对照一下由单纯形法得到的沿可行域边界移动的轨迹:从(0,0)到(0,6),再到(2,6)。

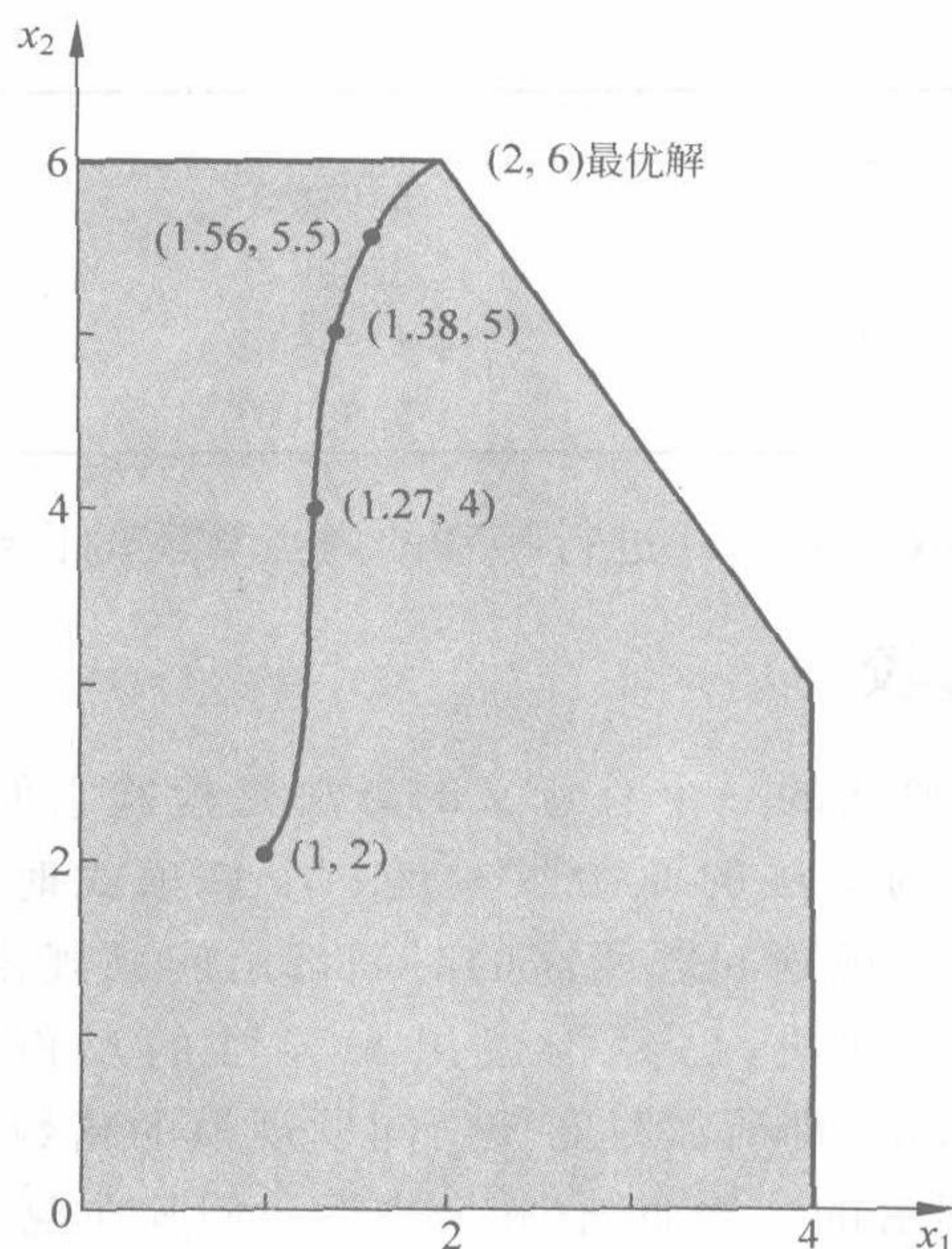


图 4.11 从点(1,2)到点(2,6)的曲线显示了内点算法解 Wyndor Glass 公司问题时遵循的通常的轨迹,这条轨迹穿过了可行域的内点

表 4.18 给出的是该问题的 IOR Tutorial 的实际输出。^① (自己试一下)注意连续的试验解是如何变得越来越接近最优解,但却永远不会完全到达最优解的。然而,这个偏差可变得无限小,以至于最后的试验解可被认为是实际的最优解。

表 4.18 OR Courseware 中的内点算法解决 Wyndor Glass 公司问题时的输出

迭代	x_1	x_2	Z
0	1	2	13
1	1.272 98	4	23.818 9
2	1.377 44	5	29.132 3
3	1.562 91	5.5	32.188 7
4	1.802 68	5.718 16	33.998 9
5	1.921 34	5.829 08	34.909 4
6	1.966 39	5.905 95	35.429
7	1.983 85	5.951 99	35.711 5
8	1.991 97	5.975 94	35.855 6
9	1.995 99	5.987 96	35.927 8
10	1.997 99	5.993 98	35.963 9
11	1.999	5.996 99	35.981 9

^① 这个过程称为内点算法的自动求解。选择菜单对算法的特定参数 α (将在 7.4 节中定义) 给出了两种选择。这里采用的选择是默认值 0.5。

续表

迭代	x_1	x_2	Z
12	1.999 5	5.998 5	35.991
13	1.999 75	5.999 25	35.995 5
14	1.999 87	5.999 62	35.997 7
15	1.999 94	5.999 81	35.998 9

7.4 节给出了应用 IOR Tutorial 进行特殊的内点算法的详细过程。

与单纯形法的比较

比较内点算法和单纯形法的一个有意义的方法是检验它们的运算复杂性的理论性质。Karmarkar 已证明他的算法的原始版本是一个**多项式时间算法**(polynomial time algorithm),即求解任何线性规划问题所需的时间都由问题规模的多项式函数界定。为证明单纯形法不具备这个性质,已经构建出来异常的反例,它符合**指数时间法则**(exponential time algorithm)(即所需时间仅由问题规模的指数函数界定)。在最坏情况下,这个差别的表现是很显著的。然而,它并未告诉我们其在现实问题上平均表现的比较情况,而这种表现的比较才是更重要的问题。

决定一个算法在现实问题上的表现有两个基本因素:每次迭代的平均计算时间和迭代次数。我们接下来的比较就涉及这两个因素。

内点算法远比单纯形法复杂得多。它的每一次迭代都需要相当大的运算量去找出下一个试验解。因此,内点算法每次迭代的计算时间是单纯形法的几倍。

对非常小的问题,内点算法需要的迭代次数与单纯形法需要的迭代次数差不多。例如,对于具有 10 个约束条件的问题,两种算法大约都需要 20 次迭代。因此,对小规模问题,内点算法需要的总计算时间要比用单纯形法长几倍。

另外,内点算法的主要优点在于解大型问题需要的迭代次数并不比小型问题多。比如,有 10 000 个约束条件的问题可能只需 100 次以下迭代。即使考虑到这种规模的问题每次迭代所需一定的时间,如此少的迭代次数也会使问题相当容易处理。相反,单纯形法需要 20 000 次迭代,因此可能无法在一个合理的计算机时间内完成。因此,对于这种大型问题来说,内点算法常常比单纯形法快。

对大型问题的迭代次数有如此大的差异是因为所走的路线不同。在每次迭代中,单纯形法沿着可行域边界从当前 CPF 解移至相邻的 CPF 解。大型问题有天文数字般的 CPF 解,从初始 CPF 解出发至最优解可能是沿着边界的一个大迂回路线的路径,每次只走一小步就到达了下一个 CPF 解,因此到达最优解须经过相当多的步数。相反,内点算法则避开所有这些而直接通过可行域指向最优解的内点。约束条件的增加带来可行域更多的约束边界,但对通过可行域内部的路径上的试验解的个数几乎没有影响。这使得内点算法有可能求解拥有大量约束条件的问题。

最后一个关键的比较在于进行 4.7 节中所述各种优化后分析的能力。单纯形法及其延伸方法非常适合并且已被广泛应用于这种分析,例如一个被称为 Optimization Decision Manager 的 ILOG 产品,充分应用 CPLEX 中的单纯形法可以很方便地实施各类

优化后分析。而内点算法目前在这方面能力有限。^① 在考虑到优化后分析的重要性时,这就是内点算法的一个主要缺陷。接下来我们将阐述如何把单纯形法和内点算法结合起来以克服这个缺陷。

单纯形法和内点算法的互补角色

当前的研究正继续提供单纯形法(及其变异方法)和内点算法在计算机上实现的主要进步。因此,关于它们将来作用的任何预测都是具有不确定性的。然而,我们还是把目前对它们补充作用情况的估计总结如下。

单纯形法(及其变异方法)仍将会是线性规划常规运用的标准算法。它仍然是有几百个约束条件之内的问题的最有效算法。它对一些(不是所有)拥有几千个约束条件和近乎无限多个决策变量的问题来说也是最有效的,因此大多数用户仍会继续使用单纯形法解决这些问题。然而,当约束条件数量进一步增多时,内点算法可能变得更有效。当规模达到上万个约束条件时,内点算法将是唯一有能力解决这种问题的方法。然而,情况并不总是这样的。在前一节中我们提到,最近的优秀软件成功地运用单纯形法及其变异方法解决了一些具有几十万甚至几百万个约束条件和决策变量的大型问题。

这些对内点算法和单纯形法在不同问题上进行比较的总结概括不会那么全面。运用的特殊的软件包和计算机设备有很大的影响。这个比较也会通过求解特定类型线性规划问题而产生影响。随着时间的推移,我们会更多地了解如何辨认这些特殊类型,它们会更适宜某一种算法类型。

内点算法带来的一个好处就是单纯形法在计算机上运行效率的改进效果大幅提高。正如我们指出的,这几年取得了显著的进步,还将有更大的进步。同时,内点算法当前的研究和发展将会进一步增大它的能量,也许会以比单纯形法更快的速度增加。

提高计算机技术,如并行处理技术(多台计算机联合同时运算处理同一个问题的不同部分时),也会充分地增加各种算法解决问题的规模。然而,目前看来,内点算法在并行处理问题上比单纯形法拥有更大的潜力。

正如前面所讨论的,内点算法的一个主要的缺点是它在优化后分析方面能力的有限性。为了克服这个缺陷,研究者们已经开发出了程序使内点算法完成后转向单纯形法。回忆一下,内点算法得到的试验解会越来越接近最优解(最好的 CPF 解)但是绝不会与最优解完全一致。因此,转换程序需确定一个离最后试验解非常接近的 CPF 解(或扩展后的 BF 解)。

例如,通过看图 4.11,很容易看出表 4.18 的最后试验解十分接近 CPF 解(2,6)。然而,面对有几千个决策变量的问题(所以无图形可用)时,确定一个临近的 CPF 解(或 BF 解)是一个十分具有挑战性和耗时的任务,然而,开发过程中取得的一些可喜进步可以用来完成这个工作。例如 CPLEX 的一个成熟的职业版本包含一个交叉算法,它可将障碍

^① 然而,旨在提高这种能力的研究正在不断取得进步。参考 E. A. Yildirim and M. J. Todd; "Sensitivity Analysis in Linear Programming and Semidefinite Programming Using Interior-Point Methods," *Mathematical Programming*, Series A, 90(2): 229-261, April 2001.

算法求得的解转换为角点解。

找到邻近的 BF 解后,单纯形法的最优性检验被用来检验是否为实际上的最优解。如果不是,会导入单纯形法迭代而完成从这个 BF 解向一个最优解转换。一般来说,只需几次迭代(可能一次),因为内点算法已为我们找到非常靠近最优解的一个点了。因此,这些迭代会很快完成,即使对那些太大以致很难从头开始求解的问题也是如此。在得到实际最优解后,单纯形法及其变异方法被用来进行优化后分析。

因为使用转换程序时的一些问题(包括额外的计算机时间),一些实践者倾向于从一开始就运用单纯形法。当你偶尔碰到内点算法可以明显的快(转换前)于单纯形法的足够大的问题时,这么做就是合乎逻辑的。这个适度的加速不包括转换程序的额外的计算机时间和获取(包括学习和使用)基于内点算法软件包的成本。然而,对于一些经常需要处理特别大的线性规划问题的组织来说,获取一个高端软件包(包括转换程序)是十分值得的。对于足够大的问题而言,解决它们的唯一可行的方法也就是这样一个软件包了。

大型线性规划模型的应用有时可以节省几百万美元,仅仅一个这样的应用就可以支付购买这种包括基于内点算法的程序及其后期过渡为单纯形法的转换程序的高端软件包了。



4.10 结论

单纯形法是求解线性规划的一个有效且可靠的算法,它也为有效进行多种优化后分析奠定了基础。

尽管单纯形法具有一个有意义的几何理解,但它仍是一个代数程序。在每次迭代中,它通过选择入基变量和出基变量,运用高斯消元法求解一个线性方程组,实现从当前 BF 解移向一个更好的且相邻的 CPF 解。若当前解无更好的相邻 BF 解,则当前解是最优解,运算也就停止了。

我们介绍了单纯形法的完整代数形式来表达它的逻辑,接着我们给出了这个方法的更简单的表格形式。为了做好实施单纯形法的准备,有时需引入人工变量来得到人工问题的初始 BF 解。如果出现这种情况,不论使用大 M 法还是两阶段法都能保证单纯形法求出现实问题的最优解。

单纯形法及其变异方法的计算机实施变得非常强大,它们通常用来解决有几千个约束条件和决策变量的线性规划问题,有时是更大的问题。内点算法也为解决大型问题提供了一个强大的工具。



附录 LINDO 和 LINGO 的使用介绍

LINDO 软件可用以下两种语句结构形式之一接受优化模型:(a)LINDO 语句结构或(b)LINGO 语句结构。下面先描写 LINDO 语句结构。LINDO 语句结构的相对优点是对单一的线性规划模型使用起来非常容易和方便。

LINDO 语句结构允许以教材中常用的自然的形式输入一个模型。例如 3.1 节中讲

述的 Wyndor Glass 公司问题的输入。已安装了 LINGO 之后,只要单击 LINGO 的图像启动 LINGO,然后立即输入下列语句:

```
! Wyndor Glass Co. Problem. LINDO model
! X1 = batches of product 1 per week
! X2 = batches of product 2 per week
! Profit, in 1000 of dollars,
MAX Profit) 3 X1 + 5 X2
Subject to
! Production time
Plant 1) X1 <= 4
Plant 2) 2 X2 <= 12
Plant 3) 3 X1 + 2 X2 <= 18
END
```

前4行每行都以一个感叹号作为开始。最先是简单的注释,第4行进一步说明目标函数以1000美元为单位。数字1000没有像通常表达时在后面三位数字0之前加逗号,因为LINDO/LINGO不接受逗号(LINDO语句结构同样不接受代数表达式中的括号)。第5行继续这个模型,决策变量可以不加下标,代之以X1或X2,也可以使用更有暗示性的名称,如产品名称,或者用门窗等文字来表达模型中的决策变量。

LINDO输入式的第5行指出模型的目标是使目标函数 $3x_1 + 5x_2$ 最大化。利润(Profit)一词后面用一个括号表明是一种选择,代表最大化的量在解的报告中称为利润。

第7行的注释指出下列约束为所用生产时间。其下面三行对每个约束条件开头处给出一个名称,紧跟的一个括号表明这个名称是可选择的。这些约束除不等式符号外用通常方式书写。因为大多数键盘不包括 \leq 和 \geq 号,LINDO以 $<$ 或 $<=$ 作为 \leq ,以 $>$ 或 $>=$ 作为 \geq (在有 \leq 和 \geq 的键盘,LINDO不识别这些符号)。

约束条件的结尾处使用END。变量的非负约束不需列出,因为LINDO自动假定所有变量 ≥ 0 。假如 x_1 不存在非负约束,则在END下面一行打印FREE X1。

为了用LINGO/LINDO求解模型,先单击LINGO窗口顶端红色牛眼(Bull's Eye)状的求解按钮。图A4.1给出了“解报告”的结果。其顶端一行指出已找到全局最优解,经两次迭代,其目标函数值为36,接下来是最优解中 x_1 和 x_2 的值。

```
Global optimal solution found.
Objective value:                36.00000
Total solver iterations:                2

   Variable      Value      Reduced Cost
   X1            2.000000      0.000000
   X2            6.000000      0.000000

   Row      Slack or Surplus      Dual Price
PROFIT          36.00000          1.000000
PLANT1          2.000000          0.000000
PLANT2          0.000000          1.500000
PLANT3          0.000000          1.000000
```

图 A4.1 用 LINDO 语句提供的 Wyndor Glass 公司问题的解报告

变量值右端的列给出了**缩减成本**(reduced cost),本章中我们并未讨论它,因为这个信息也可以从目标函数系数允许变化的范围中收集到。这个允许变化的范围可以从图 A4.2中得到。当变量在最优解中是基变量时(例如在 Wyndor Glass 公司问题中的变量 x_1 和 x_2),其缩减成本自然为 0。当一个变量为非基变量时,缩减成本提供了一些有趣的信息。在最大化模型中,一个变量的系数“太小”或在最小化模型中“太大”时,在最优解中其值将为 0。缩减成本表明这个系数需要增大多少(求最大化时)或减小多少(求最小化时),最优解才会发生变化,这个变量才会变成基变量。但是回忆一下,与这个信息相同的信息已经从目标函数系数允许变化的范围中得到。非基变量的这个缩减成本恰好是在允许范围内现有值的可以增加量(求最大化时)或可以减小量(求最小化时)。

Ranges in which the basis is unchanged:			
Variable	Objective Coefficient	Ranges	
	Current	Allowable Increase	Allowable Decrease
X1	3.000000	4.500000	3.000000
X2	5.000000	INFINITY	3.000000
ROW	Righthand Side	Side Ranges	
	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
PLANT 1	4.000000	INFINITY	2.000000
PLANT 2	12.000000	6.000000	6.000000
PLANT 3	18.000000	6.000000	6.000000

图 A4.2 对 Wyndor Glass 公司的问题,LINDO 给出的范围报告

图 A4.1 的下端部分提供了三个约束条件的信息。其松弛或剩余列给出了每个约束两端的差值,其对偶价格列给出了 4.7 节中用另一名词讲述的**影子价格**(shadow price)。6.1 节中表明影子价格恰好是第 6 章导入的对偶变量的最优值。需要注意,LINDO 采用了与本书各处习惯采用的不同的符号(见 4.7 节中有关影子价格定义脚注)特别对最小化问题,LINGO/LINDO 影子价格是我们得到数字的负值。

在 LINDO 提供解的报告后,你有一个要不要进行变化范围(灵敏度)分析的选择。图 A4.2 显示了这个分析报告,这只需你点击 LINDGO|Range。

除了目标函数中用千美元代替美元外,前面图 4.10 中用 Excel Solver 产生的灵敏度分析报告的后三列的单位也是千美元。如 4.7 节讨论的,灵敏度报告的头两行数字中,表明目标函数中每个系数的允许变化范围(假定模型中其他数字不变时)为:

$$0 \leq c_1 \leq 7.5$$

$$2 \leq c_2$$

类似的,后三行表明每个右端项(假定模型中其他数字不变)的允许变化范围为:

$$2 \leq b_1$$

$$6 \leq b_2 \leq 18$$

$$12 \leq b_3 \leq 24$$

你可以点击 Files|Print 以标准的视窗形式打印这些结果。

上述为启动 LINGO/LINDO 的基础。你可以打开或关闭产生报告部分。假如一个自动产生标准解的报告已被关闭(简单的模式),你可以通过点击 LINGO|Options|Interface|Output level|Verbose|Apply 返回。产生灵敏度报告的能力可以通过点击 LINGO|Options|General solver|Dual computation|Price & Ranges|Apply 打开或关闭。

支持 LINGO 的第二种输入形式为 LINGO 语句结构。LINGO 语句结构较之 LINDO 语句结构要强大得多。应用 LINGO 语句结构的优越性为:(a)允许任意的数学表达式,包括括号和所有熟悉的数学运算,如乘、除、求对数等;(b)不仅能求解线性规划问题,而且能求解非线性规划问题;(c)具有可大量应用具下标的变量和集合的能力;(d)能从数据表格或数据库读入数据并将其送回原处;(e)能自然表达具有稀疏关系的能力;(f)程序化能力,所以当进行参数分析时可以自动求解一系列模型。Wyndor 问题用 LINGO 并应用 subscript/sets 表达的式子为:

```
!Wyndor Glass Co. Problem;
SETS:
  PRODUCT: PPB, X;                ! Each product has a profit/batch
and amount;
  RESOURCE: HOURSAVAILABLE;       ! Each resource has a capacity;
! Each resource product combination has an hours/batch;
  RXP(RESOURCE, PRODUCT): HPB;
ENDSETS
DATA:
  PRODUCT = DOORS  WINDOWS;       ! The products;
  PPB = 3 5;                       ! Profit per batch;
  RESOURCE = PLANT1  PLANT2  PLANT3;
  HOURSAVAILABLE = 4 12 18;

  HPB = 1 0 ! Hours per batch;
        0 2
        3 2;
ENDDATA
! Sum over all products j the profit per batch times batches produced;
MAX = @SUM( PRODUCT(j): PPB(j) * X(j));

@FOR(RESOURCE(i)): ! For each resource i...;
  ! Sum over all products j of hours per batch time batches produced...;
  @SUM(RXP(i,j): HPB(i,j) * X(j)) <= HOURSAVAILABLE(i);
);
```

初始的 Wyndor 问题有两个产品和三项资源,假如扩展为有三个产品和四项资源,这是一个一般的变化,只要将相应的新数据插入 Data 集合,模型的式子将自动调整。这个 subscript/sets 的能力同样允许自然表达三维的或更高阶的模型。3.6 节中描述的大型模型有五个准度:厂房、机器、产品、地区/客户和时期。这难以用二维的数据表格表示,但容易表达为具有 sets 和 subscript 的建模语言。实际上,类似 3.6 节中多达 $10(10)(10)(10)(10)=100\,000$ 个可能的关系组合并不存在,即并非所有工厂可以生产所有产品,并非所有客户需要所有产品。这个建模语言中 subscript/sets 的能力使其易于

表达这类稀疏的关系。

对你进入的多数模型, LINGO 能自动识别应该使用 LINDO 语句结构还是 LINGO 语句结构。你可以通过单击 LINGO|Options|Interface|File format|lng(对 LINGO)或 ltx(对 LINDO)选择你的缺失的语句结构。

LINGO 包含一个广泛在线支持(Help)菜单, 给出更多例子和更多详细的解释。第 3 章补充 1 和 2(见本书网站)也提供了一些补充的详细材料。LINGO/LINDO 文件夹在不同章的网页表明它在多数章例子的建模。

参考文献

1. Bixby, R. E.: "Solving Real-World Linear Programs: A Decade and More of Progress," *Operations Research*, 50(1): 3–15, January–February 2002.
2. Dantzig, G. B., and M. N. Thapa: *Linear Programming 1: Introduction*, Springer, New York, 1997.
3. Fourer, R.: "Software Survey: Linear Programming," *OR/MS Today*, June 2007, pp. 42–51.
4. Luenberger, D., and Y. Ye: *Linear and Nonlinear Programming*, 3rd ed., Springer, New York, 2008.
5. Maros, I.: *Computational Techniques of the Simplex Method*, Kluwer Academic Publishers (now Springer), Boston, MA, 2003.
6. Schrage, L.: *Optimization Modeling with LINGO*, LINDO Systems, Chicago, 2008.
7. Tretkoff, C., and I. Lustig: "New Age of Optimization Applications," *OR/MS Today*, December 2006, pp. 46–49.
8. Vanderbei, R. J.: *Linear Programming: Foundations and Extensions*, 3rd ed., Springer, New York, 2008.

习题

一些习题(或其部分)左边的符号标志有如下含义。

D: 上面列出的演示的例子可能会有帮助。

I: 建议你用上面列出的相应的交互式过程(打印出你的工作记录)。

C: 用任一可选软件(或是老师指定的)进行计算机求解(见本书 4.8 节所介绍的或本书网站列出的选择项)。

习题上有一个星号表示书后至少给出该题一部分答案。

4.1-1 考虑以下问题:

$$\max Z = x_1 + 2x_2$$

$$\text{s. t. } x_1 \leq 5$$

$$x_2 \leq 6$$

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

$$\text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

(a) 画出可行域并圈出所有 CPF 解;

(b) 对每个 CPF 解, 确定它所满足的一组约束边界方程;

(c) 对每个 CPF 解, 利用这组约束边界方程式以代数方法求解角点上的 x_1 和 x_2 的值;

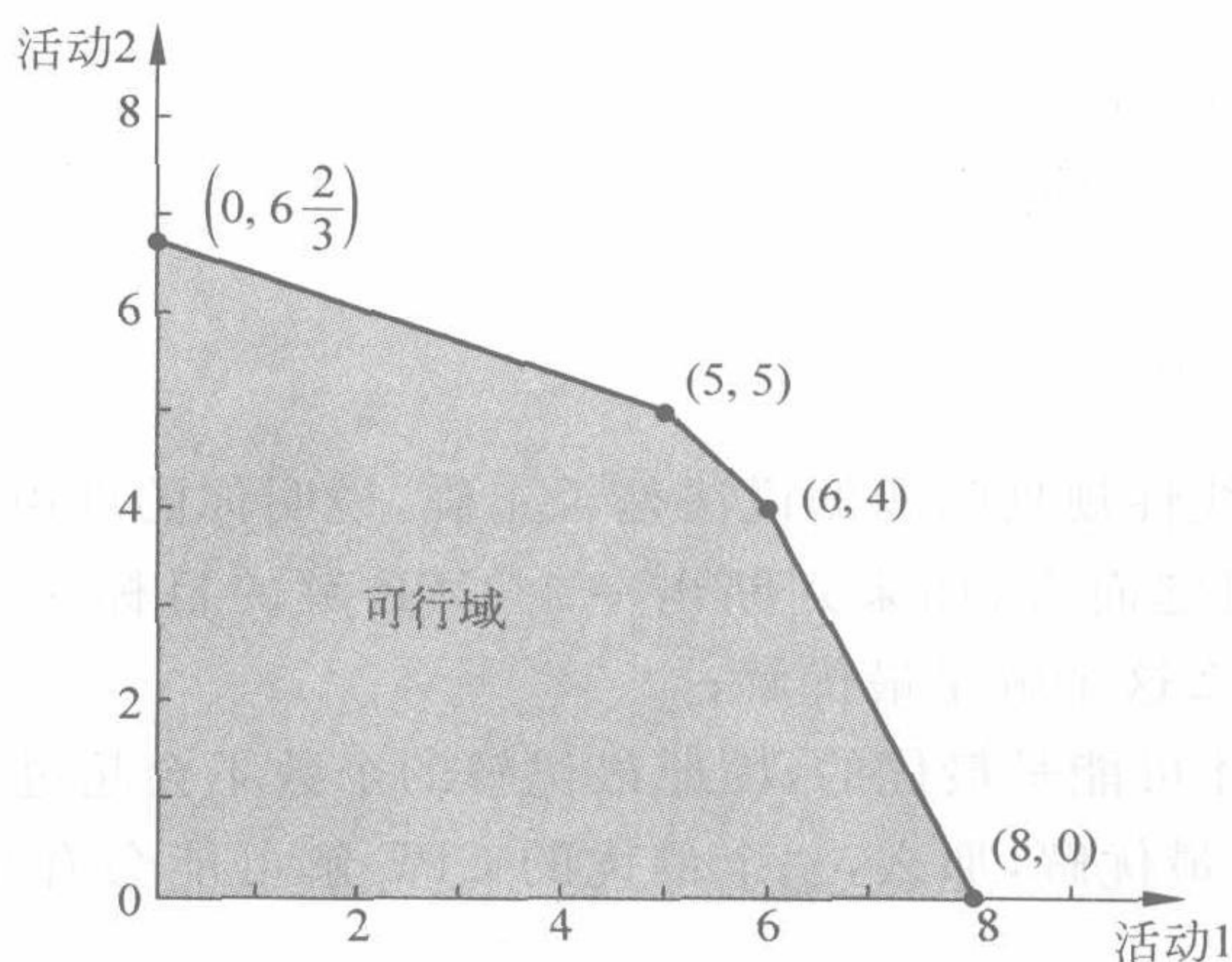
- (d) 对每个 CPF 解, 确定它的相邻 CPF 解;
 (e) 对每组相邻的 CPF 解, 确定它们共有的一条约束边界并给出方程。

4.1-2 考虑以下问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- D, I(a) 运用图解法求解该问题, 在图形上圈出所有角点;
 (b) 对每个 CPF 解, 确定它所满足的一组约束边界方程;
 (c) 对每个 CPF 解, 确定它的相邻 CPF 解;
 (d) 对每个 CPF 解求解 Z , 运用这个信息确定最优解;
 (e) 用图示方式一步一步描述单纯形法的求解过程。

4.1-3 某一个包括两项活动的线性规划模型的可行域如下:



目标是使这两项活动总利润最大, 活动 1 的单位利润是 1 000 美元, 活动 2 的单位利润是 2 000 美元。

- (a) 计算每个 CPF 解的总利润, 利用这个信息寻找最优解;
 (b) 利用 4.1 节中给出的单纯形法解原理确定 CPF 解系列, 该系列即为单纯形法寻优而进行检验的系列。

4.1-4* 考虑习题 3.2-3 中构建的线性规划模型(书后给出的);

- (a) 利用图形分析找出该模型的所有角点解, 对每一个都标出是可行的还是不可行的;
 (b) 对每一个 CPF 解计算目标函数值, 利用该信息确定最优解;
 (c) 利用 4.1 节中给出的解原理来确定哪一个系列 CPF 解符合寻找最优解的单纯形法检验过程(提示: 这个特定的模型有两个可选的过程)。

4.1-5 对以下习题重复 4.1-4 的要求;

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

4.1-6 在图形上描述单纯形法求解下述问题的每一步:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad & -3x_1 + x_2 \leq 1 \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ & 4x_1 - x_2 \leq 10 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

4.1-7 在图形上描述单纯形法求解这题的每一步骤:

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = 5x_1 + 7x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 \geq 147 \\ & 3x_1 + 4x_2 \geq 210 \\ & x_1 + x_2 \geq 63 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

4.1-8 判断下列关于线性规划问题的说法是否正确,说明你的理由:

- (a) 对于最小化问题而言,如果判断出一个 CPF 解的目标函数的值不比各相邻的 CPF 解大,那么这个解是最优解;
- (b) 只有 CPF 解才可能是最优的,因此最优解的个数不会超过 CPF 解的个数;
- (c) 如果存在多个最优解,那么,一个最优的 CPF 解可能会有相邻的 CPF 解也为最优(Z 值相同)。

4.1-9 下面每一个陈述对 4.1 节中给出的 6 个解原理都是不准确的,试指出每个陈述中的错误:

- (a) 最好的 CPF 解总是最优解;
- (b) 单纯形法的迭代检验当前 CPF 解是否最优,如果不是,移至一个新的 CPF 解;
- (c) 尽管任意 CPF 解都可被选作初始 CPF 解,但单纯形法总是选择原点;
- (d) 当单纯形法准备从当前 CPF 解移动,寻找新的 CPF 解时,它仅考虑相邻的 CPF 解,因为其中一个可能是最优解;
- (e) 从当前 CPF 解移动,寻找新的 CPF 解时,单纯形法找出所有相邻 CPF 解,确定哪个会使目标函数值有最大的增长率。

4.2-1 重新考虑习题 4.1-4:

- (a) 引入松弛变量,写出约束条件的扩展形式;
- (b) 对每个 CPF 解,通过计算松弛变量的值确定对应的 BF 解,对每个 BF 解,用变量

的值确定非基变量和基变量；

(c) 对每个 BF 解,证明当非基变量设为 0 后,这个 BF 解也是(a)中所得方程组的联立解(通过代入解方法)。

4.2-2 重新考虑 4.1-5 中的模型。按照 4.2-1(a)、(b)、(c)的说明。

(d) 对角点非可行解和相应的基本非可行解重复(b)；

(e) 对相应的基本非可行解重复(c)。

4.3-1 阅读 4.3 节应用短文中提到的参考文献中全面描述的运筹学研究。简要阐述单纯形法在该项研究中的应用,并列出该研究带来的所有财务与非财务收益。

D,I **4.3-2** 用单纯形法(代数形式)一步一步求解题 4.1-4 的模型。

4.3-3 重新考虑题 4.1-5 的模型：

(a) 用单纯形法(代数形式)手工求解模型；

D,I(b) 在运筹学课件中用相应的交互式方法重复(a)；

C(c) 用基于单纯形法的软件包验证你所得的最优解。

D,I **4.3-4*** 用单纯形法(代数形式)一步一步求解下述问题：

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \\ \text{s. t.} \quad & 3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 40 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

D,I **4.3-5** 用单纯形法(代数形式)一步一步求解本题：

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ \text{s. t.} \quad & 3x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 150 \\ & x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 120 \\ & 2x_1 + 2x_3 \leq 105 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

4.3-6 考虑以下问题：

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 20 \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

已知最优解中非零变量为 x_2 和 x_3 。

(a) 不进行实际的迭代,描述你如何能使用该信息改造单纯形法,以便以尽可能少的迭代次数求解(从通常的 BF 解)该问题。

(b) 用(a)中开发的程序手工求解该问题(不要使用运筹学课程软件)。

4.3-7 考虑以下问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 24 \\ & 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 60 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

已知最优解中 $x_1 > 0, x_2 = 0, x_3 > 0$ 。

- (a) 不进行实际的迭代,描述你如何能使用该信息改造单纯形法,以便以尽可能少的迭代次数求解(从通常的 BF 解)该问题;
 (b) 用(a)中讲述的程序手工求解问题(不要使用运筹学课程软件)。

4.3-8 判断下列说法正确与否,然后参考本章中的具体表述验证你的答案。

- (a) 使用单纯形法选择入基变量的准则,是因为它总是指向最好的相邻 BF 解(Z 最大);
 (b) 使用单纯形法选择出基变量的最小比率准则,因为用大的比率做另一种选择可能会带来不可行的基本解;
 (c) 单纯形法在求解下一个 BF 解时,利用初等代数变换运算从某个方程(它所在的方程)之外的其他方程中消去每个非基变量,并在这个方程中赋予它一个系数+1。

D,I 4.4-1 用单纯形法的表格形式重复习题 4.3-2。

D,I,C 4.4-2 用单纯形法的表格形式重复习题 4.3-3。

4.4-3 考虑如下问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 40 \\ & 4x_1 + x_2 \leq 100 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- (a) 用手工绘图法图解模型,确定所有的 CPF 解;
 D,I(b) 利用 IOR Tutorial 图解该模型;
 D(c) 以单纯形法的代数形式手工计算求解该问题;
 D,I(d) 利用 IOR Tutorial 以单纯形法的代数形式计算求解该问题;
 D(e) 用单纯形法的表格形式手工计算求解问题;
 D,I(f) 利用 IOR Tutorial 以单纯形法的表格形式计算求解该问题;
 C(g) 用单纯形法的软件包求解问题。

4.4-4 对以下问题重复习题 4.4-3 的要求。

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 30 \\ & x_1 + x_2 \leq 20 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

4.4-5 考虑以下问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 12 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

D, I (a) 用单纯形法的代数形式一步步求解;

D, I (b) 用单纯形法的表格形式一步步求解;

C(c) 用基于单纯形法的软件包求解该问题。

4.4-6 考虑以下问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

D, I (a) 用单纯形法的代数形式一步步求解;

D, I (b) 用单纯形法的表格形式一步步求解;

C(c) 用基于单纯形法的软件包求解该问题。

D, I 4.4-7 用单纯形法表格形式一步步求解下述问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 2x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{s. t.} \quad & 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 1 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \leq 2 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

D, I 4.4-8 用单纯形法一步步求解下述问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = -x_1 + x_2 + 2x_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 20 \\ & -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 60 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 50 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

4.5-1 思考下述线性规划与单纯形法的有关描述,判断每一个表述是否正确,说明你的理由。

(a) 在单纯形法的某次具体迭代中,如果选择出基变量时出现相持,那么下一个 BF 解中至少有一个基变量值必为 0;

(b) 某次迭代无出基变量,这个问题无可行解;

(c) 如果最终表格的 0 行中至少有一个基变量有零系数,那么问题有多个最优解;

(d) 如果问题有多个最优解,那么该问题必有一个外界可行域。

4.5-2 假如下述表达式是某线性规划模型的约束条件,其具有变量 x_1, x_2 :

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$-3x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

(a) 图解说明其可行域无界。

(b) 假如目标函数是 $\max Z = -x_1 + x_2$,那么该模型有最优解吗?若有,求出最优解;若没有,说明原因。

(c) 假如目标函数是 $\max Z = x_1 - x_2$,重复(b)。

(d) 对无最优解的模型的目标函数而言,这意味着不存在针对模型的好解吗?试解释。建模时什么地方可能出错了呢?

D, I(e) 选择一个无最优解的模型的目标函数。利用单纯形法求解证明 Z 无界。

C(f) 对(e)中选择的目标函数,用单纯形法软件包证明 Z 无界。

4.5-3 同 4.5-2 的要求一样,但其约束条件如下:

$$2x_1 - x_2 \leq 20$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 20$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

D, I 4.5-4 考虑以下问题:

$$\max Z = 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4$$

$$\text{s. t. } x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 20$$

$$-4x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 \leq 40$$

$$2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 50$$

$$\text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

用单纯形法一步步求解以证明 Z 无界。

4.5-5 可行域有界的任何一个线性规划问题的基本性质是每个可行解都被表示为 CPF 解的凸集(可能还不止一种方法)。类似的,对问题的扩展形式而言,每个可行解都被表示为 BF 解的凸集。

(a) 证明任一组可行解的任何一个凸组合必定是可行解(因此 CPF 解的任意凸组合也是可行的);

(b) 引用(a)的结论证明 BF 解的任意凸组合是可行解。

4.5-6 运用 4.5-5 给出的事实,证明当任意线性规划问题可行域有界,并有多多个最优解时,以下结论正确:

(a) 最优 BF 解得每一个凸组合必定最优;

(b) 没有其他可行解可能是最优了。

4.5-7 考虑一个双变量线性规划问题,其 CPF 解是 $(0,0)$ 、 $(6,0)$ 、 $(6,3)$ 、 $(3,3)$ 和 $(0,2)$ (见题 3.2-2 的可行域的图):

- (a) 利用该可行域的图找出模型的所有约束条件;
 (b) 对每对相邻的 CPF 解,给出一个示例目标函数,使这个角点间的线段上的所有点都是最优解;
 (c) 假设目标函数 $Z = -x_1 + 2x_2$,利用图解法求出所有最优解;
 D,I(d) 对于(c)中的目标函数,用单纯形法逐步找出所有最优解,然后用一个代数表达式表示所有的最优解。

D,I 4.5-8 考虑如下问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 50x_1 + 25x_2 + 20x_3 + 40x_4 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 30 \\ & x_3 + 2x_4 \leq 20 \\ & \text{且 } x_j \geq 0 \quad (j=1,2,3,4) \end{aligned}$$

运用单纯形法一步步求解以找出所有最优 BF 解。

4.6-1* 考虑下述问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1 + x_2 = 3 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

D,I(a) 用图解法求解这个问题;

(b) 运用大 M 法,构建完整的初始单纯形表,确定相应的初始(人工)BF 解,同时确定初始入基变量和出基变量;

I(c) 从(b)开始继续单纯形法计算,一步步求解。

4.6-2 考虑如下问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 300 \\ & 8x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 300 \\ & \text{且 } x_j \geq 0 \quad (j=1,2,3,4) \end{aligned}$$

(a) 运用大 M 法,构建单纯形法完整的初始单纯形表,确定相应的初始(人工)BF 解,同时确定初始入基变量和出基变量;

I(b) 运用单纯形法一步步求解;

(c) 运用两阶段法,构建第一阶段完整的初始单纯形表,确定相应的初始(人工)BF 解时,同时确定初始入基变量和出基变量;

I(d) 逐步进行第一阶段的运算;

(e) 构建第二阶段完整的初始单纯形表;

I(f) 逐步进行第二阶段的运算;

(g) 比较(b)、(d)和(f)中得到的 BF 解系列,哪个解仅对引入人工变量的人工问题可行,哪个对原始问题也可行?

C(h) 运用单纯形法软件包求解。

4.6-3* 考虑如下问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(a) 改造该问题以使其符合 3.2 节中所述的线性规划标准形式;

I(b) 运用大 M 法一步步求解;

I(c) 运用两阶段法一步步求解;

(d) 比较(b)和(c)中得到的 BF 解系列,哪个解仅对引入人工变量的人工问题可行,哪个对原始问题也可行?

C(e) 运用单纯形法软件包求解。

4.6-4 对大 M 法,解释为什么所有人工变量为非基时,单纯形法也绝不会选择人工变量作为入基变量。

4.6-5 考虑如下问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 5x_1 + 4x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & 2x_1 - x_2 \geq 6 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(a) 用图解证明该问题无可行解;

C(b) 使用计算机软件证明问题无可行解;

I(c) 运用大 M 法,逐步进行单纯形法计算,证明问题无可行解;

I(d) 利用两阶段法的第一阶段计算,重复(c)。

4.6-6 对下述问题按照 4.5-6 的指示进行:

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = 5\,000x_1 + 7\,000x_2 \\ \text{s. t.} \quad & -2x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 - 2x_2 \geq 1 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

4.6-7 考虑以下问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 20 \\ & 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 50 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- (a) 运用大 M 法, 构建完整的初始单纯形表, 确定相应的初始(人工)BF 解, 同时确定初始入基变量和出基变量;
 I(b) 运用单纯形法一步步求解;
 I(c) 运用两阶段法, 构建第一阶段完整的初始单纯形表, 确定相应的初始(人工)BF 解时, 同时确定初始入基变量和出基变量;
 I(d) 逐步进行第一阶段的运算;
 (e) 构建第二阶段完整的初始单纯形表;
 I(f) 逐步进行第二阶段的运算;
 (g) 比较(b)、(d)和(f)中得到的 BF 解系列, 哪个解仅对引入人工变量的人工问题可行, 哪个对原始问题也可行?
 C(h) 运用单纯形法软件包求解。

4.6-8 考虑以下问题

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{s. t.} \quad & 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 420 \\ & 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 280 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- I(a) 运用两阶段法, 一步一步进行第一阶段求解;
 C(b) 运用单纯形法软件包建模与求解第一阶段问题;
 I(c) 一步一步进行第二阶段解决原始问题;
 C(d) 用计算机编码解决初始问题。

4.6-9* 考虑如下问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 60 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 120 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- I(a) 运用大 M 法一步步求解;
 I(b) 运用两阶段法一步步求解;
 (c) 比较(a)和(b)中得到的 BF 解系列, 哪个解仅对引入人工变量的人工问题可行, 哪个对原始问题实际上也可行?
 C(d) 利用单纯形法软件包求解。

4.6-10 按照 4.6-9 的说明解本题:

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 + x_2 = 10 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 10 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

4.6-11 判断下列说法正确与否:

- (a) 当线性规划模型有等式约束时,为了使单纯形法能有一个明显的初始基本解而对这个约束引入人工变量,这个基本解对原模型是可行的;
- (b) 当引入人工变量构建了人工问题并运用大 M 法求解时,如果人工问题最优解中人工变量均为 0,那么原始问题无可行解;
- (c) 实际中常运用两阶段法,因为它得到最优解所需的迭代次数比大 M 法少。

4.6-12 考虑以下问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 \\ \text{s. t.} \quad & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 9 \\ & -2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 12 \\ & \text{且 } x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(x_1 无非负约束)。

- (a) 重新构建问题,使所有变量都有非负约束;
D,I (b) 运用单纯形法一步步求解;
C(c) 运用单纯形法软件包求解。

4.6-13* 考虑以下问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = -x_1 + 4x_2 \\ \text{s. t.} \quad & -3x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_2 \geq -3 \end{aligned}$$

(x_1 无下界约束)。

- D,I (a) 图解该问题;
(b) 重新构建问题,使它只有两个约束条件,且所有变量有非负约束;
D,I (c) 用单纯形法一步步求解。

4.6-14 考虑以下问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = -x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{s. t.} \quad & 3x_2 + x_3 \leq 120 \\ & x_1 - x_2 - 4x_3 \leq 80 \\ & -3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 100 \end{aligned}$$

(无非负约束)。

- (a) 重新构建问题,使所有变量都有非负约束;
D,I (b) 用单纯形法一步步求解;
C(c) 用单纯形法软件包求解。

4.6-15 本章介绍了用于求解目标函数被最大化的线性规划问题的单纯形法,4.6节还讲述了如何把最小化问题转化为等价的最大化问题,以便能应用单纯形法。最小化问题的另一种选择是对单纯形法的规则做一些修改,从而可以直接运用该算法。

- (a) 描述这些修改应该是什么样的。
 (b) 用大 M 法,应用(a)中修改的单纯形法直接用于求解下题(不要使用运筹学课程软件):

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 \\ \text{s. t.} \quad & 3x_2 + 4x_3 \geq 70 \\ & 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \geq 70 \\ \text{且} \quad & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

4.6-16 考虑以下问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = -2x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 4 \\ & x_1 - x_3 + x_4 \geq -1 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ \text{且} \quad & x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

(x_1 无非负约束)。

- (a) 重新构建问题,使之满足 3.2 节列出的标准形式;
 (b) 运用大 M 法,构建单纯形法完整的初始单纯形表,确定相应的初始(人工)BF 解时,同时确定初始入基变量和出基变量;
 (c) 构建两阶段法的第一阶段中初始单纯形法的 0 行;
 (d) 使用单纯形法软件包求解。

I 4.6-17 考虑下列问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 20 \\ & 15x_1 + 6x_2 - 5x_3 \leq 50 \\ & x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 30 \\ \text{且} \quad & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

按步骤运用单纯形法证明这个问题无可行解。

- 4.7-1 参照图 4.10 和 3.1 节给出的 Wyndor Glass 公司问题的各个右端项的允许变化范围,运用图解分析证明每个给出的允许变化范围都是正确的。
 4.7-2 重新考虑 4.1-5 的模型,把每个约束的右端项视作各个资源的可得数量。
 I(a) 运用图 4.8 所示的图形分析求得各种资源的影子价格。
 I(b) 运用图解分析进行灵敏度分析。尤其是通过图示寻求最优解的方法检验模型的每个参数是否是敏感参数(在不改变最优解时其值不能改变)。
 I(c) 用如图 4.9 所示的图解分析确定当前最优解不变时每个 c_j 值(目标函数中 x_j 的系数)的允许变化范围。
 I(d) 仅改变一个 b_i 值(约束条件的右端项)就会改变相应的约束边界。如果当前最优 CPF 解在这条约束边界上,这个 CPF 解也会改变。运用图解分析求出当这

个 CPF 解仍可行时 b_i 的允许变化范围。

C(e) 通过单纯形法软件包求解问题来证实(a)、(c)和(d)的答案,并生成灵敏度分析的信息。

4.7-3 已知以下线性规划问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 3x_1 \leq 60 \quad (\text{资源 1}) \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 75 \quad (\text{资源 2}) \\ & 2x_2 \leq 40 \quad (\text{资源 3}) \end{aligned}$$

$$\text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

D, I(a) 用图解法求解;

(b) 运用图解分析找出资源的影子价格;

(c) 当 Z 的最优值增加 15 时,资源 1 需要再增加多少单位?

4.7-4 考虑下述问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = x_1 - 7x_2 + 3x_3 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4 \quad (\text{资源 1}) \\ & 4x_1 - 3x_2 \leq 2 \quad (\text{资源 2}) \\ & -3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3 \quad (\text{资源 3}) \end{aligned}$$

$$\text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

D, I(a) 运用单纯形法一步一步求解。

(b) 确定这三种资源的影子价格,说明其意义。

C(c) 用单纯形法软件包解题,并生成灵敏度分析的信息。利用该信息得出每种资源的影子价格、每个目标函数系数的允许变化范围,以及右端项的允许变化范围。

4.7-5* 考虑本题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \quad (\text{资源 1}) \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 2 \quad (\text{资源 2}) \\ & x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 12 \quad (\text{资源 3}) \end{aligned}$$

$$\text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

D, I(a) 运用单纯形法一步一步求解。

(b) 确定这两种资源的影子价格,说明其意义。

C(c) 使用单纯形法软件包求解本题,并生成灵敏度分析的信息。利用这个信息得出每种资源的影子价格、每个目标函数系数和右端项的允许变化范围。

4.7-6 考虑如下问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 5x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 \\ \text{s. t.} \quad & 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \leq 24 \quad (\text{资源 1}) \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 36 \quad (\text{资源 2}) \end{aligned}$$

且 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

D. I(a) 用单纯形法逐步求解该问题。

(b) 确定两种资源的影子价格,并描述其含义。

C(c) 用一个基于单纯形法的软件包求解上述问题,并生成进行灵敏度分析的信息。

利用得到的信息确定每种资源的影子价格,以及保持最优解和最优基不变时的目标函数中系数的变化范围和每个约束右端项的变化范围。

4.9-1 运用 IOR Tutorial 中的内点算法求解题 4.1-4 的模型。选择菜单 $\alpha = 0.5$, $(x_1, x_2) = (0.1, 0.4)$ 为初始试验解,进行 15 次迭代,画出可行域的图形,以及可行域中的试验解的轨迹。

4.9-2 对题 4.1-5 按 4.9-1 中要求的运算。



案例 纺织面料与秋季时装

从办公楼的 10 层楼上, Katherine Rally 注视着成群的纽约人穿梭在挤满了黄色出租车的街道和杂乱摆放着热狗摊的人行道上。在这个酷热的 7 月的一天,她注意看着许多女人的时装,猜测着她们在秋季时会选择穿什么。她并不是在随意思考,这些思考对她的工作至关重要。因为她拥有和管理着 TrendLines 公司——一个精品女式服装企业。

今天是一个特别重要的日子,因为她必须与生产经理 Ted Lawson 见面,要为秋装系列制订下个月的生产计划。具体地说,她必须根据每个车间的生产能力、有限的资源和预计的需求来决定每种服装的产量。准确的下月生产计划对于秋季的销售来说至关重要,因为下月生产的服装 9 月份会出现在商店中,女人一般会在 9 月大量购买最先上市的秋装。

她转身回到玻璃办公桌前,看着上面堆放的文件。她的目光徘徊在大约 6 个月前就设计出的时装类型、每种类型的材料需求以及在时装表演上通过顾客调查得出的对各款服装需求预测的表单上。她回想起那些繁忙得有些头疼的日子,那时忙于秋装的设计并把它们展示在纽约、米兰和巴黎的时装表演上。最终,她为秋装系列作品付给她的拥有 6 个设计师的设计小组总共 860 000 美元。加上雇用模特、发型师、化妆师,缝制和修改服装、制作布景、时装表演设计和排练、租用会议厅等,三场表演的每一场都另外花费了 2 700 000 美元。

秋季正装包括:

服装种类	材料消耗	价格/美元	人工与机器成本/美元
羊毛宽松裤	3 码羊毛; 2 码衬里用醋酸纤维	300	160
开司米衫	1.5 码开司米	450	150
丝绸衬衫	1.5 码丝绸	180	100
丝绸背心	0.5 码丝绸	120	60
女士裙	2 码人造纤维; 1.5 码衬里用醋酸纤维	270	120
羊毛运动上衣	2.5 码羊毛; 1.5 码衬里用醋酸纤维	320	140

秋季休闲装包括：

服装种类	材料消耗	价格/美元	人工与机器成本/美元
天鹅绒裤	3 码天鹅绒；2 码衬里用醋酸纤维	350	175
棉套头衫	1.5 码棉布	130	60
棉迷你裙	0.5 码棉布	75	40
天鹅绒上衣	1.5 码天鹅绒	200	160
纽扣式衬衫	1.5 码人造纤维	120	90

她研究了时装类型和材料需求情况。她的秋装系列中包括正装和休闲装。她根据服装材料质量和成本、人工和机器成本、该品种需求和 TrendLines 品牌声望，为每种服装确定售价。

她已为下月生产订购了 45 000 码羊毛、28 000 码醋酸纤维、9 000 码开司米、18 000 码丝绸、30 000 码人造纤维、20 000 码天鹅绒和 30 000 码棉布。材料价格如下：

材料	羊毛	醋酸纤维	开司米	丝绸	人造纤维	天鹅绒	棉布
每码价格/美元	9.00	1.50	60.00	13.00	2.25	12.00	2.50

生产中未使用的原材料可退回织物批发商，全价返还涉及的材料款项，但零碎的材料布片不能再退回批发商。

丝绸衬衫和棉套衫会有小块余料。具体来说，生产一件丝绸衬衫或一件棉套衫分别需要 2 码丝绸和棉布，用去 1.5 码，剩下的 0.5 码成了余料。她不想浪费余料，就想用每种长方形余料分别生产一件丝绸背心或一条棉布迷你裙。因此，在生产一件丝绸衬衫的同时会生产出一件丝绸背心。同样，生产一件棉套衫的同时生产出一条棉布迷你裙。注意，也可以单独生产丝绸背心和棉布迷你裙。

需求预测表明，有些品种服装需求量有限。具体来说，因为天鹅绒裤子和上衣是短期流行风尚，TrendLines 预测只能卖出 5 500 条裤子和 6 000 件上衣。TrendLines 不想超过预测需求量组织生产，因为一旦裤子和上衣过时了，就很难卖出。然而，TrendLines 可以按低于预测需求量组织生产，因为公司不需要去满足需求。开司米衫需求量也有限，因为它相当贵，TrendLines 预计最多只能卖出 4 000 件开司米衫。丝绸衬衫和背心需求也有限，因为大多数女人认为丝绸很难打理，TrendLines 预计最多可卖 12 000 件丝绸衬衫和 15 000 件背心。

需求预测还指出羊毛宽松裤、女士裙和羊毛运动上衣需求很大，因为它们是各种职业装的基本款。具体地说，羊毛宽松裤子需求为 7 000 条、羊毛运动上衣需求为 5 000 件。Katherine 希望满足这两种服装至少 60% 的需求来保持她的忠诚顾客群以及将来不丢失这块生意。尽管女士裙需求无法估计，但 Katherine 认为至少应生产 2 800 条。

(a) Ted 正试图说服 Katherine 停止生产天鹅绒上衣。因为这种时装的需求相当小。他认为光这种时装就占了固定设计和其他费用共 500 000 美元。这种时装的净贡献(服装售价—材料成本—人工成本)能够弥补固定成本。每件天鹅绒上衣净贡献 22 美元，他认为这种净贡献，即使满足最大需求也不会产生利润。你怎样看待他的观点？

(b) 在给定产量、资源和需求限制下,建立利润最大化的线性规划模型并求解。

在做出最后决策前,Katherine 打算独自研究一下如下问题:

(c) 批发商通知 Katherine 天鹅绒不能退回,因为预计需求表明今后天鹅绒的需求会下降。因此,Katherine 无法得到天鹅绒的返还款。这个因素会如何改变生产计划?

(d) (b)和(c)的解有差异,其直观的经济解释是什么?

(e) 缝制工人在缝制衣袖和把它们连接到运动上衣时遇到了困难,因为运动上衣的形状有些怪异,而粗重的羊毛材料很难切割和缝制。为缝制羊毛运动上衣而增加的人工时间使每件运动上衣的人工和设备成本增加 80 美元。在此新成本情况下,各种时装应分别生产多少件才能使利润最大化?

(f) 批发商告知 Katherine 另一顾客取消了订单,她可得到额外的 10 000 码醋酸纤维,那么,各种时装应分别生产多少件才能使利润最大化?

(g) TrendLines 假设它可以在 11 月的一次大型展销会上以原价的 60% 卖出 9 月和 10 月未卖出的各种服装,因此,它可以在那时无限量销售各种服装(前面提到的需求限制涉及的只是 9 月和 10 月的销售)。应如何制订新的生产计划以使利润最大化?

单纯形法理论

第 4 章介绍了单纯形法的基本技术,现在我们将通过探讨单纯形法的一些内在的理论来更深入地研究它的运算法则。5.1 节进一步讨论构成单纯形法基础的几何与代数的基本性质。接下来讨论单纯形法的矩阵形式,它大大简化了计算机的执行过程。接下来我们给出有关单纯形法性质的一个基础的审视,这会使我们能够推出初始单纯形表的变化如何反映到最终单纯形表中。这个审视是第 6 章对偶理论与灵敏度分析学习的关键。本章最后介绍改进单纯形法,该方法将单纯形法的矩阵形式进一步流程化。单纯形法的商业的计算机码通常基于改进的单纯形法。



5.1 单纯形法基础

4.1 节介绍了角点可行解及其在单纯形法中所起的关键作用,在 4.2 节和 4.3 节中我们把这些几何概念与单纯形法的代数联系起来。然而,这些都是在 Wyndor Glass 公司问题的背景下,只有两个决策变量,所以有直观的几何解释。当我们解决更复杂的问题时,这些原理如何才能推广到较高的维数呢?本节我们就来讨论这个问题。

我们从介绍 n 维变量的线性规划问题的一些基本术语开始。在我们做这些介绍时你会发现,参考图 5.1(与图 4.1 相同)在二维空间($n=2$)中解释这些定义很有帮助。

术语

我们已经很清楚任何线性规划问题的最优解一定位于可行域的边界上,事实上这是一项普遍性质。因为边界是一个几何概念,所以我们先用定义阐明可行域的边界怎样用代数来表示。

任何约束的**约束边界方程**(constraint boundary equation)都是通过把“ \leq ”、“ $=$ ”或“ \geq ”转化成“ $=$ ”获得的。

这样,函数约束条件的约束边界方程形式就是 $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$,而非负约束条件的约束边界方程形式是 $x_j = 0$ 。在 n 维空间中,每一个这样的方程定义了一个“平滑”的几何图形,称为**超平面**(hyperplane),类似于二维空间中的直线、三维空间中的

平面。这个超平面用对应的约束形成了**约束边界**(constraint boundary)。当约束符号为“ \geq ”或“ \leq ”时,边界约束条件把所有满足约束条件的点(所有位于一侧的点,包含约束边界)和不满足约束条件的点(所有位于约束边界另一侧的点)区分开。当约束符号为“ $=$ ”时,只有在约束边界上的点满足约束条件。

例如,Wyndor Glass 公司问题有 5 个约束(3 个函数约束和 2 个非负约束),所以它有 5 个边界约束方程,如图 5.1 所示。由于 $n=2$,定义这些约束边界方程的超平面为简单直线。因而,这 5 个约束条件的约束边界为如图 5.1 所示的 5 条直线。

可行域的边界仅包括满足一个或多个约束边界方程的可行解。

在几何上,可行域边界上的任一点都位于一个或多个约束边界方程所定义的超平面上。这样,在图 5.1 中,边界由 5 条粗线组成。

下一步,我们会给出一个 n 维空间中 CPF 解的一般定义。

不位于任何其他两个可行解连接的线段^①上的可行解称作**角点可行解**(CPF)。

如这条定义所述,若有可行解位于其他两个可行解连接的线段上,那么这个可行解就不是 CPF 解。例如 $n=2$,考虑图 5.1,点 $(2,3)$ 不是 CPF 解,因为它位于许多条这样的线段上,如点 $(0,3)$ 和点 $(4,3)$ 连接的线段。类似的, $(0,3)$ 也不是一个 CPF 解,因为它位于点 $(0,0)$ 和点 $(0,6)$ 连接的线段上。但是, $(0,0)$ 是一个 CPF 解,因为不可能找到其他两个可行解位于点 $(0,0)$ 的两端(试试看)。

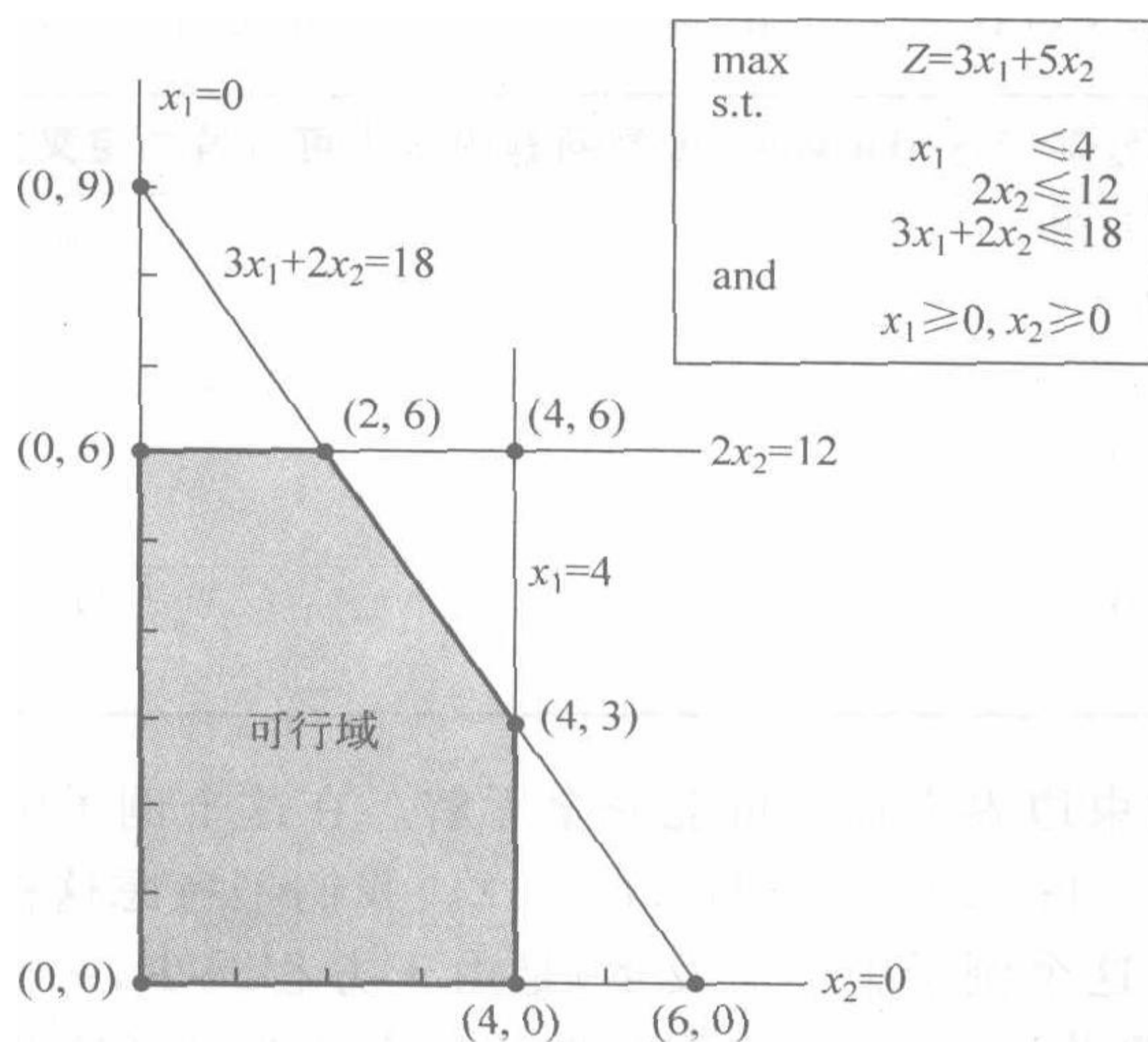


图 5.1 Wyndor Glass 公司问题的约束边界、约束边界方程和角点解

当决策变量的个数 n 大于 2 或 3 时,CPF 解的这个定义对确定这样的解就不是很方便。因此,可以证明,代数方法对解释这种问题是最有帮助的。在 Wyndor Glass 公司的例子中,图 5.1 中每一个 CPF 解都位于两条约束线段($n=2$)的交点上,即有两个边界约束方程的方程组的公共解。表 5.1 总结了这些解的情况,其中**定义方程**(defining equations)指的是约束边界方程,由这些方程得出(定义)所列出的 CPF 解。

^① 线段的代数表示在附录 2 中给出。

表 5.1 Wyndor Glass 公司问题每个 CPF 解的定义方程

CPF 解	定义方程
(0,0)	$x_1=0$ $x_2=0$
(0,6)	$x_1=0$ $2x_2=12$
(2,6)	$2x_2=12$ $3x_1+2x_2=18$
(4,3)	$3x_1+2x_2=18$ $x_1=4$
(4,0)	$x_1=4$ $x_2=0$

在任何有 n 维变量的线性规划问题中,每一个 CPF 解都位于 n 个约束边界的交点上,即它是有 n 个约束边界方程的方程组的公共解。

然而,这并不是说每个从 $m+n$ 个约束(m 个函数约束和 n 个非负约束)中选出的 n 个约束边界方程的组合都能产生一个 CPF 解。特别是,这样一个方程组的公共解可能会不满足一个或多个没有被选中的另外 m 个约束。这种情况下它就是一个角点非可行解。本例中有两个这样的解,如表 5.2 中汇总所示(检验一下它们为什么是不可行的)。

表 5.2 Wyndor Glass 公司问题中角点可行解的定义方程

角点可行解	定义方程
(0,9)	$x_1=0$ $3x_1+2x_2=18$
(4,6)	$2x_2=12$ $x_1=4$
(6,0)	$3x_1+2x_2=18$ $x_2=0$

此外,一个 n 维约束边界方程组可能完全无解。在这个例子中它发生了两次,为两对方程:(1) $x_1=0$ 且 $x_1=4$; (2) $x_2=0$ 且 $2x_2=12$ 。我们不考虑这样的方程组。

最后一种可能(在这个例子中不会发生)是由于方程减少,一个 n 维约束边界方程组有多个解。你也不需要关注这种情况,因为单纯形方法绕过了这些困难。

还应当提到有可能在 n 个约束方程中有多于一个以上组合得到相同的角点解。例如 Wyndor Glass 公司问题中的 $x_1 \leq 4$ 约束若用 $x_1 \leq 2$ 替换,注意在图 5.1 中的 CPF 解(2,6)可以从三对约束方程中的任一对中导出(这是在 4.5 节中讨论的不同内容的退化例子)。

对这个例子做总结,对 5 个约束和 2 个变量,有 10 对约束边界方程。其中 5 对变为 CPF 解(表 5.1)的定义方程,3 对变为角点可行解的定义方程(表 5.2),另外 2 对无解。

相邻 CPF 解

4.1 节介绍了相邻 CPF 解和它们在线性规划问题中的作用,我们现在来详细说明。

回顾第 4 章(当我们不考虑松弛变量,剩余变量和人工变量时)单纯形法从当前的

CPF 解转到它相邻的一个 CPF 解的每一次迭代,这个过程会沿着怎样的路径呢? 相邻 CPF 解的真正意义是什么呢? 首先我们把这些用几何来阐述,然后我们转到代数解释。

当 $n=2$ 时,这些问题很好回答。在这种情况下,可行域的边界由形成了多边形的几条相连的线段组成,如图 5.1 中五条粗线所示。这些线段就是可行域的边界。从每一个 CPF 解引出的是这样的两条边界线,在其另一端就是一个相邻 CPF 解(注意图 5.1 中,每一个 CPF 解是如何有两个相邻的 CPF 解)。在一次迭代中遵循的路径就是沿着该边界线从一端移动到另一端。在表 5.1 中,第一次迭代为沿边界从点 $(0,0)$ 移动到点 $(0,6)$,接着的下一步迭代是沿边界从点 $(0,6)$ 移动到点 $(2,6)$ 。如表 5.1 所示,每一次到相邻的 CPF 解的移动都包含了一个定义方程组(约束边界方程组,依此方程组得到解)的变化。

当 $n=3$ 时,答案就显得更加复杂一些。为了帮助你想象将会发生什么,图 5.2 展示了当 $n=3$ 时的一个典型的可行域的图形,这里的点为 CPF 解。这个可行域是一个多面体而不是当 $n=2$ 时的一个多边形(见图 5.1)。因为约束边界现在是平面而不是直线,多面体的表面形成了可行域的边界,每个面都是满足其他约束条件的约束边界的一部分。注意每个 CPF 解都取决于三个约束的交点(有时包括一些非负约束而形成约束边界 $x_1=0, x_2=0, x_3=0$),这些解也满足其他约束。而不满足一个或多个其他约束条件的交点则是角点非可行解。

图 5.2 中的粗线部分描述了单纯形法典型迭代的路径。点 $(2,4,3)$ 是开始迭代的当前 CPF 解,点 $(4,2,4)$ 是迭代结束后的新 CPF 解。点 $(2,4,3)$ 为 $x_2=4, x_1+x_2=6, -x_1+2x_3=4$ 三个约束边界的交点,所以这三个方程是这个 CPF 解的定义方程。如果 $x_2=4$ 这个定义方程被移走,另外两个约束边界(平面)的交界就会形成一条直线。这条直线上的一段,如图 5.2 所示为点 $(2,4,3)$ 到点 $(4,2,4)$ 的粗线,位于可行域的边界上。而这条线以外的点都是不可行的。这条线段就是可行域的边界,它的端点 $(2,4,3)$ 和点 $(4,2,4)$ 就是相邻 CPF 解。

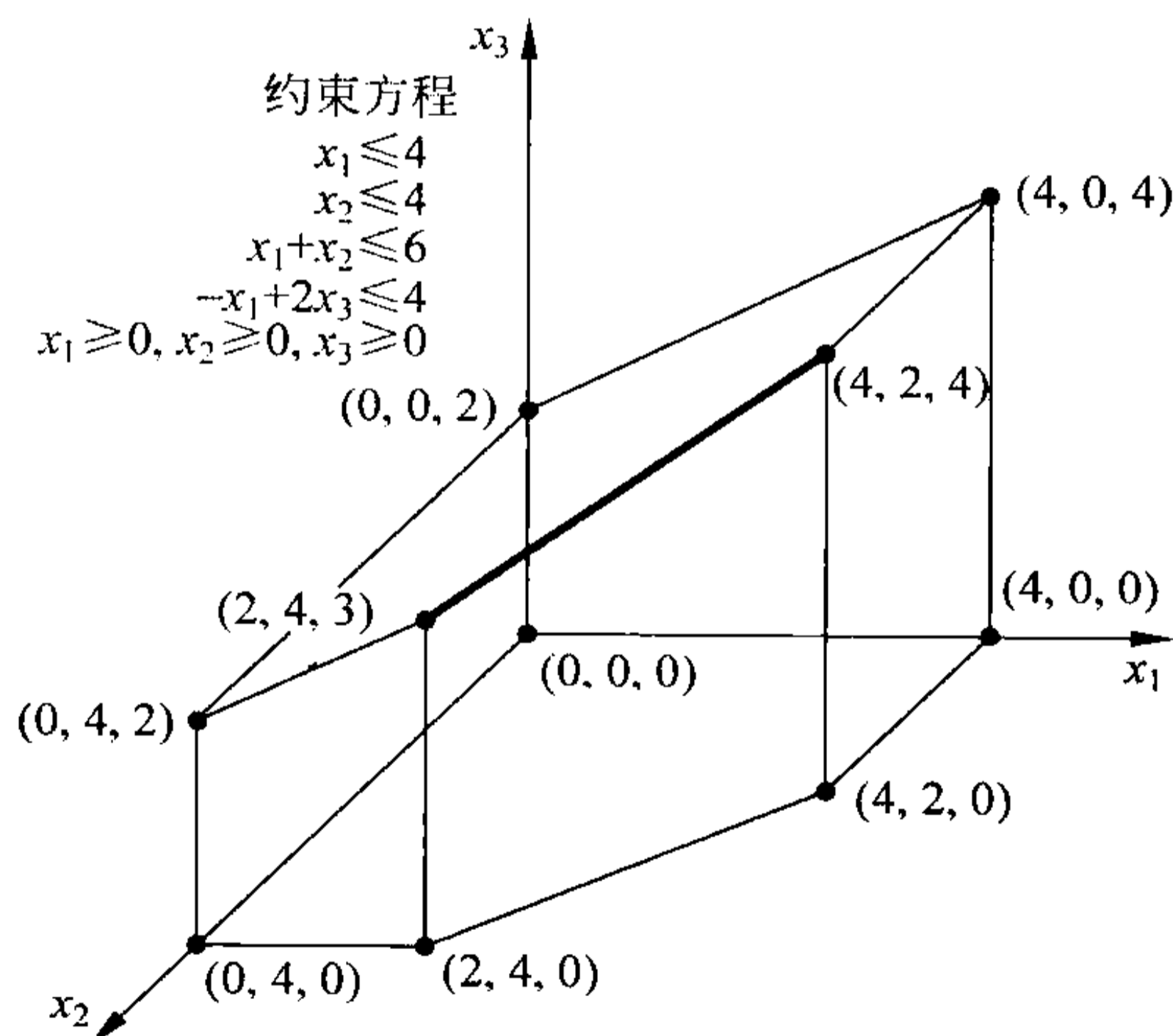


图 5.2 三变量线性规划问题的可行域和 CPF 解

当 $n=3$ 时,所有的可行域的边界都是以这种方式形成的可行线段,它位于两个约束边界的交界处,边界的两个端点就是相邻 CPF 解。在图 5.2 中,可行域由 15 条边界构

成,这样就有 15 对相邻 CPF 解。对于当前的 CPF 解(2,4,3),有三种方法来移走这三个定义方程的一个来得到另外两个约束方程的交界,所以从点(2,4,3)就可以引出三个边界。点(4,2,4)、点(0,4,2)和点(2,4,0)就是由这三个边界分别引出的,它们就是点(2,4,3)的相邻 CPF 解。

下一步迭代中,单纯形法选择了三条边界中的一个,如图 5.2 中的粗线段所示,然后沿着这条边界移动,从点(2,4,3)一直移到第一个新的约束边界($x_1=4$)的另一个端点上[我们不能继续沿着这条直线到下一个约束边界 $x_2=0$,因为这样就得出了一个角点非可行解(6,0,5)]。这两个边界与第一个新的约束边界的交点即为新的 CPF 解(4,2,4)。

当 $n>3$ 时,相同的原理可以推广到更高的维数,除非约束边界为超平面而不是平面。让我们来概括一下。

考虑任何一个具有 n 个决策变量和一个有界的可行域的线性规划问题。一个 CPF 解位于 n 个约束边界的交点上(并且也满足其他约束)。一个可行域的边界(edge)是一条可行的线段,它位于 $n-1$ 个约束边界线的交界处,该边界线的每一个端点都处于另一个约束边界上(所以这些端点为 CPF 解)。如果连接两个 CPF 解的线段为可行域的边界,那么这两个 CPF 解就是相邻(adjacent)的。从每个 CPF 解引出的 n 条这样的边界,每条边界都可以得出 n 个相邻 CPF 解之一。单纯形法的每一次迭代就是从当前 CPF 解沿这 n 条边界线之一移动到相邻的一个 CPF 解。

当从几何视角转到代数视角时,约束边界的交点就转化为约束边界方程的公共解了。得出(定义)了一个 CPF 解的 n 个边界约束方程就是它的定义方程,去掉其中一个方程就得到了一条直线,其可行部分就是该可行域边界线段。

我们下面分析一下 CPF 解的重要性质,然后阐述所有这些原理的内涵来解释单纯形法。然而,由于你才接触到上面的总结,还是让我们来预习一下它的含义。当单纯形法选择了一个入基变量时,它的几何解释就是选择了从当前 CPF 解引出的移动所遵循的一条边。从 0 开始增加这个变量值(同时相应改变其他基变量的值)相当于解点沿着这条边移动。使一个基变量(出基变量)减少直到 0 时,相应地到达了位于可行域边界另一端的第一个新约束边界。

CPF 解的性质

我们现在关注 CPF 解的三个主要性质,它们对任何有可行解和一个有界可行域的线性规划问题都成立。

性质 1: (a)如果只有一个最优解,它一定是 CPF 解;(b)如果有许多最优解(在有界可行域中),至少两个必为相邻 CPF 解。

性质 1 从几何视角来看更加直观。首先考虑(a)情况,在 Wyndor Glass 公司问题的例子中(见图 5.1)表明的,最优解(2,6)就是 CPF 解。注意得出这个结果的例子没有什么特别之处。任何只有一个最优解的问题,总是可能使目标函数线(超平面)提升,直到在可行域的一角触到一点(最优解)。

我们现在给出此项的代数证明。

对性质 1 的(a)情况证明: 我们用反证法来给予证明,假设只有一个最优解但它不是

CPF 解。我们会在下面说明这个假设会得出矛盾结论从而不可能是正确的(这个假设的最优解用 \mathbf{x}^* 表示, 目标函数值用 Z^* 表示)。

回顾 CPF 解的定义(不位于任何其他两个可行解连接的线段上的可行解)。由于我们假设最优解 \mathbf{x}^* 不是 CPF 解, 这就意味着必定存在另外两个这样的可行解, 其连线中一定包含这个最优解。设这两个可行解分别为 \mathbf{x}' 、 \mathbf{x}'' , 用 Z_1 、 Z_2 分别表示它们各自的目标函数值。当 $0 < \alpha < 1$ 时, \mathbf{x}' 、 \mathbf{x}'' 连成的线段上其他的点为

$$\mathbf{x}^* = \alpha \mathbf{x}'' + (1 - \alpha) \mathbf{x}',$$

这样

$$Z^* = \alpha Z_2 + (1 - \alpha) Z_1$$

因为权数 α 与 $1 - \alpha$ 之和为 1, 那么 Z^* 、 Z_1 、 Z_2 相比较可能性只有: (1) $Z^* = Z_1 = Z_2$; (2) $Z_1 < Z^* < Z_2$; (3) $Z_1 > Z^* > Z_2$ 。第一种可能性表示 \mathbf{x}' 和 \mathbf{x}'' 都为最优解, 这与只有一个最优解的假设矛盾。后两种可能与 \mathbf{x}^* (不是 CPF 解) 是最优解的假设矛盾。得出的结论为当只有一个最优解时, 它不可能不是 CPF 解。

现在考虑(b)情况, 在 3.2 节中, 在最优解的定义下, 我们曾经通过改变例子中的目标函数 $Z = 3x_1 + 2x_2$ 来证明过(b)情况(见图 3.5)。当我们图解这个问题时, 目标函数线持续上移直到包含连接两个 CPF 解(2,6)和解(4,3)的线段。同样的事情也会在高维情况下发生, 除非目标函数超平面持续上移直到包含连接两点(或多点)的相邻 CPF 解的线段。这样, 所有的最优解都可以通过对最优 CPF 解的加权平均而获得(这种情形在习题 4.5-5 和习题 4.5-6 中有进一步描述)。

性质 1 的真正意义在于它极大地简化了寻找最优解的方法, 因为现在我们只需考虑 CPF 解。这种简化的量在性质 2 中被着重强调。

性质 2: 只有有限个 CPF 解。

这条性质在图 5.1 和图 5.2 中显然是正确的。图 5.1 中只有 5 个 CPF 解, 图 5.2 中有 10 个。为了知道为什么一般来说解的个数是有限的, 我们回忆每一个 CPF 解都是 $m+n$ 个约束边界方程中的 n 个方程公共解的事实。 $m+n$ 个方程中每次取 n 个不同方程的组合数是

$$\binom{m+n}{n} = \frac{(m+n)!}{m!n!}$$

这是一个有限的数目。因此这个数目即为 CPF 解个数的一个上限。在图 5.1 中, $m=3$, $n=2$, 所以只有 10 组由两个方程组成的方程组, 但只有 5 组能得出 CPF 解。在图 5.2 中, $m=4$, $n=3$, 有 35 组由三个方程组成的方程组, 但只有 10 组能得出 CPF 解。

性质 2 指出, 原则上, 详尽的列举就可以得到一个最优解, 即寻找并比较所有的有限个 CPF 解。不幸的是, CPF 解的有限个数也就可能是 CPF 解无限多的个数(在实际应用中)。例如, 一个相当小的——只是 $m=50$, $n=50$ ——线性规划问题, 就要求解 $\frac{100!}{(50!)^2} \approx 10^{29}$ 组方程组。相反, 在这种规模的问题中, 单纯形法只需要测试大约 100 个 CPF 解。可以获得这么大量的节约是由于 4.1 节中最优性的检验而实现的。在这里作为性质 3 再表述出来。

性质 3: 如果一个 CPF 解没有相邻 CPF 解比它更优(以 Z 来测量), 那么就不存在任何更好的 CPF 解。这样, 假定这个问题至少有一个最优解(由问题具有可行解和一个有

界的可行域来保证),这个 CPF 解就是最优解(由性质 1)。

为说明性质 3,考虑图 5.1 中的 Wyndor Glass 公司问题。CPF 解(2,6)的相邻 CPF 解为(0,6)和(4,3),它们的 Z 值都不比点(2,6)的 Z 值更好。这个结果表明,其他的 CPF 解——(0,0)和(4,0)——都不会优于(2,6),所以(2,6)必为最优解。

相反,图 5.3 给出了一个绝不会在线性规划问题中发生的可行域(因为过点(8/3,5)的约束边界线的延长会切掉部分区域),而且这违背了性质 3。除了可行域扩大到(8/3,5)以外,这里描述的问题同 Wyndor Glass 公司问题一样(包括相同的目标函数)。因此,(2,6)的相邻 CPF 解为(0,6)和(8/3,5),同样都不比(2,6)为优。然而,另一个 CPF 解(4,5)要优于(2,6),这就违背了性质 3。原因就在于可行域的边界从(2,6)到(8/3,5),然后向外弯折到(4,5),超出了过点(2,6)的目标函数线。

关键问题是图 5.3 所示的情况在线性规划中是绝不可能发生的。图 5.3 中的可行域意味着约束条件 $2x_2 \leq 12, 3x_1 + 2x_2 \leq 18$ 要求 $0 \leq x_1 \leq \frac{8}{3}$ 。然而,在条件 $\frac{8}{3} \leq x_1 \leq 4$ 下,约束 $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ 被 $x_2 \leq 5$ 所取替了。这种“条件约束”在线性规划中是不允许的。

性质 3 适用于所有线性规划问题的基本原因在于可行域具有凸集^①的性质,如附录 2 中所做的定义以及几个图形中的说明。对具有两个变量的线性规划问题,凸集的性质表示可行域内部每个 CPF 解的角度小于 180° 。例如,图 5.1 中,点(0,0)、点(0,6)和点(4,0)角度都是 90° ,点(2,6)和点(4,3)的角度介于 90° 和 180° 之间。相反,图 5.3 中的可行域不是一个凸集,因为点(8/3,5)的角度大于 180° 。这种“向外弯曲”大于 180° 的角度情况在线性规划中不可能发生。在更高维数时,相同的直观概念“不会向外弯曲”(凸集的基本性质)依然成立。

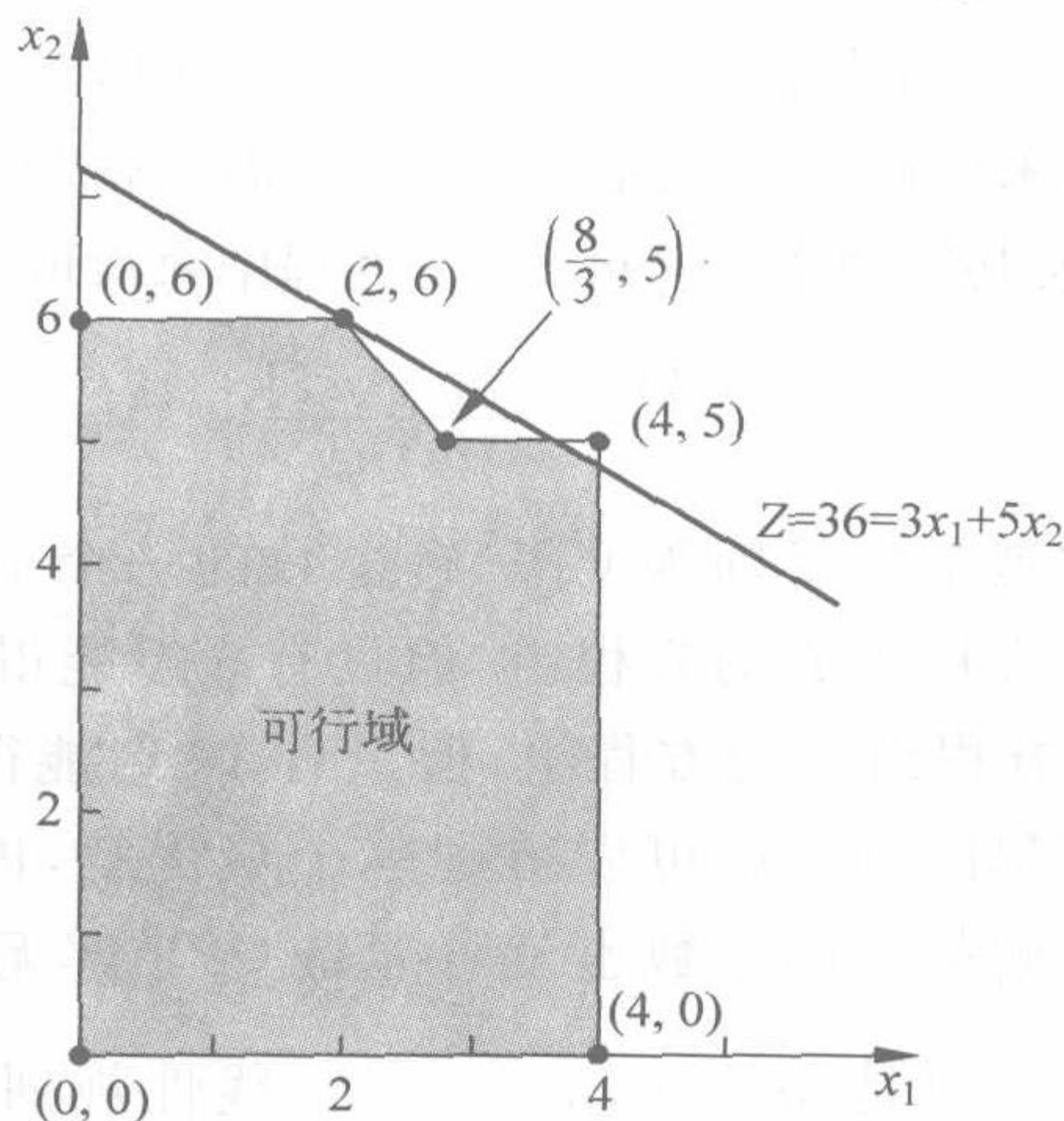


图 5.3 对 Wyndor Glass 公司问题的修订违背了线性规划和线性规划中 CPF 解的性质 3

① 如果你已经很熟悉凸集,注意满足任何线性规划约束的解集(不论是不等式约束还是等式约束)为凸集。在任何线性规划问题中,它的可行域就是满足各个约束条件的解的交集。因为凸集的交集仍为凸集,所以可行域必为凸集。

为了更明确“凸可行域”的特征,考虑穿过最优 CPF 解的目标函数的超平面[在初始 Wyndor Glass 公司问题的例子中,这个超平面是过点(2,6)的目标函数线]。所有的相邻解[(0,6)和(4,3)]必位于超平面上或下侧(以 Z 衡量)。可行域为凸集意味着它的边界不可能“向外弯曲”越过相邻 CPF 解来得到另一个位于超平面上的 CPF 解,所以性质 3 成立。

扩展形式问题的延伸

对于我们定义的标准形式下的任何线性规划问题(包括含有“ \leq ”形式的函数约束),添加剩余变量后的函数约束形式为:

$$\begin{aligned} (1) \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ (2) \quad & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ & \vdots \\ (m) \quad & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{aligned}$$

其中, $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ 为松弛变量。对于其他形式的线性规划问题,4.6 节介绍了通过引入人工变量等方法来得到与此相同的形式(由高斯消元法得到的形式)的重要性。这样,原来的解 (x_1, x_2, \dots, x_n) 就被相应的松弛变量或人工变量 $(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m})$ 也可能是一些剩余变量扩展了。这个扩展使得在 4.2 节中把**基本解**(basic solutions)定义为扩展的角点解,把**基本可行解(BF 解)**[basic feasible solutions (BF solutions)]定义为扩展的 CPF 解。因此,前述的 CPF 解的三个性质对于 BF 解也适用。

现在让我们明确一下基本解和角点解之间的代数关系。回顾一下,每一个角点解都是 n 个边界约束方程(我们称之为定义方程)的公共解。关键问题为:在问题的扩展形式下,我们如何判断一个特定的约束边界方程是否为一个定义方程?幸运的是,回答很简单。每一个约束都有一个**指示变量**(indicating variable),它完全可以表示(依据它的值是否为 0)当前解是否满足这个约束边界方程。表 5.3 给出一个总结。对于表中每一行的约束,注意只有当且仅当约束的指示变量(第五列)值为 0 时才满足相应的约束边界方程(第四列)。最后一行(“ \geq ”形式的函数约束),指示变量 $\bar{x}_{n+i} - x_{s_i}$ 实际上是人工变量 \bar{x}_{n+i} 与剩余变量 x_{s_i} 的差。

表 5.3 约束边界方程的指示变量*

约束类型	约束形式	扩展形式的约束	约束边界方程	指示变量
无约束	$x_j \geq 0$	$x_j \geq 0$	$x_j = 0$	x_j
函数(\leq)	$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$	$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i$	$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$	x_{n+i}
函数(=)	$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$	$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \bar{x}_{n+i} = b_i$	$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$	\bar{x}_{n+i}
函数(\geq)	$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i$	$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \bar{x}_{n+i} - x_{s_i} = b_i$	$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$	$\bar{x}_{n+i} - x_{s_i}$

* : 指示变量 = 0 \Rightarrow 满足约束边界方程;
指示变量 $\neq 0 \Rightarrow$ 不满足约束边界方程。

这样,只要一个约束边界方程是角点解的定义方程之一,在问题的扩展形式里它的指示变量都为0。每个这样的指示变量在相应的基本解中都被称为非基变量。最终结论(曾在4.2节中介绍过)总结如下:

每一个基本解都有 m 个基变量(basic variables),剩下的变量取值为0,为非基变量(非基变量数为 n 与剩余变量个数之和)。基变量的取值是由扩展形式中 m 个方程的公共解得到的(非基变量值为0)。基本解为由非基变量做指示变量的 n 个定义方程的扩展角点解。特别地,只要表5.3中第五列的指示变量为非基变量,第四列中的约束边界方程就是该角点解的定义方程(当约束条件为“ \geq ”的形式,两个增补变量 \bar{x}_{n+i} 和 x_{s_i} 至少一个恒为非基变量,但仅当这两个变量同为非基变量时约束边界方程才成为定义方程)。

现在考虑基本可行解。注意在问题的扩展形式中解为可行解的唯一条件是它满足方程组且所有变量都非负。

一个BF解也是基本解,其中所有 m 个基变量都非负(≥ 0)。如果这 m 个基变量任何一个取值为0,这个基本可行解就为退化(degenerate)的。

这样,在当前的BF解中,有可能变量取值为0而不是非基变量(这种情况对应于一个CPF解除了满足 n 个定义方程外,还满足另一个约束边界方程)。这样,就有必要追踪哪个是非基变量组(或者基变量组),而不是看它们的值是否为0。

我们很早就注意到不是所有的 n 维方程组都能导出一个角点解,因为方程组要么无解,要么有多个解。类似的,不是所有的 n 个非基变量的组合都能得出基本解。然而,在单纯形法中,这些情况都被避免了。

为说明这些定义,再一次考虑 Wyndor Glass 公司的例子。它的约束边界方程和指示变量如表5.4所示。

表 5.4 Wyndor Glass 公司问题中约束边界方程的指示变量

约 束	扩展形式的约束	约束边界方程	指示变量
$x_1 \geq 0$	$x_1 \geq 0$	$x_1 = 0$	x_1
$x_2 \geq 0$	$x_2 \geq 0$	$x_2 = 0$	x_2
$x_1 \leq 4$	(1) $x_1 + x_3 = 4$	$x_1 = 4$	x_3
$2x_2 \leq 12$	(2) $2x_2 + x_4 = 12$	$2x_2 = 12$	x_4
$3x_1 + x_2 \leq 18$	(3) $3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$	$3x_1 + 2x_2 = 18$	x_5

说明: 指示变量=0 \Rightarrow 满足约束边界方程;

指示变量 $\neq 0 \Rightarrow$ 约束边界方程无效。

扩展每一个CPF解(见表5.1)得出表5.5中的基本可行解。除了第一个解和最后一个解之外,表5.5把每一个相邻BF解顺次排列。注意每一个情况下非基变量必然是定义方程的指示变量。这样,相邻BF解的差异缘于仅有一个非基变量的不同。同样注意当非基变量取值都为0时,每一个BF解都是扩展形式(表5.4)下方程组的公共解。

类似的,三个角点可行解(见表5.2)得出表5.6中的三个基非可行解。

另外两组非基变量,(1) x_1 和 x_3 , (2) x_2 和 x_4 ,都不能得出基本解,因为令任一组变量取值为0都不能得出表5.4中给出的方程组(1)到方程组(3)的解。这个结论与本节开始部分得出的对应的约束边界方程不能得出解的结果相同。

表 5.5 Wyndor Glass 公司问题的基本可行解

CPF 解	定义方程	BF 解	非基变量
(0,0)	$x_1 = 0$ $x_2 = 0$	(0,0,4,12,18)	x_1 x_2
(0,6)	$x_1 = 0$ $2x_2 = 12$	(0,6,4,0,6)	x_1 x_4
(2,6)	$2x_2 = 12$ $3x_1 + 2x_2 = 18$	(2,6,2,0,0)	x_4 x_5
(4,3)	$3x_1 + 2x_2 = 18$ $x_1 = 4$	(4,3,0,6,0)	x_5 x_3
(4,0)	$x_1 = 4$ $x_2 = 0$	(4,0,0,12,6)	x_3 x_2

表 5.6 Wyndor Glass 公司问题的基本可行解

角点可行解	定义方程	基本可行解	非基变量
(0,9)	$x_1 = 0$ $3x_1 + 2x_2 = 18$	(0,9,4,-6,0)	x_1 x_5
(4,6)	$2x_2 = 12$ $x_1 = 4$	(4,6,0,0,-6)	x_4 x_3
(6,0)	$3x_1 + 2x_2 = 18$ $x_2 = 0$	(6,0,-2,12,0)	x_5 x_2

单纯形法从 BF 解开始,然后迭代到更优的基本可行解直到达到最优解。那么每一次迭代是怎么到达相邻 BF 解的呢?

关于问题的原始形式,回顾一下从当前解移到相邻 CPF 解过程:(1)从 n 个定义当前解的约束边界中去掉一个约束边界(定义方程);(2)将当前解在可行的方向上沿着剩下的 $n-1$ 个约束边界交线(可行域的边缘)移动;(3)当到达第一个新的约束边界(定义方程)时停止。

等价的,在我们新的术语中,单纯形法从当前解到达新的相邻 BF 解的步骤为:(1)从定义当前解的 n 个非基变量中去掉一个(作为入基变量);(2)通过把这个变量值从 0 增加(并调节其他基变量值使之仍满足方程组)来改变当前解,同时保持其他 $n-1$ 个非基变量值仍为 0;(3)当第一个基变量(出基变量)值达到 0(它的约束边界)时停止。在这两种解释中,步骤 1 里 n 个非基变量的选择都是通过选择一个 Z 的增加率最高(步骤 2 中确定)的变量(入基变量的单位增加量)。

表 5.7 例示了单纯形法中几何解释和代数解释之间紧密的对应关系。利用 4.3 节和 4.4 节给出的结果,第四列总结了 Wyndor Glass 公司问题中求解基本可行解的顺序,第二列列出了相应的 CPF 解。在第三列,注意每一次迭代是如何删除一个约束边界(定义方程)的,并增加一个新的约束边界以得到一个新的 CPF 解。类似的,注意第五列中每一次迭代是如何删除一个约束边界(定义方程)并增加一个新的约束边界以得到新的基本可行解。此外,被删除和增加的非基变量就是第三列中被删除和增加的定义方程的指示变

量。最后一列显示了问题的扩展形式的初始方程组[不包括方程(0)],当前基变量用粗体表示。在每一种情况下,注意如何把非基变量赋为0值,然后解这个方程组得到基变量的值,必然会得到与第三列对应的定义方程组相同的解 (x_1, x_2) 的值。

表 5.7 Wyndor Glass 公司问题中单纯形法得到的解的顺序

迭代	CPF 解	定义方程	BF 解	非基变量	扩展形式下的函数约束
0	(0,0)	$x_1=0$ $x_2=0$	(0,0,4,12,18)	$x_1=0$ $x_2=0$	$x_1 + \mathbf{x}_3 = 4$ $2x_2 + \mathbf{x}_4 = 12$ $3x_1 + 2x_2 + \mathbf{x}_5 = 18$
1	(0,6)	$x_1=0$ $2x_2=12$	(0,6,4,0,6)	$x_1=0$ $x_4=0$	$x_1 + \mathbf{x}_3 = 4$ $2\mathbf{x}_2 + x_4 = 12$ $3x_1 + 2\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_5 = 18$
2	(2,6)	$2x_2=12$ $3x_1 + 2x_2=18$	(2,6,2,0,0)	$x_4=0$ $x_5=0$	$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3 = 4$ $2\mathbf{x}_2 + x_4 = 12$ $3\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2 + x_5 = 18$



5.2 单纯形法的矩阵形式

第4章中介绍的单纯形法(分别用的是代数形式或表格形式)进一步审视单纯形法的理论和运算能力可通过对其矩阵形式的测试得到。我们先从表达线性规划问题的矩阵形式开始(见附录4对矩阵的复习)。

为帮助区分矩阵、矢量和数量,我们始终用黑斜体大写字母来表示矩阵,黑斜体小写字母表示向量,白斜体字母表示数量。我们用黑体零($\mathbf{0}$)来表示零向量(一个向量的元素全部为0),无论它是行向量还是列向量(上下文中应该已经明确)。但是正体的0仍然表示数字0。

利用矩阵表示,我们在3.2节中给出的线性规划模型的标准形式就成为:

$$\begin{array}{l} \max \quad Z = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \text{s. t.} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

这里 \mathbf{c} 为行向量

$$\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_n],$$

\mathbf{x} , \mathbf{b} 和 $\mathbf{0}$ 都是列向量

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

A 为矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

为了得到问题的扩展形式,引入松弛变量的列向量 $x_s =$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix}$$

这样约束变为: $[A, I] \begin{bmatrix} x \\ x_s \end{bmatrix} = b$, 且 $\begin{bmatrix} x \\ x_s \end{bmatrix} \geq 0$

其中 I 为 $m \times m$ 单位矩阵,零向量 0 有 $n+m$ 个元素(我们在本节后讨论如何处理非标准形式的问题)。

求一个基本可行解

回顾一下,单纯形法的一般方法是为了得到一系列更优的 BF 解直到得到最优解。单纯形法矩阵形式的一个关键是确立一种方法,即在确定其基变量和非基变量之后,如何求每一个新的 BF 解算法。给定这些变量,基本解为该 m 个方程 $[A, I] \begin{bmatrix} x \\ x_s \end{bmatrix} = b$ 的解,在

这里 $n+m$ 个元素 $\begin{bmatrix} x \\ x_s \end{bmatrix}$ 中的 n 个非基变量被赋值为 0。通过赋予这 n 个变量 0 值后使其从方程中消去,剩下了含有 m 个未知数(基变量)的 m 个方程。方程的集合可以表示为: $Bx_B = b$, 其中基变量向量(vector of basic variables)

$$x_B = \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix}, \text{ 是从 } \begin{bmatrix} x \\ x_s \end{bmatrix} \text{ 中消去了非基变量后得到的。}$$

从 $[A, I]$ 中消去非基变量对应的系数的列后得到的基矩阵(basis matrix)为:

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mm} \end{bmatrix}$$

(此外,采用单纯形法时, x_B 的元素和 B 的列可能会以不同的顺序给出。)

单纯形法仅介绍了像 B 一样的非退化的基变量,这样 B^{-1} 也总是存在的。所以,为了解出 $Bx_B = b$, 方程两边左乘 B^{-1} : $B^{-1}Bx_B = B^{-1}b$ 。

由于 $B^{-1}B = I$, 基变量的解为

$$\boxed{x_B = B^{-1}b}$$

令 c_B 表示目标函数中对应 x_B 的一个系数列向量(包括松弛变量系数 0)。那么该基

本解的目标函数的值即为

$$Z = c_B x_B = c_B B^{-1} b$$

例 为了说明这种求 BF 解的方法,再次以 3.1 节中的 Wyndor Glass 公司问题为例。用原单纯形法求解见表 4.8。本例中

$$c = [3, 5], \quad [A, I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad x_s = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

参照表 4.8, 我们看到由单纯形法(原方法或修正的方法)得到 BF 解的顺序为:

迭代 0:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1}, \quad \text{所以} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$c_B = [0, 0, 0], \quad \text{所以} \quad Z = [0, 0, 0] \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = 0$$

迭代 1:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad c_B = [0, 5, 0], \quad \text{所以} \quad Z = [0, 5, 0] \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 30$$

迭代 2:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad c_B = [0, 5, 3], \quad Z = [0, 5, 3] \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = 36$$

当前方程组的矩阵形式

我们总结改进单纯形法之前的最后一个准备就是列出任一次迭代单纯形表格形式中方程组的矩阵形式。

对于原方程组,矩阵形式为:

$$\begin{bmatrix} 1 & -c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

这个方程组同样在表 5.8 的第一列中列出。

单纯形法执行的代数运算(用一个常数乘以一个方程和把一个方程的倍数加到另一个方程上)用矩阵形式表示,就是用适当的矩阵左乘原方程组中方程的两边。这个矩阵应该与单位矩阵有相同的元素,除非代数运算的每一次倍乘都达到需要执行矩阵乘法运算的点。甚至在超过几次的一系列迭代的代数运算之后,在整个方程组中仍然能够用新方程组中我们已经知道的新的右端项来推断出这个矩阵全部向量必定是(象征性)什么。特别是,在任何一次迭代后,有 $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ 和 $Z = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, 所以新方程组的右端项为

$$\begin{bmatrix} Z \\ \mathbf{x}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix}$$

由于我们在方程组的原形式两边执行相同次序的代数运算,所以我们用与左乘原方程右端的相同的矩阵来左乘方程左端,这样,由于

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - c & \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix}$$

在任何一次迭代之后得到方程组的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - c & \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix}$$

表 5.8 中的第二个单纯形法也显示了相同的方程组。

迭代	基变量	方程	系数			右端项
			Z	原变量	松弛变量	
0	Z	(0)	1	-c	0	0
	\mathbf{x}_B	(1, 2, ..., m)	0	A	I	b
任意次	Z	(0)	1	$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - c$	$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
	\mathbf{x}_B	(1, 2, ..., m)	0	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$	\mathbf{B}^{-1}	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

例 为了说明当前方程组的矩阵形式,我们要演示怎样对 Wyndor Glass 公司问题得到由迭代 2 导出的最终方程组。利用前述部分末尾迭代 2 中给定的 \mathbf{B}^{-1} 和 \mathbf{c}_B , 我们有

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1} = [0, 5, 3] \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \left[0, \frac{3}{2}, 1\right]$$

$$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c} = [0, 5, 3] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - [3, 5] = [0, 0]$$

同样,利用在前述部分的结尾计算的值 $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ 和 $Z = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, 这个结果给出下面的方程组,与表 4.8 中最终单纯形表所示一致。

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right] \begin{bmatrix} Z \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

在任何一次迭代后,方程组集合的矩阵形式(见上一个例子的方框)提供了单纯形法矩阵形式执行的关键。这些方程显示的矩阵形式(或表 5.8 的下端部分)提供了直接计算将在观看方程集中出现的(对单纯形法代数形式)或在现有单纯形表中(对单纯形法的表格形式)所有数字的直接方法。单纯形法的三种形式将恰好提供相同的决策(入基变量、出基变量等)。这些形式之间的唯一差别是用于确定决策时需要计算的数字的方法不同。正如下面总结的,矩阵形式提供了一种方便而紧凑的方法,不需要对一系列方程组或单纯形表计算这些数字。

单纯形法矩阵形式的小结

1. **初始化**: 如第 4 章中描述的,引进松弛变量到初始的基变量,并由此得到初始的 \mathbf{x}_B 、 \mathbf{c}_B 、 \mathbf{B} 和 \mathbf{B}^{-1} 。在问题满足标准形式的假设时, $\mathbf{B} = \mathbf{I} = \mathbf{B}^{-1}$, 然后进行最优化检验。

2. **迭代**:

第 1 步. 确定入基变量: 参见方程(0)中非基变量的系数,然后(如图 4.4 节中所述)

选择最大绝对值的系数为负的变量作为入基变量。

第2步. 确定出基变量: 应用矩阵表达式对 $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ (原变量的系数) 和 \mathbf{B}^{-1} (松弛变量的系数) 计算除了方程(0)之外每个方程入基变量的系数。同样利用前述的 $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ (见第3步) 的计算求得这些方程的右端项。然后如同 4.4 节所述的应用计算最小比值选择出基变量。

第3步. 确定新的基可行解: 通过用 $[\mathbf{A}, \mathbf{I}]$ 中入基变量的相应列替换出基变量的列, 更新基矩阵 \mathbf{B} 。同样在 \mathbf{x}_B 和 \mathbf{c}_B 中进行相应替换, 然后导出 \mathbf{B}^{-1} (见附录 4 说明) 并使 $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ 。

3. 最优性测试: 应用矩阵表达式 $\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}$ (对原变量的系数) 和 $\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}$ (对松弛变量的系数) 计算方程(0)中非基变量的系数, 当或仅当所有这些系数均为非负时结束运算。否则再进行迭代, 找出下一个基可行解。

例 我们曾在本节开头对 Wyndor Glass 公司问题进行了上述矩阵运算的一部分, 现在我们对这个问题用完整的单纯形法矩阵将各部分综合到一起。首先, 回忆一下

$$\mathbf{c} = [3, 5], \quad [\mathbf{A}, \mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

初始化

初始基变量为松弛变量, 因此正如在本节第一个例子中对迭代 0 已指出的,

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_B = [0, 0, 0], \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}$$

最优性检验

非基变量 (x_1 和 x_2) 的系数为

$$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c} = [0, 0] - [3, 5] = [-3, -5]$$

这些负的系数说明初始的基可行解 (BF) $\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$ 为非最优解。

迭代 1

因 -5 的绝对值较 -3 大, 入基变量为 x_2 。仅对矩阵的有关部分进行运算, x_2 在除方程(0)之外其他方程中的系数为

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} - & 0 \\ - & 2 \\ - & 2 \end{bmatrix}$$

\mathbf{x}_B 所给出的这些方程的右端项见初始化步骤。所以最小比值计算指出出基变量为 x_4 , 因为 $12/2 < 18/2$ 。本节第一个例子的迭代 1 已给出了更新后的 \mathbf{B} , \mathbf{x}_B , \mathbf{c}_B 和 \mathbf{B}^{-1} 的结果为

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_B = [0, 5, 0]$$

所以 x_2 已替换了 \mathbf{x}_B 中的 x_4 , 并提供了 \mathbf{c}_B 的新元素和 \mathbf{B} 中新的一列。

最优性检验

现在的非基变量为 x_1 和 x_4 , 它们在方程(0)中的系数为

$$\text{对 } x_1: \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} - \mathbf{c} = [0, 5, 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - [3, 5] = [-3, -, -]$$

$$\text{对 } x_4: \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} = [0, 5, 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = [-, 5/2, -]$$

因为 x_1 有一个负的系数, 现在的 BF 解非最优, 所以继续下一次迭代。

迭代 2

因为 x_1 是非基变量, 在方程(0)中系数为负, 它成了入基变量, 它在其他方程中的系数为

$$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & - \\ 0 & - \\ 3 & - \end{bmatrix}$$

利用上一次迭代中得到的 \mathbf{x}_B , 最小比值的计算表明 x_5 是出基变量, 因 $6/3 < 4/1$ 。对本节第一个例子的迭代 2 已得出更新后的 $\mathbf{B}, \mathbf{B}^{-1}, \mathbf{x}_B$ 和 \mathbf{c}_B 的结果为

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_B = [0, 5, 3]$$

所以用 x_1 已替换了 \mathbf{x}_B 中的 x_5 , 并提供了 \mathbf{c}_B 中的一个新元素和 \mathbf{B} 中新的一列。

最优性检验

现非基变量为 x_4 和 x_5 , 应用本节第二个例子的计算表明它在方程(0)中的系数为 $3/2$ 和 1 。因为这些系数均非负, 现 BF 解 ($x_1=2, x_2=6, x_3=2, x_4=0, x_5=0$) 为最优, 运算结束。

最终的评述

上述例子说明单纯形法的矩阵形式只用了少量矩阵表达式来进行所需的计算。这些矩阵表达式在表 5.8 下端做了概括。对该表得到的基础的审视表明, 为了计算表中其他所有数字, 依据正在求解的模型的原始参数 (\mathbf{A}, \mathbf{b} 和 \mathbf{c}), 只需知道出现在目前单纯形表松弛变量部分的 \mathbf{B}^{-1} 和 $\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1}$ 。当涉及最终单纯形表时, 这个审视特别有价值, 这将在下一节阐述。

正如本节中已经指出的, 单纯形法矩阵形式的一个缺点是需要推导 \mathbf{B}^{-1} , 即每次迭代后更新了的基矩阵的逆。虽然对小规模的非奇异方阵有现成的求逆的程序 (对 2×2 或 3×3 矩阵的求逆甚至可以用手工计算), 但随着矩阵规模的增大, 求逆所需运算时间急剧增长。幸运的是, 从一次迭代到下一次较之重新求取新的基矩阵的逆, 有一种非常有效的方法来更新 \mathbf{B}^{-1} 。将此同单纯形法的矩阵形式结合起来, 这个矩阵形式的改进版本通常称为改进单纯形法, 这是经常用于商业软件的单纯形法版本。我们将在 5.4 节讨论更新 \mathbf{B}^{-1} 的算法。

本书网站的例子给出了应用单纯形法矩阵形式的另一个例子。这个例子每一步的迭代更新 B^{-1} 时同高效率的程序结合,而不是用更新后基矩阵求逆的方法,这是因为应用了改进单纯形法。

最后应当记住,本节中讲述的单纯形法矩阵形式是假定问题已变换成 3.2 节中给出的一般线性规划问题的标准形式。但将模型的其他形式进行修改也比较直接,其初始步骤类似在 4.6 节讲述的单纯形法的代数形式或表格形式。当这些步骤中包含引进人工变量来得到一个初始 BF 解,并由此得到一个单位矩阵作为初始矩阵时,这些变量被包含在 x_s 的 m 个元素中。



5.3 基础的审视

我们将要着眼于由 5.2 节的改进单纯形法揭示的(任何形式的)单纯形法的一个性质。这个基础的审视提供了对偶理论和敏感度分析(第 6 章)两部分内容的关键,它们是线性规划中两个重要的部分。

我们首先描述满足线性规划标准形式的问题求解的审视(3.2 节),然后讨论如何更新为其他形式。这个审视直接基于 5.2 节中的表 5.2。现描述如下。

由表 5.8 提供的审视为:应用矩阵概念,表 5.8 给出了初始单纯形表的行,第 0 行为 $[-c, 0, 0]$,其余行为 $[A, I, b]$ 。在任意一次迭代后,单纯形表中松弛变量的系数变为:第 0 行为 $c_B B^{-1}$,其余的行为 B^{-1} ,这里 B 是当前的基矩阵。测试现有单纯形表的其余部分,其审视为这些松弛变量的系数立即反映出现有单纯形表全部行是如何从初始单纯形表的行中得到的,特别是任意一次迭代后。

$$\text{第 0 行} = [-c, 0, 0] + c_B B^{-1} [A, I, b]$$

$$\text{第 1 行至第 } m \text{ 行} = B^{-1} [A, I, b]$$

我们将在本节末描述这个审视的应用。这些应用仅当我们已得到最优解的最终单纯形表时特别重要。所以在这之后我们将仅关注最优解方面的“基础的审视”。

为了区分任意一次迭代后矩阵的符号(B^{-1} 等)同最后一次迭代的相应的符号,在后面例子中引入以下符号。

设 B 是用单纯形法找出最优解时的基矩阵,令

$S^* = B^{-1}$ = 第 1 行至第 m 行中松弛变量的系数

$A^* = B^{-1}A$ = 第 1 行至第 m 行中原变量的系数

$y^* = c_B B^{-1}$ = 第 0 行中松弛变量的系数

$z^* = c_B B^{-1}A$, 所以 $z^* - c$ = 第 0 行中原变量的系数

$Z^* = c_B B^{-1}b$ = 目标函数的最优值

$b^* = B^{-1}b$ = 第 1 行至第 m 行最优的右端项值

表 5.9 的下半部分表明其中每一个符号均在最终单纯形表中得到匹配。为了解释这些符号,表 5.9 上半部分包括了 Wyndor Glass 公司问题的初始表,下半部分包含了这个问题的最终表。

表 5.9 初始和最终单纯形表矩阵形式的一般符号,以 Wyndor Glass 公司问题为例

初始表	
第 0 行	$t = [-3, -5 \mid 0, 0, 0 \mid 0] = [-c \mid \mathbf{0} \mid 0]$
其他行	$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{bmatrix} = [A \mid I \mid b]$
合并	$\begin{bmatrix} t \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c & \mathbf{0} & 0 \\ A & I & b \end{bmatrix}$
最终表	
第 0 行	$t^* = [0, 0 \mid 0, \frac{3}{2}, 1 \mid 36] = [z^* - c \mid y^* \mid Z^*]$
其他行	$T^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 2 \end{bmatrix} = [A^* \mid S^* \mid b^*]$
合并	$\begin{bmatrix} t^* \\ T^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^* - c & y^* & Z^* \\ A^* & S^* & b^* \end{bmatrix}$

再看表 5.9, 现假定已给出初始表数据 t 和 T , 最终表中只给出 y^* 和 S^* 。怎样仅用这些信息求出最终表中余下的部分呢? 基础的审视给出了答案, 现概述如下。

基础的审视

$$(1) t^* = t + y^* T = [y^* A - c \mid y^* \mid y^* b]$$

$$(2) T^* = S^* T = [S^* A \mid S^* \mid S^* b]$$

这样, 只要通过已知的初始表中模型参数 (c, A 和 b) 以及最终表中松弛变量的系数 (y^* 和 S^*), 这些方程就可以计算出最终表上所有其他的数了。

现在让我们总结一下该基础审视的两个方程所蕴涵的数学逻辑。为得到方程 (2), 回忆一下单纯形法 (不包括那些包含第 0 行的) 中执行的代数运算的整个过程, 这与用一些矩阵 (称其为 M 矩阵) 左乘 T 等同。这样

$$T^* = MT$$

现在我们需要识别 M 。写出 T 和 T^* 的组成部分, 方程变为

$$\begin{aligned} [A^* \mid S^* \mid b^*] &= M[A \mid I \mid b] \\ &= [MA \mid M \mid Mb] \end{aligned}$$

因为这些相等的方程的中间部分 (或其他任何部分) 一定相同, 即有 $M = S^*$, 所以方程 (2) 为有效方程。

注意到对第 0 行的代数运算的整个过程, 等同于把 T 行的某个线性组合加到 t 上, 这相当于把向量 T 的某个倍数加到 t 上, 可发现方程 (1) 是由相似的形式得到的。用 v 表示这个向量, 我们有

$$t^* = t + vT$$

但是 v 仍需要辨识。写出 t 和 t^* 的组成部分, 得到

$$\begin{aligned}
 [z^* \mid -c \mid y^* \mid Z^*] &= [-c \mid \mathbf{0} \mid 0] + v[A \mid I \mid b] \\
 &= [-c + vA \mid v \mid vb]
 \end{aligned}$$

令这些相等的向量方程的中间部分相等,就得出 $v = y^*$,证明方程(1)有效。

使适用于其他模型形式

迄今为止,我们对基础的审视的描述是建立在初始模型为 3.2 节所描述的标准形式的假设下的。然而,上面的数学逻辑只展示了初始模型为其他形式时应当怎么调整。关键在于初始表中的单位矩阵 I ,它在最终表上转化成了 S^* 。如果一定要在初始表中引入一些人工变量作为初始基变量,那么它就是所有初始基变量(包括松弛变量和人工变量)列的组合(以适当的顺序排列),它在这个表中形成了 I (对任何剩余变量的列都是无关的)。在最终表上相同的列由 $T^* = S^* T$ 得出 S^* ,由 $t^* = t + y^* T$ 得出 y^* 。如果 M 被引进初始的第 0 行作为人工变量的系数,那么方程 $t^* = t + y^* T$ 中的 t 在基变量的非 0 系数被代数消去后即为基础表中的第 0 行(还可选择,把初始第 0 行用做 t ,但此时这些 M 必须从最终第 0 行中减去以得到 y^*)(见练习题 5.3-9)。

应用

基础的审视在线性规划中有许多重要的应用。其中之一涉及改进单纯形法。这个方法主要基于 5.2 节中讲述的单纯形法的矩阵形式。如前一节所述(见表 5.8),这个方法利用 B^{-1} 和初始表对每一步迭代来计算当前表上的所有相关数据。利用 B^{-1} 通过公式 $y^* = c_B B^{-1}$ 来计算 y^* 比基础的审视就更深一层。

另一个应用是用于解释 4.7 节中描述的影子价格 $(y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ 。基础的审视表明 Z^* (Z 的最优值)为

$$Z^* = y^* b = \sum_{i=1}^m y_i^* b_i$$

所以,例如对于 Wyndor Glass 公司问题,就有

$$Z^* = 0b_1 + \frac{3}{2}b_2 + b_3$$

这个方程立刻给出了对于 4.7 节中给出的 y_i^* 值的解释。

另一组极其重要的应用是围绕许多优化后任务(再优化技术、敏感度分析、参数的线性规划,见 4.7 节),其研究对初始模型做一个或多个变化造成的影响。特别地,假设已经对初始模型应用单纯形法得到了一个最优解(即 y^* 和 S^*),然后做上述的这些改变。如果相同的代数运算过程严格应用于修改的初始表,最终表上的结果会有什么改变呢? 因为 y^* 和 S^* 没有改变,根据基础的审视马上就得出答案。

优化后分析的一般内容包括对 b 的可能变化情况。参数 b 通常代表线性规划模型进行决策时需考虑的各项活动可用的资源数。所以用单纯形法求得最优解后,管理者需要研究当有关资源分配的决策发生变化时将带来的后果。应用公式

$$x_B = S^* b$$

$$Z^* = y^* b$$

你可以确切知道最优的 BF 解如何变化(或因负的变量变为非可行时)以及作为 b 的函数的目标函数的最优值如何变化。你不需要对每一个新的 b 一次次地重复应用单纯形法,因为松弛变量的系数已告知了一切!

例如,考虑把 $b_2 = 12$ 变为 $b_2 = 13$,如表 4.8 中 Wyndor Glass 公司问题所示。没有必要解出新最优解 $(x_1, x_2) = (\frac{5}{3}, \frac{13}{2})$,因为最终表中基变量(b^*)的值会立即由基础的审视显示出来

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = b^* = S^* b = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 13 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

有一个更简单的方法进行这些计算。因为唯一的改变在 b 的第二分量($\Delta b_2 = 1$),它只被第二列的 S^* 左乘, b^* 的变化可以简单计算为:

$$\Delta b^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \Delta b_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

所以最终表上基变量的初始值($x_3 = 2, x_2 = 6, x_1 = 2$)现在变为

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(如果这些新值中的任何一个为负值,则不可行,那么可以应用 4.7 节中的重新优化技术,从这个新最终表开始。)对于前述的方程应用增量分析法解 Z^* 同样可以立即得到

$$\Delta Z^* = \frac{3}{2} \Delta b_2 = \frac{3}{2}$$

基础的审视能够以类似的方式应用于研究模型原型其他形式的变化;这也是第 6 章后面部分介绍的敏感度分析步骤的一个关键。

你还会在下一章看到基础的审视对线性规划的对偶理论所起的关键作用。



5.4 改进单纯形法

改进单纯形法直接建立在 5.2 节讲述的单纯形法矩阵式的基础上,但该节未提到其区别在于改进单纯形法采用了一个对矩阵形式的重要改进。改进单纯形法并不是每次迭

代后都对新的基矩阵的求逆(这对大型矩阵计算特别昂贵),而是利用了一个非常有效的算法在每次迭代后将 B^{-1} 转换为新的。本节我们将集中描述和解释这个算法。

这个算法基于单纯形法的两个性质。一个是 5.3 节一开始在表 5.8 中提供的审视,特别是在每次迭代后,新单纯形表中松弛变量除第 0 行以外的所有系数变为 B^{-1} ,其中 B 是新表中的基矩阵。只要求解的是 3.2 节中给出的线性规划模型的标准形式,上述性质始终成立。(对需要引入人工变量的非标准形式,唯一的区别是只要引入合适的有序的列,在初始单纯形表第 0 行下面形成一个单位矩阵,然后在随后表中就会提供 B^{-1} 。)

单纯形法的另一有关性质是,在用高斯消元法执行初等代数运算(例如一个方程除以一个常数或从一个方程中减去某个方程乘上一个常数),迭代的第 3 步改变单纯形表包括 B^{-1} 的数字。所以在每次迭代后需要从原有的 B^{-1} (用 $B_{\text{旧}}^{-1}$ 标记)更新获得新的 B^{-1} (用 $B_{\text{新}}^{-1}$ 标记),需要用单纯形法通常进行的代数运算对整个方程组(除了第(0)行)实施。由此在迭代的第 1、2 步给出入基变量和出基变量的选择后,这个算法应用迭代的第 3 步(见 4.3 节和 4.4 节的讲述)得到新的单纯形表或方程组的 B^{-1} 部分。

为了正式地阐述这种方法,令

x_k = 入基变量,

a'_{ik} = 当前方程(i)中 x_k 的系数, $i=1,2,\dots,m$ (在迭代的步骤 2 中计算),

r = 包含出基变量的方程的个数。

我们回顾一下,新的方程组[不包括方程(0)]可以由前述的从第(i)个方程中减去第(r)个方程的 a'_{ik}/a'_{rk} 倍得到, $i=1,2,\dots,m, i \neq r$, 然后用方程(r)除以 a'_{rk} 。这样, $B_{\text{新}}^{-1}$ 的 i 行 j 列的元素为

$$(B_{\text{新}}^{-1})_{ij} = \begin{cases} (B_{\text{旧}}^{-1})_{ij} - \frac{a'_{ik}}{a'_{rk}} (B_{\text{旧}}^{-1})_{rj} & \text{当 } i \neq r \\ \frac{1}{a'_{rk}} (B_{\text{旧}}^{-1})_{rj} & \text{当 } i = r \end{cases}$$

这些公式用矩阵符号表示为: $B_{\text{新}}^{-1} = EB_{\text{旧}}^{-1}$ 。

这里矩阵 E 为单位矩阵,除非它的第 r 个列向量被替换为

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_m \end{bmatrix}, \quad \text{这里 } \eta_i = \begin{cases} -\frac{a'_{ik}}{a'_{rk}} & \text{当 } i \neq r \\ \frac{1}{a'_{rk}} & \text{当 } i = r \end{cases}$$

因此, $E = [U_1, U_2, \dots, U_{r-1}, \eta, U_{r+1}, \dots, U_m]$, 其中每个 U_i 列向量的 m 元素都是 0, 只有第 i 个除外, 为 1。

例 我们将通过 Wyndor Glass 公司问题中的应用来解释这个算法。对这同一问题在 5.2 节中已应用了单纯形法的矩阵形式, 所以我们可以参考该节中每次迭代的结果(入基变量、出基变量等), 将这些信息应用于现在的算法。

迭代 1

在 5.2 节中找到初始的 $B^{-1} = I$, 入基变量是 x_2 (即 $k=2$)。在方程 1, 2, 3 中 x_2 的系数为 $a_{12}=0, a_{22}=2$ 和 $a_{32}=2$, 出基变量为 x_4 , 含有 x_4 方程的数字为 $r=2$ 。为得到新的 B^{-1}

$$\eta = \begin{bmatrix} -\frac{a_{12}}{a_{22}} \\ \frac{1}{a_{22}} \\ -\frac{a_{32}}{a_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

所以

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

迭代 2

从 5.2 节可知第 2 次迭代的入基变量为 x_1 (即 $k=1$), 在目前的方程 1, 2, 3 中, x_1 的系数为 $a'_{11}=1, a'_{21}=0, a'_{31}=3$, 所以出基变量为 x_5 。包含 x_5 方程的数字为 $r=3$ 。由此结果得

$$\eta = \begin{bmatrix} -\frac{a'_{11}}{a'_{31}} \\ -\frac{a'_{21}}{a'_{31}} \\ \frac{1}{a'_{31}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

由此, 新的 \mathbf{B}^{-1} 为

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

至此已不需要进行更多迭代, 故本例结束。

因为改进单纯形法包含每次迭代用于更新 \mathbf{B}^{-1} 的算法与 5.2 节中单纯形法矩阵形式的其他部分, 将上例与 5.2 节中应用于相同例子的矩阵形式结合, 提供了应用改进单纯形法的完整的例子。正如 5.2 节结尾处提到的, 本书网站的工作例子提供了应用改进单纯形法的另一例子。

我们通过概述改进单纯形法相对单纯形法代数和表格形式的优点来结束本节。其优点之一是算法的计算量将得到减少。当一个矩阵中含有大量零元素时(这在规模大的实际问题中经常出现)特别明显。在每次迭代中需要储存的信息总量较少, 有时是相当程度的减少。改进单纯形法同样允许计算中产生不可避免的舍入误差, 这可以通过周期性地直接对 \mathbf{B} 求逆来控制。还有 4.7 节和 5.3 节末尾讨论的优化后分析, 应用改进单纯形法时将更便于掌握。基于上述理由, 改进单纯形法在计算机操作中通常作为优先选择的形式。



5.5 结论

尽管单纯形法是一个代数过程,它基于一些十分简单的几何概念。这些概念可以使你在达到和确认最优解之前利用算法检验数量相对较少的 BF 解。

第4章描述了初等的代数运算被运用于进行单纯形法的代数形式,进而说明单纯形法的表格形式如何以相同方式使用等价的初等行运算。学习这些形式的单纯形法是开始学习单纯形法的基本概念的一个好方法。然而,这些形式的单纯形法没有提供在计算机上运行的最有效形式。矩阵方法是结合和执行初等代数运算或行变换的一种更快的方法。因此,利用单纯形法的矩阵形式,改进单纯形法提供了一种适合计算机执行单纯形法的有效方法。这种改进是通过将单纯形法同一种有效的计算的组合,将现有基矩阵的逆随迭代过程一步步更新。

最终单纯形表包含了如何能够直接从初始单纯形表进行代数重建的全部信息。这个基础的审视有很重要的应用,尤其是对于优化后分析。

参考文献

1. Dantzig, G. B., and M. N. Thapa: *Linear Programming 1: Introduction*, Springer, New York, 1997.
2. Dantzig, G. B., and M. N. Thapa: *Linear Programming 2: Theory and Extensions*, Springer, New York, 2003.
3. Luenberger, D., and Y. Ye: *Linear and Nonlinear Programming*, 3rd ed., Springer, New York, 2008.
4. Vanderbei, R. J.: *Linear Programming: Foundations and Extensions*, 3rd ed., Springer, New York, 2008.

习题

某些习题(或其中一部分)左端的符号意义如下:

D: 上面列出的演示的例子可能会有帮助。

I: 你可以应用上面列出的程序检查你的作业。

习题上有一个星号表示书后至少给出该题一部分答案。

5.1-1* 考虑下面的问题:

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s. t. } 2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$\text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

I(a) 用图解法解这个问题,在图上圈出 CPF 解。

(b) 找出这个问题包含两个定义方程的所有集合,对于每个集合,解出相应的角点解(如果解存在),并对它们进行分类,是 CPF 解还是角点非可行解。

(c) 引入松弛变量以便写出扩展形式的函数约束。利用这些松弛变量,对于(b)中找

到的每个角点解识别基本解。

- (d) 对于(b)每一个含两个定义方程的集合做以下工作：对每个定义方程确定指示变量；删除这两个指示(非基)变量后,表示(c)中的方程组；然后用后面的方程组解出剩下的两个变量(基变量)；把最终的基本解同(c)部分相应的基本解相比较。
- (e) 不执行单纯形法,利用它的几何解释(和目标函数)来确定到达最优解的路径(CPF 解的顺序)；依次对每一个 CPF 解确定下一步迭代的决策：(i)哪个定义方程要删掉,哪个要添加上；(ii)哪一个指示变量被删除了(从入基变量中),哪一个被添加进去了(从出基变量中)。

5.1-2 对于习题 3.1-6 重复习题 5.1-1。

5.1-3 考虑下面的问题：

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 5x_1 + 8x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 4x_1 + 2x_2 \leq 80 \\ & -3x_1 + x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ & 4x_1 - x_2 \leq 40 \end{aligned}$$

$$\text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

I(a) 用图解法解这个问题,在图上圈出 CPF 解。

(b) 列表标出每一个 CPF 解和相应的定义方程,基本可行解和非基变量。计算每一个解的 Z 值,就利用这些信息找出最优解。

(c) 为每一个角点非可行解等列出相应的表。同样确定不能得到解的定义方程和非基变量。

5.1-4 考虑下面的问题：

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 2x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{s. t.} \quad & 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 60 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \leq 20 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

在引入松弛变量并进行单纯形法的一次迭代后,得到下面的单纯形表：

迭代	基变量	方程	系数						右端项	
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		x_6
1	Z	(0)	1	0	-1	3	0	2	0	20
	x_4	(1)	0	0	4	-5	1	-3	0	30
	x_1	(2)	0	1	-1	2	0	1	0	10
	x_6	(3)	0	0	2	-3	0	-1	1	10

(a) 确定迭代 1 中的 CPF 解。

(b) 确定定义这个 CPF 解的约束边界方程。

5.1-5 考虑表 5.2 中所示的有三个变量的线性规划问题。

(a) 构造一个如表 5.1 所示的表, 给出每一个 CPF 解的定义方程组。

(b) 哪一个是角点非可行解(6,0,5)的定义方程?

(c) 确定三个约束边界方程组中的一个, 它既没有得出 CPF 解, 又没有得出角点可行解。解释该方程组为什么会发生这种情况。

5.1-6 考虑下面的问题:

$$\max Z = 8x_1 + 5x_2$$

$$\text{s. t. } -3x_1 + 2x_2 \leq 30$$

$$2x_1 + x_2 \geq 50$$

$$x_1 + x_2 \geq 30$$

$$\text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

(a) 识别这个问题的 10 组定义方程。对于每一组, 解出(如果解存在)相应的角点解, 并判断是 CPF 解还是角点非可行解。

(b) 对每一个角点解, 给出相应的基本解和这一组的非基变量。

5.1-7 重新考虑习题 3.1-5 中给出的模型。

(a) 确定这个问题的 15 组定义方程, 对每一组, 解出(如果解存在)相应的角点解, 并判断是 CPF 解还是角点可行解。

(b) 对每一个角点解, 给出相应的基本解和这一组的非基变量。

5.1-8 在大部分情况下, 下面每一个表述都是正确的, 但不总正确。对每一种情况, 说明表述何时不正确, 为什么。

(a) 最好的 CPF 解是一个最优解。

(b) 一个最优解就是一个 CPF 解。

(c) 如果它的相邻 CPF 解没有更好的(用目标函数值来测量), 该 CPF 解是唯一的最优解。

5.1-9 考虑有 n 个决策变量(每个都有一个非负约束)和 m 个函数约束的线性规划原形式(扩展之前)的线性规划问题。指出下面每一个陈述的正误, 然后用本章提供的特定材料(包括引用的材料)证明你的答案。

(a) 如果一个可行解是最优解, 那它一定是 CPF 解。

(b) CPF 解的个数至少为 $\frac{(m+n)!}{m! n!}$ 。

(c) 如果一个 CPF 解有更好的相邻 CPF 解(以 Z 值衡量), 那么这些相邻最优解之一必为最优解。

5.1-10 判断下面关于线性规划问题表述的对错, 然后证明你的答案。

(a) 如果一个可行解是最优解但不是 CPF 解, 那么存在无穷多个最优解。

(b) 如果目标函数的值在两个不同的可行点 x^* 、 x^{**} 上相等, 那么连接 x^* 和 x^{**} 的线

段上所有的点都是可行的,且这些点上的 z 值都相等。

(c) 如果问题含有 n 个变量(扩展前),那么任何 n 个约束边界方程的公共解都是 CPF 解。

5.1-11 考虑一个线性规划问题的扩展形式,该问题具有可行解和有界的可行域。判断下列陈述的对错,然后用本章提供的特定材料(包括引用的材料)证明你的答案。

(a) 至少有一个最优解。

(b) 存在一个最优解必为基本可行解。

(c) 基本可行解的个数是有限的。

5.1-12* 再次考虑习题 4.6-9 的模型,现在已知最优解中基变量为 x_2 和 x_3 ,利用已知条件来确定有三个约束边界方程的方程组,其公共解必为最优解。然后解这个方程组得出这个解。

5.1-13 再次考虑习题 4.3-6。现在不用单纯形法而利用所给的已知条件和单纯形法理论确定有三个约束边界方程(含 x_1, x_2, x_3)的方程组(其公共解必为最优解)。解这个方程组寻找最优解。

5.1-14 考虑下面的问题:

$$\max Z = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$\text{s. t. } 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$$

$$\text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

令 x_4, x_5 为各自函数约束的松弛变量,令这两个变量为初始基本可行解的基变量,已知由单纯形法经过两步迭代得到最优解,其过程如下:(1)迭代 1,入基变量为 x_3 ,出基变量为 x_4 ;(2)迭代 2,入基变量为 x_2 ,出基变量为 x_5 。

(a) 对这个问题的可行域画一个三维的图,标出单纯形法迭代的路径。

(b) 给出为什么单纯形法沿这条路径进行迭代的几何解释。

(c) 对于单纯形法经过的可行域两条边中的每一个,写出每个约束边所在的方程,然后给出每一个端点上要增加的约束边界方程。

(d) 对由单纯形法得到的三个 CPF 解的每一个(包括初始的 CPF 解),确定定义方程组,并利用定义方程组解出这三个解。

(e) 对于每个由(d)得到的 CPF 解,给出相应的 BF 解和它的非基变量的组,并解释如何由这些非基变量来确定由(d)得到的定义方程。

5.1-15 考虑下面的问题:

$$\max Z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3$$

$$\text{s. t. } x_1 + x_2 + x_3 \leq 20$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 30$$

$$\text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

令 x_4, x_5 为各自函数约束的松弛变量, 令这两个变量为初始基本可行解的基变量, 已知由单纯形法经过两步迭代得到最优解, 其过程如下: (1) 迭代 1, 入基变量为 x_2 , 出基变量为 x_5 ; (2) 迭代 2, 入基变量为 x_1 , 出基变量为 x_4 。

对这种情况按 5.1-14 中的说明回答。

5.1-16 通过观察图 5.2, 解释当目标函数如下时, 为什么这个问题 CPF 解有 1(b) 性质。

(a) $\max Z = x_3$

(b) $\max Z = -x_1 + 2x_3$

5.1-17 考虑如图 5.2 所示的三个变量的线性规划问题。

(a) 用几何方法解释为什么满足任何个别约束的解集为凸集, 如附录 2 中的定义。

(b) 利用(a)的结论解释为什么整个可行域(同时满足所有约束的公共解集)为凸集。

5.1-18 假设如图 5.2 所示的三个变量的线性规划问题有目标函数

$$\max Z = 3x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

不用单纯形法的代数运算, 只应用它的几何意义(包括选择使 Z 有最大增加率的边界), 来确定并解释它所沿循的图 5.2 中从初始解到最优解的路径。

5.1-19 考虑如图 5.2 所示的有三个变量的线性规划问题。

(a) 构建类似表 5.4 的表, 给出每一个约束边界方程和初始约束的指示变量。

(b) 对于 CPF 解 $(2, 4, 3)$ 和它的三个相邻 CPF 解 $(4, 2, 4)$ 、 $(0, 4, 2)$ 、 $(2, 4, 0)$, 构建如表 5.5 所示的表格, 写出相应的定义方程、基本可行解和非基变量。

(c) 利用(b)中得到的定义方程组证明点 $(4, 2, 4)$ 、点 $(0, 4, 2)$ 和点 $(2, 4, 0)$ 的确与点 $(2, 4, 3)$ 相邻, 但这三个 CPF 解不互为相邻点。然后再利用(b)中得到的该组非基变量证明这一点。

5.1-20 图 5.2 中过点 $(2, 4, 3)$ 和点 $(4, 2, 4)$ 的直线方程为

$$(2, 4, 3) + \alpha[(4, 2, 4) - (2, 4, 3)] = (2, 4, 3) + \alpha(2, -2, 1)$$

当 $0 \leq \alpha \leq 1$ 时, 为这两点之间的线段。在对各自函数约束加入松弛变量 x_4, x_5, x_6, x_7 扩展后, 方程变为

$$(2, 4, 3, 2, 0, 0, 0) + \alpha(2, -2, 1, -2, 2, 0, 0)$$

利用这个公式直接回答下面的问题, 进而给出单纯形法迭代由点 $(2, 4, 3)$ 向点 $(4, 2, 4)$ 移动时的代数和几何解释(已知迭代沿这条线段移动)。

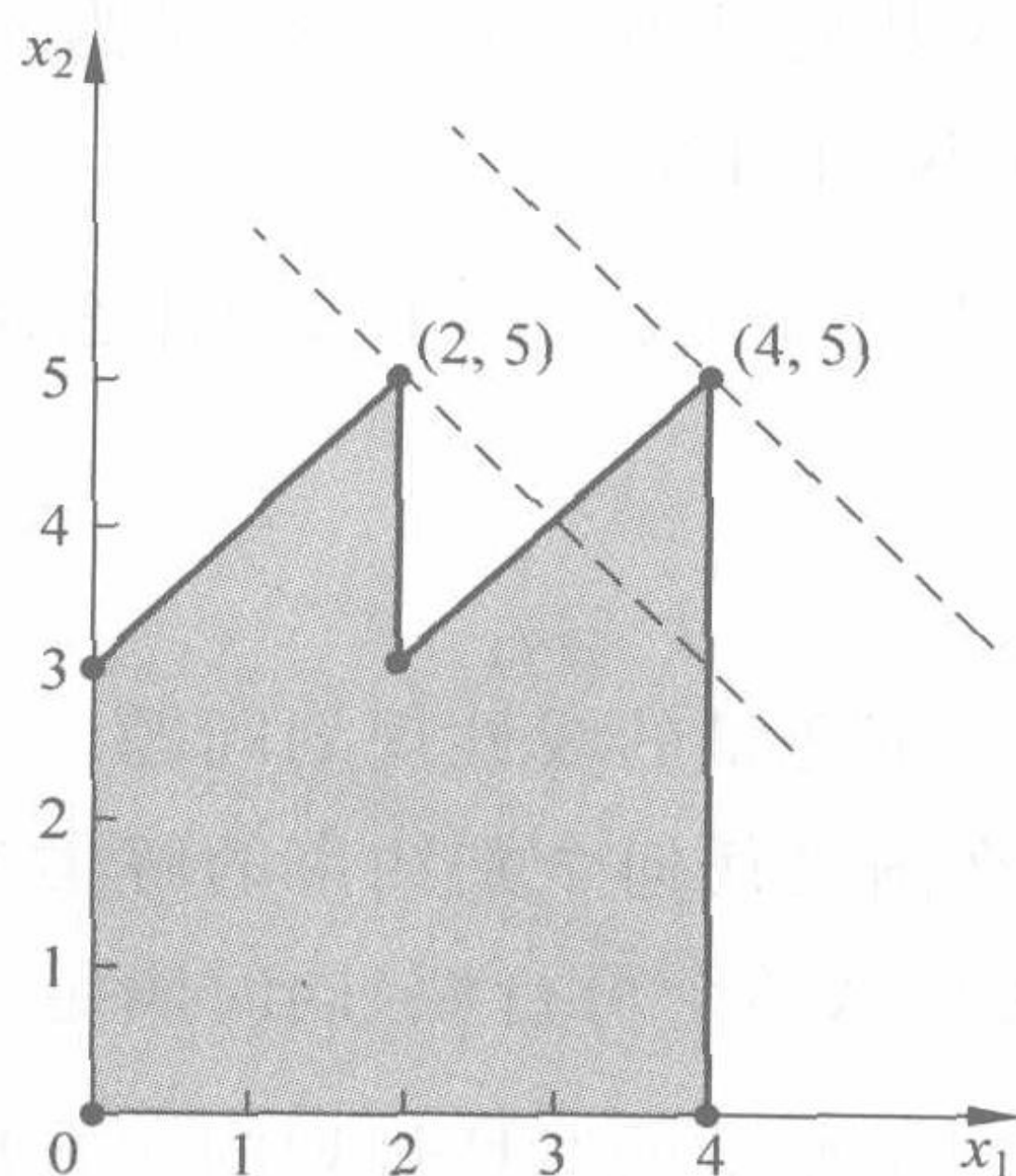
(a) 哪个是入基变量?

(b) 哪个是出基变量?

(c) 新的基本可行解是什么?

5.1-21 考虑有两个变量的数学规划问题, 其可行域如下图所示, 6 个点为 CPF 解。该问

目标函数是线性的,两条虚线是通过最优解(4,5)和次优解(2,5)的目标函数线。注意非最优解(2,5)比它的两个相邻 CPF 解都更优,这违背了 5.1 节的中线性规划的 CPF 解的性质 3。通过构建出这个可行域的边界上的 6 条线段是线性规划约束条件的约束边界,证明该问题不是线性规划问题。



5.2-1 考虑下面的问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 8x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 9x_5 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 180 \text{ (资源 1)} \\ & 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \leq 270 \text{ (资源 2)} \\ & x_1 + 3x_2 + x_4 + 3x_5 \leq 180 \text{ (资源 3)} \\ & \text{且 } x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, 5 \end{aligned}$$

已知最优解中的基变量为 x_3, x_1, x_5 , 且

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 11 & -3 & 1 \\ -6 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 10 \end{bmatrix}$$

- (a) 根据所给条件求出最优解。
(b) 根据所给条件求出三个资源的影子价格。

I 5.2-2* 用改进单纯形法逐步求解下面的问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 5x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 6x_5 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 \leq 20 \\ & 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 4x_5 \leq 30 \\ & \text{且 } x_j \geq 0, \quad j=1, 2, 3, 4, 5 \end{aligned}$$

5.2-3 再考虑问题 5.1-1。按(e)的 CPF 解的顺序,对每个相应的基本可行解构造基矩阵 B 。对每个 B ,手工求逆矩阵,利用 B^{-1} 计算当前解,然后进行下一步迭代(或证明当前解为最优解)。

I 5.2-4 用改进单纯形法逐步解习题 4.1-5 的模型。

I 5.2-5 用改进单纯形法逐步解习题 4.7-6 的模型。

D5.3-1* 考虑下面的问题：

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = x_1 - x_2 + 2x_3 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \leq 3 \\ & x_1 - x_2 + x_3 \leq 2 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

令 x_4, x_5, x_6 为各自约束的松弛变量,应用单纯形法后的最终单纯形表的一部分如下表所示:

基变量	方程	系数						右端项
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Z	(0)	1				1	1	0
x_2	(1)	0				1	3	0
x_6	(2)	0				0	1	1
x_3	(3)	0				1	2	0

(a) 利用 5.3 节中给出的基础的审视计算最终单纯形表中缺少的数字,写出运算过程。

(b) 确定对应最终表上基本可行解的 CPF 解的定义方程。

D5.3-2 考虑下面的问题：

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \\ \text{s. t.} \quad & 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 5 \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 4 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

令 x_5, x_6 为各自约束的松弛变量,应用单纯形法后的最终单纯形表的一部分如下表所示:

基变量	方程	系数						右端项
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Z	(0)	1					1	1
x_2	(1)	0					1	-1
x_4	(2)	0					-1	2

(a) 利用 5.3 节中给出的基础的审视计算最终单纯形表中缺少的数字,写出运算过程。

(b) 确定对应最终表上基本可行解的 CPF 解的定义方程。

D5.3-3 考虑下面的问题：

$$\max \quad Z = 6x_1 + x_2 + 2x_3$$

$$\text{s. t.} \quad 2x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq 2$$

$$-4x_1 - 2x_2 - \frac{3}{2}x_3 \leq 3$$

$$x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq 1$$

$$\text{且} \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

令 x_4, x_5, x_6 为各自约束的松弛变量, 应用单纯形法后的最终单纯形表的一部分如下表所示:

基变量	方程	系数							右端项
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
Z	(0)	1				2	0	2	
x_5	(1)	0				1	1	2	
x_3	(2)	0				-2	0	4	
x_1	(3)	0				1	0	-1	

利用 5.3 节中给出的基础的审视计算最终单纯形表中缺少的数字, 写出运算过程。

D 5.3-4 考虑下面的问题:

$$\max \quad Z = 20x_1 + 6x_2 + 8x_3$$

$$\text{s. t.} \quad 8x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 200$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 100$$

$$2x_1 + x_3 \leq 50$$

$$x_3 \leq 20$$

$$\text{且} \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

令 x_4, x_5, x_6 和 x_7 分别为第一到第四个约束的松弛变量。假设经单纯形法的几步迭代之后, 当前单纯形表的一部分如下所示:

基变量	方程	系数								右端项
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
Z	(0)	1				$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	
x_1	(1)	0				$\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{8}$	0	0	
x_2	(2)	0				$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	
x_6	(3)	0				$-\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	1	0	
x_7	(4)	0				0	0	0	1	

(a) 利用 5.3 节中给出的基础的审视计算最终单纯形表中缺少的数字, 写出运算过程。

(b) 指出为进行下一步迭代, 缺少的哪一个数字会由改进单纯形法产生。

(c) 确定对应当前表中基本可行解的 CPF 解的定义方程。

D 5.3-5 考虑下面的问题:

$$\max Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3$$

$$\text{s. t. } x_1 + 2x_2 + x_3 \leq b$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 2b$$

$$\text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

注意目标函数中系数(c_1, c_2, c_3)的值并没有给出,约束函数中右端项唯一的特别处是第二个右端项($2b$)为第一个(b)的 2 倍。

现在假设你的老板插入了她对 c_1, c_2, c_3 和 b 的最优估计值,但并没有告诉你,然后运用单纯形方法。给你如下所示的最终单纯形表(这里 x_4, x_5 为各自约束函数的松弛变量),但你不知道 Z^* 的值。

基变量	方程	系数						右端项
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Z	(0)	1	$\frac{7}{10}$	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	Z^*
x_2	(1)	0	$\frac{1}{5}$	1	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1
x_3	(2)	0	$\frac{3}{5}$	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	3

(a) 利用 5.3 节中的基础的审视解出用到的(c_1, c_2, c_3)的值。

(b) 利用 5.3 节中的基础的审视解出用到的 b 的值。

(c) 用两种方法计算出 Z^* 的值,一种利用你从(a)中得到的结果,另一种利用你从(b)中得到的结果。写出运算步骤。

5.3-6 对于 5.3 节例子的迭代 2 给出下面的表达式:

最终第 0 行 =

$$[-3, -5 | 0, 0, 0 | 0] + \left[0, \frac{3}{2}, 1\right] \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & | & 4 \\ 0 & 2 & | & 0 & 1 & 0 & | & 12 \\ 3 & 2 & | & 0 & 0 & 1 & | & 18 \end{bmatrix}$$

结合代数运算(用矩阵形式),从第 0 行的迭代 1 和迭代 2 导出这个式子。

5.3-7 5.3 节中对基础的审视的大部分描述都假设问题为标准形式。现在考虑下面每一种其他形式,其中初始化步骤中另外的调整都已经在 4.6 节中给出,包括适当地应用人工变量和大 M 法的。写出在基础的审视下的调整结果。

(a) 等式约束。

(b) 函数约束为“ \geq ”形式。

(c) 负的右端项。

(d) 变量值允许为负(无下界)。

5.3-8 再次考虑习题 4.6-5 的模型。利用人工变量和大 M 法建立完整的初始单纯形表,然后找出约束 S^* 的列,这里 S^* 在最终表上的基础的审视中应用,并解释为什么是这些列。

5.3-9 考虑下面的问题:

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

$$\text{s. t. } x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 6$$

$$\text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

令 x_4, x_6 分别为第一、第二个方程的剩余变量,令 \bar{x}_5, \bar{x}_7 为相应的人工变量。利用大 M 法对这个模型进行 4.6 节中的调整后,初始单纯形表就可以应用单纯形法,如下:

基变量	方程	系数								右端项
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	\bar{x}_5	x_6	\bar{x}_7	
Z	(0)	-1	$-4M+2$	$-6M+3$	$-2M+2$	M	0	M	0	$-14M$
\bar{x}_5	(1)	0	1	4	2	-1	1	0	0	8
\bar{x}_7	(2)	0	3	2	0	0	0	-1	1	6

应用单纯形法后的部分最终表如下所示:

基变量	方程	系数								右端项
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	\bar{x}_5	x_6	\bar{x}_7	
Z	(0)	-1					$M-0.5$		$M-0.5$	
x_2	(1)	0					0.3		-0.1	
x_1	(2)	0					-0.2		0.4	

- (a) 根据上面的表格,利用 5.3 节中给出的基础的审视计算最终单纯形表中缺少的数字,写出运算过程。
- (b) 研究 5.3 节的数学推理,证实基础的审视(见方程 $T^* = MT$ 和 $t^* = t + vT$ 及后来 M 和 v 的推导)。这个推理假设初始模型符合我们的标准形式,而当前问题不是标准形式。当 t 为上面初始单纯形表的第 0 行, T 为第 1,2 行时,试用最小的调整使同样推理能应用于当前问题。对这个问题推导 M 和 v 。
- (c) 当应用方程 $t^* = t + vT$ 时,另一个选择是利用 $t = [2, 3, 2, 0, M, 0, M, 0]$,即为对初始基变量 \bar{x}_5, \bar{x}_7 的非 0 系数进行代数消元前的初始第 0 行。用新 t 对这个方程重复(b)。得出新 v 以后,说明该方程所得到的最终第 0 行与在(b)中得到的结果是相同的。
- (d) 确定最终表中对应于最优 BF 解的 CPF 解的定义方程。

5.3-10 考虑下面的问题:

$$\max Z = 3x_1 + 7x_2 + 2x_3$$

$$\text{s. t. } -2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$$

$$3x_1 + x_2 - x_3 \leq 20$$

$$\text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

已知最优解中的基变量为 x_1 和 x_3 。

(a) 引入松弛变量, 并利用所给信息直接应用高斯消元法找到最优解。

(b) 继续(a)的工作以找出影子价格。

(c) 利用所给信息确定最优 CPF 解的定义方程, 并为这些方程找到最优解。

(d) 对最优 BF 解构建基矩阵 B , 手工求 B 的逆阵, 然后利用 B^{-1} 解出最优解和影子价格 y^* , 再应用改进单纯形法的最优性检验来证明这个解是最优解。

(e) 由(d)的 B^{-1} 和 y^* , 利用 5.3 节的基础的审视建立完整的最终单纯形表。

5.4-1 考虑习题 5.2-2 中给出的模型, 令 x_6 和 x_7 分别是前两个约束的松弛变量。已知 x_2 是入基变量, x_7 是出基变量(单纯形法第一次迭代中), 在第二次(最后)的迭代中, x_4 是入基变量, x_6 是出基变量。运用 5.4 节讲述更新 B^{-1} 的过程, 找出第一次和第二次迭代后的新的 B^{-1} 。

I 5.4-2* 用改进单纯形法一步一步求解习题 4.3-4 中给出的模型。

I 5.4-3 用改进单纯形法一步一步求解习题 4.7-5 中给出的模型。

I 5.4-4 用改进单纯形法一步一步求解习题 3.1-6 中给出的模型。

对偶理论与灵敏度分析

在线性规划早期发展阶段的众多重要发现当中,对偶的概念及其分支是其中最重要的内容之一。这个发现揭示出,对于任何一个线性规划问题都具有对应的被称为对偶(dual)问题的线性规划问题。对偶问题与原问题(primal)之间的关系在众多领域中都非常有用。例如,我们很快可以看到在 4.7 节中所描述的影子价格问题实际上就是通过获得对偶问题的最优解来获得的。同样,本章我们还将提出许多对偶理论的重要应用。

对偶理论的一个关键应用是对灵敏度分析的解释。就像我们在 2.3 节、3.3 节和 4.7 节中提到的那样,灵敏度分析在所有线性规划问题研究当中都是重要的组成部分。因为在原模型中,大部分变量的值都是对未来条件的估计。如果条件发生了变化,那么就需要重新研究条件变化对最优解有什么影响。而且,特定参数(比如资源的数量)可能代表了管理决策。在这样的问题中,参数值的选择可能是研究中最重要的问题,而这个问题可以通过灵敏度分析来解决。

为了更加清晰地阐述,在前三节假设我们所研究的对偶问题对应的原问题采用的是标准形式(但并没有限定 b_i 的值必须是正的)。对应其他形式的原问题将在 6.4 节进行讨论。我们在本章开始将讨论对偶的基本理论及应用。之后,我们将对对偶问题进行经济上的解释(6.2 节)并深入研究对偶问题与原问题之间的关系(6.3 节)。6.5 节集中讨论对偶问题在灵敏度分析中所起的作用。灵敏度分析的基本过程(以 5.3 节为基础)将在 6.6 节进行概要的介绍,在 6.7 节进行详细的讲述。在 6.8 节,我们将集中讨论如何应用电子表格进行灵敏度分析。假如你没有更多时间用于本章学习,可以只阅读 6.8 节,对灵敏度分析有一个大致的了解。



6.1 对偶理论的实质

下边的左侧给出了原问题的标准形式(可能是从另一种形式转换过来的)。这个原问题的对偶问题在右侧给出。

原问题	对偶问题
$\begin{aligned} \max \quad & Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$	$\begin{aligned} \min \quad & W = \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & y_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$

因此,当原问题是求最大值形式的时候,这个原问题的对偶问题是求最小值形式。而且,对偶问题与原问题使用相同的变量,但是,位置并不相同,总结如下:

1. 原问题目标函数系数是对偶问题约束方程的约束右端项。
2. 原问题约束方程的约束右端项是对偶问题目标函数的系数。
3. 原问题一个变量在所有约束方程中的系数是对偶问题一个约束方程中的全部系数。

为了加强比较,看一下这两个问题的矩阵形式(就像我们在 5.2 节开始时介绍的那样),其中 c 和 $y = [y_1, y_2, \dots, y_m]$ 都是行向量,但是 b 和 x 全部是列向量。

原问题	对偶问题
$\begin{aligned} \max \quad & Z = cx \\ \text{s. t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \min \quad & W = yb \\ \text{s. t.} \quad & yA \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$

为了进一步说明对偶问题,3.1 节中的 Wyndor Glass 公司例子的原问题与对偶问题在表 6.1 中给出了代数形式和矩阵形式的表示。

这个对于线性规划问题的原问题——对偶问题表(primal-dual table),见表 6.2,同样可以帮助我们理解两个问题之间的对应关系。它展示了线性规划问题中所有的变量(a_{ij} , b_i 和 c_j)以及它们是怎样来构造这两个问题的。所有原问题的标题都是水平的,而对于对偶问题的标题,则需要把书旋转一下。对于原问题,每一列(除了右端项列)给出了不同的约束方程同一个变量的系数,之后是目标函数的系数,而每一行(除了最下边一行)给出了对于同一个约束方程的参数。对于对偶问题,每一行(除了右端项)给出了全部约束方程中对于同一个变量的系数,然后是目标函数的系数,而每一列(除了最右边的)给出了同一个约束方程的参数。另外,右端项列给出了原问题的约束右端项和对偶问题的目标函数系数,而最下边一行给出了原问题的目标函数系数和对偶问题的约束右端项。

表 6.1 Wyndor Glass 公司例子的原问题与对偶问题

原问题的代数形式	对偶问题的代数形式
$\begin{aligned} \max \quad & Z = 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 \leq 4 \\ & 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \min \quad & W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3 \\ \text{s. t.} \quad & y_1 + 3y_3 \geq 3 \\ & 2y_2 + 2y_3 \geq 5 \\ & y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0 \end{aligned}$

续表

原问题的矩阵形式	对偶问题的矩阵形式
$\max Z = [3, 5] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\text{s. t. } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\min W = [y_1, y_2, y_3] \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$ $\text{s. t. } [y_1, y_2, y_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \geq [3, 5]$ $[y_1, y_2, y_3] \geq [0, 0, 0]$

表 6.2 由 Wyndor Glass 公司例子得出的原问题—对偶问题的线性规划表

(a) 一般例子

		原问题					右端项	目标函数系数 (最小值)
		系 数						
		x_1	x_2	...	x_n			
对偶问题	系 数	y_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	$\leq b_1$	
		y_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	$\leq b_2$	
		\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
	y_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	$\leq b_m$		
	右端项		V_1	V_2	...	V_n		
			c_1	c_2	...	c_n		
			目标函数系数 (最大值)					

(b) Wyndor Glass 公司的例子

	x_1	x_2	
y_1	1	0	≤ 4
y_2	0	2	≤ 12
y_3	3	2	≤ 18
	V_1	V_2	
	3	5	

因此,我们现在可以得到原问题与对偶问题的一般关系,描述如下:

1. 任何一个问题的约束方程中的参数都是另一个问题当中变量的系数。
2. 任何一个问题的目标函数的系数都是另一个问题当中的约束右端项。

因此,在这两个问题当中的各个数据之间都有着直接的对应关系。在表 6.3 中给出了总结。这些直接的对应关系在对包含灵敏度分析在内的对偶理论的许多应用当中都起着重要的作用。

对偶问题的起源

对偶理论是在 5.3 节介绍的单纯形表分析的基础上建立的 (尤其是第 0 行)。为了探穷原因,我们继续使用 5.10 节最终单纯形表中第 0 行的符号,只是将最终表中的 Z^* 替换成 W^* ,同时提及其他单纯形表时将 z^* 和 y^* 的星号去掉。因此,在对于原问题使用单纯形法的每一次迭代过程中,第 0 行的当前数据都会在表 6.4 中被表示出来。对于变量 x_1, x_2, \dots, x_n 的系数,由前面的内容可知,用 $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ 表示一个向量,单纯形法在达到当前单纯形表的过程中,通过减去初始单纯形表中的系数 $-c$ 来得到这个向量 (不要将向量 z 与目标函数的 Z 弄混淆了)。类似的,由于初始单纯形表中第 0 行的变量 $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ 的系数全都是 0, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ 代表一个向量,单纯形法需要将这个向量加到这些系数上。同时通过观察,我们可以得出原模型中数量与参数之间的如下关系 (参见 5.3 节的“数学摘要”):

$$W = yb = \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

$$z = yA, \quad \text{所以} \quad z_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \quad j = 1, 2, \dots, n$$

表 6.3 原问题与对偶问题实体之间的联系

一个问题		另一个问题
约束 i	←	变量 i
目标函数	←	约束右端项

表 6.4 单纯形表中第 0 行的符号

迭代	基变量	Eq.	系 数								右端项	
			Z	x_1	x_2	...	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	...		x_{n+m}
任意	Z	(0)	1	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$...	$z_n - c_n$	y_1	y_2	...	y_m	W

为了说明 Wyndor Glass 公司的例子,第一个方程给出 $W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$,这个方程就是表 6.1 中右边方框内对偶问题的目标函数。第二个方程组给出 $z_1 = y_1 + 3y_3$ 和 $z_2 = 2y_2 + 2y_3$,这组方程就是表 6.1 中对偶问题的约束方程的左端。因此,通过减去这些大于等于关系的约束方程的右端 ($c_1 = 3$ 和 $c_2 = 5$), $(z_1 - c_1)$ 和 $(z_2 - c_2)$ 就可以被解释为约束方程的剩余变量。

接下来的关键是,单纯形法试图利用这些符号去实现什么 (依照最优性检验); 它通过寻找一组基变量和相应的基可行解,使得第 0 行的全部系数都为非负。这时的解便是最优解,则停止迭代。通过使用表 6.4 中的符号,这一目标可以解释如下:

最优解的条件:

$$z_j - c_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$y_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

当我们替代了前边对于 z_j 的解释后,最优解的条件说明,单纯形法可以被解释成这

样一种方法,即寻找下面方框内的一组 y_1, y_2, \dots, y_m 的值使得

$$\begin{array}{l} W = \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{s. t. } \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad j = 1, 2, \dots, n \\ y_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \end{array}$$

但是,方框中的内容,除了没有关于 W 要达到的目标外,其余的部分正好是一个对偶问题。为了完成这个方框内的模型,让我们来探讨一下,缺少的这个目标应该是什么形式。

因为 W 就是 Z 的当前值,而且由于原问题中的目标是求 Z 的最大值。因此,我们的第一反应就是 W 也应该是求最大值。但是,由于如下几个原因,可以说明 W 也是求最大值这一结论是不正确的:这个新问题的可行解只能是那些原问题所有可行解中满足最优解条件的。因此,只有原问题当中的最优解才能是新问题的可行解。所以我们可以得出,原问题中 Z 的最优值是新问题中 W 的可能值里最小的,所以 W 是最小的(关于这一问题的完整证明,我们将在 6.3 节给出)。将这个目标添加到上边方框内的模型中,我们就得到了对偶问题的完整形式。

从而,对偶问题可以被视为线性规划问题中对单纯形法目标的重新解释,也就是为原问题找到一个解,这个解要满足最优检验。在达到这个原问题最优解之前,当前单纯形表中第 0 行相应的 y (松弛变量的系数)必须是对偶问题的非可行解。但是,达到这个原问题最优解之后,相应的 y 必须是对偶问题的最优解(用 y^* 标记)。因为它是一个可行解,而这个可行解同时又是 W 的最小可能值。这个最优解 $(y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ 就是 4.7 节介绍的原问题中资源的影子价格。而且,最优解 W 也是最优解 Z 的值,也就是说,两个问题最优解的值是相等的。同时也说明,对于原问题的可行解 x 与对偶问题的可行解 y ,永远存在 $cx \leq yb$ 。

为了更清楚地解释,我们在表 6.5 的左边给出了 Wyndor Glass 公司这个例子应用单纯形法进行迭代过程中原问题与对偶问题的第 0 行。在原问题与对偶问题中,第 0 行都被分解成三个部分:决策变量的系数 (x_1, x_2) 、松弛变量系数 (x_3, x_4, x_5) 和右端项(Z 的值)。松弛变量系数给出了对偶问题中相应变量 (y_1, y_2, y_3) 的值。每一个第 0 行都给出了对偶问题相应的解,并展示在表 6.5 y_1, y_2, y_3 所在列当中。为了解释其余的两列,我们回忆 $(z_1 - c_1)$ 和 $(z_2 - c_2)$ 是对偶问题约束方程中的剩余变量。所以,增加了这些剩余变量之后,对偶问题的完整形式是:

$$\begin{array}{l} \min \quad W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3 \\ \text{s. t. } \quad y_1 + \quad \quad 3y_3 - (z_1 - c_1) = 3 \\ \quad \quad \quad 2y_2 + 2y_3 - (z_2 - c_2) = 5 \\ y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0 \end{array}$$

因此,通过使用 y_1, y_2, y_3 所在列当中的数字,我们可以通过如下的方法来计算剩余变量:

$$z_1 - c_1 = y_1 + 3y_3 - 3$$

$$z_2 - c_2 = 2y_2 + 2y_3 - 5$$

所以,剩余变量中每一个负的值都表示对应的约束条件不满足。

表格的最右端那一列当中是经过 $W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$ 而计算得出的对偶问题目标函数的值。

与表 6.4 所展示的一样,表 6.5 中第 0 行右边的所有数量都已经被第 0 行识别出来,而这个过程当中没有任何新的计算。特别是,如表 6.5 所示,对偶问题当中的数值已经出现在表 6.4 的第 0 行中(在两行虚线之内)。

对于最开始的第 0 行,表 6.5 中可以看出,因为两个剩余变量的值全是负的,所以相应的对偶问题的解 $(y_1, y_2, y_3) = (0, 0, 0)$ 是不可行的。第一步迭代成功地将两个负剩余中的一个变为非负的,但是还有一个是负值,所以要继续迭代。经过两步迭代之后,原问题满足了最优检验的条件,因为对偶问题中的全部变量以及剩余变量都已经变为非负的了。这个对偶问题的解 $(y_1^*, y_2^*, y_3^*) = (0, 3/2, 1)$ 就是最优解(可以通过直接对对偶问题使用单纯形法来证明这个解是最优解),所以, W 和 Z 的最优解就是 $Z^* = 36 = W^*$ 。

表 6.5 Wyndor Glass 公司例子中每一步迭代中第 0 行和相应对偶问题的解

迭代	原 问 题	对 偶 问 题					W
	第 0 行	y_1	y_2	y_3	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	
0	$[-3, -5, 0, 0, 0, 0]$	0	0	0	-3	-5	0
1	$[-3, 0, 0, 5/2, 0, 30]$	0	5/2	0	-3	0	30
2	$[0, 0, 0, 3/2, 1, 36]$	0	3/2	1	0	0	36

原问题—对偶问题关系总结

现在,让我们来总结一下我们对原问题与对偶问题之间关系的新发现。

弱对偶性(weak duality property): 如果 x 是原问题的一个可行解, y 是对偶问题的一个可行解,那么有 $cx \leq yb$ 。

例如,对于 Wyndor Glass 公司这个例子,原问题的一个可行解 $x_1 = 3, x_2 = 3$, 则目标函数值 $Z = cx = 24$ 。而对于对偶问题的一个可行解 $y_1 = 1, y_2 = 1, y_3 = 2$, 则会产生一个更大的目标函数值 $W = yb = 52$ 。很明显,对偶问题目标函数值大于原问题目标函数值。这只是两个问题可行解的一个例子。事实上,对于任意一对原问题与对偶问题的可行解,这种不等性一定存在。因为,原问题的最大可行值等于对偶问题的最小可行值,而这一条正好是我们下面要说的性质。

强对偶性(strong duality property): 如果 x^* 是原问题的最优解, y^* 是对偶问题的最优解,那么有如下关系:

$$cx^* = y^*b$$

因此,这两条性质可以说明当两个问题中有一个不是最优解,或者两个都不是最优解

的时候,会有 $cx < yb$ 。而当两个都是最优解的时候,则是 $cx = yb$ 的关系。

弱对偶性描述了原问题与对偶问题的任意一组可行解之间的关系,其中两个解对于它们各自的问题是可行的。在每一步的迭代中,单纯形法找到这两个问题的一对特殊的解。在这一对解中,原问题的解是可行的,而对偶问题的解是不可行的(最终迭代除外)。下一条性质描述了这种情形以及这一对解之间的关系。

互补解特性: 在每一步迭代过程中,单纯形法为原问题生成一个 CPF 解 x ,同时为对偶问题生成一个互补解 (complementary solution) y (在第 0 行中可以找到,松弛变量系数),并且满足 $cx = by$ 。如果 x 不是原问题的最优解,那么 y 也不是对偶问题的可行解。

为了说明这个问题,我们看,仍以 Wyndor Glass 公司为例 0 进行了一次迭代之后, $x_1 = 0, x_2 = 6$ 。而对于对偶问题, $y_1 = 0, y_2 = 5/2, y_3 = 0$, 则有 $cx = 30 = yb$ 。这时, x 是原问题的可行解,但是 y 不是对偶问题的可行解(因为不满足 $y_1 + 3y_2 \geq 3$ 这一个约束条件)。

对于互补解特性,当使用单纯形法最后一步迭代时依然成立,这时,可以为原问题找到一个最优解。但是,对于互补解 y ,我们在下边这条性质里可以看到还有其他更多的内容需要说明。

最优互补解特性: 在最后一步迭代完成时,单纯形法为原问题得到一个最优解 x^* ,同时得到一个对偶问题的最优互补解 y^* (complementary optimal solution y^*)(在第 0 行中可以找到,松弛变量系数),满足 $cx^* = y^* b$ 。

这里 y_i^* 就是原问题中资源的影子价格。

举例来说,在最后一次迭代完成后,有原问题的最优解 $x_1^* = 2, x_2^* = 6$ 和对偶问题的最优解 $y_1^* = 0, y_2^* = 3/2, y_3^* = 1$, 这时有 $cx^* = 36 = y^* b$ 。

在 6.3 节我们会对其中的一些性质做更进一步的观察。到时候你就会发现,互补解特性可以做更多的考虑。特别是当松弛变量和剩余变量被引入原问题与对偶问题中的时候,原问题的每一个基可行解都在对偶问题中有一个互补的基本解。我们在表 6.4 中已经注意到单纯形法通过 $z_j - c_j$ 来得到对偶问题中剩余变量的值。这个结果会导致被称为互补松弛性的性质,这个性质是关于一个问题中的基变量与另一个问题中的非基变量之间关系的。

在 6.4 节中,当讨论完如何在原问题不是标准形式的情况下构建对偶问题之后,我们将会讨论另一个非常有用的性质,这个性质的概要如下。

对称性 (symmetry property): 对于任意一个原问题和它的对偶问题,两个问题之间的一切关系必定是对称的。这是因为,对偶问题的对偶问题是原问题。

因此,前边所讨论的所有性质都忽略了两个问题中哪一个是原问题,哪一个是对偶问题(对于弱对偶性中不等号的方向要求原问题的目标函数是求最大值,而对偶问题的目标函数是求最小值)。从而,单纯形法可以被应用于两个问题当中的任意一个,并且将同时为另一个问题得到一个互补解,并最终产生一个互补最优解。

到目前为止,我们主要将注意力集中在讨论原问题的可行解或最优解及其在对偶问题当中相对应的解的关系上。但是,很可能存在这样一种情况,那就是原问题没有可行解

或者是原问题有可行解但是没有最优解(因为目标函数是无界的)。我们最后的这一条性质就是针对这样一种情况提出的。

对偶定理(duality theorem): 原问题与对偶问题只存在下面所述的可能关系。

1. 如果一个问题拥有可行解和有界的目标函数(所以就会有一个最优解),那么另一个问题也会有可行解和有界的目标函数。这时,弱对偶性与强对偶性都是可用的。
2. 如果一个问题拥有可行解但是目标函数是无界的(所以没有最优解),那么另一个问题没有可行解。
3. 如果一个问题没有可行解,那么另一个问题或者没有可行解,或者有可行解但是目标函数无界。

应用

如前所述,对偶理论的一个重要应用就是单纯形法可以通过直接解答对偶问题来为原问题寻找到一个最优解。我们在4.8节讨论过,约束方程的数量对单纯形法计算过程的影响要远远大于变量个数的影响。如果 $m > n$,那么对偶问题有 n 个约束方程,而原问题有 m 个约束方程,所以对偶问题有更少的约束方程数量。对对偶问题应用单纯形法比起直接对原问题使用单纯形法将会显著地降低计算过程。

弱对偶性与强对偶性描述了原问题与对偶问题之间的重要关系。对偶问题的一个有用的应用就是评价原问题的计划方案。举例来说,假设 x 是一个计划要实施的可行方案,如果通过观察对偶问题而得到的另一个可行方案 y ,使得 $cx = yb$,那么在这种情况下即使我们没有使用单纯形法,我们也可以知道 x 一定是最优解。即使 $cx < yb$, yb 仍然为目标函数 Z 提供了一个最优解的上界。所以,如果 $yb - cx$ 足够小,那么我们也可以接受这个方案,而不用再继续计算。

对于互补解特性的一个重要的应用是在7.1节介绍的对偶单纯形法中的使用。这一算法在原问题上使用时就好像同时对偶问题上使用单纯形法一样,之所以可以这样使用,就是因为这一条性质的存在。由于单纯形表中第0行和右端项相互颠倒,所以,对偶单纯形法保持第0行在开始和迭代过程中是非负的,而右端项在开始的时候可以有负值(迭代的目标就是消除右端项中的负值)。因此,这个算法偶尔会被使用,因为以这种形式建立初始单纯形表会比单纯形法要求的形式建立单纯形表更加简便。而且,它经常被用于4.7节中介绍的再优化。这是因为,对原模型的改变将导致对最终单纯形表的修订,使之满足这种形式。这种情况对于特定类型的灵敏度分析非常常见,我们稍后将在本章中看到。

总的来说,对偶理论在灵敏度分析中扮演了重要的角色。而它所扮演的角色就是6.5节中将要讨论的主题。

另一个重要的应用是对于对偶问题的经济解释以及对原问题的分析。我们在4.7节中已经看到了一个例子,那就是影子价格。在6.2节中,我们将会看到如何将这种解释扩展到整个对偶问题,之后如何扩展到整个单纯形法。



6.2 对偶的经济解释

对于对偶问题的经济解释是直接建立在 3.2 节中介绍的对于原问题的典型解释的基础上的(线性规划模型采用标准形式)。为了帮助你回忆,我们在表 6.6 中总结了对于原问题的解释。

对偶问题的解释

为了发现如何从对原问题的解释中发展出对于对偶问题的经济解释^①,我们注意到表 6.4 中 W 就是当前单纯形表中 Z 的值。由于 $W = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m$, 因此每一个 $b_i y_i$ 都可以被解释成: 如果原问题目前拥有 b_i 这么多单位的第 i 种可用资源, 那么可以对利润产生多大的贡献。

因此, 当目前一组基变量被用来获得原问题解时, 对偶变量 y_i 可以被解释成每一单位的第 i ($i=1, 2, \dots, m$) 种资源对利润的贡献。

换句话说, y_i 的值就是 4.7 节中所说的影子价格 (shadow prices)。

表 6.6 原问题的经济解释

数 量	解 释
x_j	第 j 种产品 ($j=1, 2, \dots, n$)
c_j	第 j 种产品的单位利润
Z	全部产品带来的总利润
b_i	第 i 种可用资源的数量 ($i=1, 2, \dots, m$)
a_{ij}	一单位第 j 种产品消耗第 i 种资源的数量

举例来说, 当单纯形法的第二次迭代找到了 Wyndor 公司问题的最优解时, 它同时也找到了对偶变量的最优值 $y_1^* = 0, y_2^* = 3/2, y_3^* = 1$ (见表 6.5 的最底行)。这就是 4.7 节对这一问题通过作图分析而得出的影子价格。我们回忆前面 Wyndor Glass 公司的例子, 在这个例子中资源就是用来生产那两种新产品的三个车间的可用生产能力, 所以 b_i 表示第 i 个车间每周用来生产产品的总共的小时数, 在这里 $i=1, 2, 3$ 。正如 4.7 节所讨论的那样, 影子价格就是单独的增加 1 单位任何一个 b_i 可以给目标函数最优值带来 y_i^* 的增加量 (一个星期总共能够增加多少美元的利润)。因此, y_i^* 可以被解释为在最优方案中 1 单位第 i 种资源可以贡献的利润量。

对于对偶变量的解释将引导我们对整个对偶问题进行全面的解释。特别地, 由于每一单位的第 j 种产品消耗 a_{ij} 单位的第 i 种资源, 因此

$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i$ 可以被解释成为生产 1 单位的第 j 种产品 ($j=1, 2, \dots, n$) 所消耗的各种混合资源对于当前利润的贡献。

^① 事实上, 有人们提出了几种存在细微差别的解释。我们这里介绍的这种解释似乎是最有用的, 因为它直接解释了在原问题中单纯形法做了些什么。

对于 Wyndor Glass 公司问题,1 单位的产品 j 对应着每个星期生产 1 批第 j 种产品,在例子里 $j=1,2$ 。为了生产 1 批第 1 种产品,所对应的各种混合资源的消耗是第 1 个车间 1 个小时的制造时间和第 3 个车间 3 个小时的制造时间。为了生产 1 批第 2 种产品,对应的各种混合资源的消耗是第 2 个车间和第 3 个车间各 2 个小时。因此, $y_1 + 3y_3$ 和 $2y_2 + 2y_3$ 可以解释成每星期生产的每批各种产品所消耗的混合资源对于利润所产生的贡献(千美元/星期)。

对于每一种产品 j ,同样的或者更多数量的资源组合也可以用于其他方法。但是,如果与将这些资源用于生产 j 产品相比,其他方法使用这些资源不能产生更多的利润,那么这些方法就不会被考虑。 c_j 被解释成第 j 种产品的单位利润,对偶问题当中的每一个约束方程被解释如下:

$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j$ 说明,各种资源对于利润的贡献至少应该和将它们用于生产 1 单位的第 j 种产品产生的利润相等。否则,这些资源就没有被最佳利用。

对于 Wyndor Glass 公司问题,单位利润(千美元/星期)是 $c_1 = 3$ 和 $c_2 = 5$ 。所以,对偶问题约束方程是 $y_1 + 3y_3 \geq 3, 2y_2 + 2y_3 \geq 5$ 。类似的,非负的约束被解释如下:

$y_i \geq 0$ 说明,第 i 种资源($i=1,2,\dots,m$)对于利润的贡献应该大于 0。否则,最好还是根本不用这种资源。

目标函数 $\min W = \sum_{i=1}^m b_i y_i$ 可以被视为被各种产品所消耗的各种资源的最小的总隐含价值。对于 Wyndor Glass 公司问题,被两种产品消耗的各种资源的总共的隐含价值(千美元/星期)是 $W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$ 。

这种解释还可以通过区别原问题当中对于任何一个 BF 解 $(x_1, x_2, \dots, x_{m+n})$ 中的基变量与非基变量来进一步讨论。回忆基变量中(变量值为非 0)总是会在第 0 行中存在一个 0 系数。因此,再一次观察表 6.4 以及相应的 z_j 方程,我们可以看到

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j \quad \text{如果} \quad x_j > 0 (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$y_i = 0 \quad \text{如果} \quad x_{n+i} > 0 (i = 1, 2, \dots, m)$$

(这是 6.3 节中讨论的松弛性的一种)对于第一个方程,经济学上的解释是,一旦第 j 种产品按照严格确定的水平去生产,那么它所消耗的资源边际值一定要等于(不允许超出)这种产品的单位利润。第二个方程表示,一旦这种资源没有被产品完全使用($x_{n+i} > 0$),那么这种资源的边际价值就是 0($y_i = 0$)。用经济学术语来说,这种资源属于免费品。对于过度供应的商品,它的价格一定会下降为 0,这是由于供求关系法则决定的。这些可以说明,应该把对偶问题求最小值的目标函数解释为被消耗的资源的全部隐含价值,而不是资源的分配。

为了更好地说明这两个方程,考虑 Wyndor 问题的最优 BF 解 $(2, 6, 2, 0, 0)$ 。基变量是 x_1, x_2 和 x_3 , 所以其第 0 行的系数是 0, 就像表 6.5 中最底行所表示的那样。这个最底行同时也给出了对偶问题的解: $y_1^* = 0, y_2^* = 3/2, y_3^* = 1$, 剩余变量 $(z_1^* - c_1) = 0$ 以及 $(z_2^* - c_2) = 0$ 。对于 $x_1 > 0$ 以及 $x_2 > 0$, 这些剩余变量以及直接的计算都表明 $y_1^* + 3y_3^* = c_1 = 3, 2y_2^* + 2y_3^* = c_2 = 5$ 。因此,生产一批每种产品所消耗的各种资源确实是等于

这种产品的单位利润。第一个生产车间约束方程中的松弛变量 $x_3 > 0$, 所以增加其生产能力的边际价值是 0 ($y_1^* = 0$)。

单纯形法的解释

对于对偶问题的解释同样为在原问题中使用单纯形法做了些什么提供了经济上的解释。单纯形法的目标就是找出如何使用可用的资源, 以实现总利润最大化。为了达到这个目标, 我们必须找到这样一个 BF 解来满足对资源有利可图的利用的全部条件(对偶问题的约束条件)。这些条件构成了算法的最优约束条件。对于任意一个给定的 BF 解, 这些伴随着基变量的需求(对偶问题的约束)会自动满足。但是, 对于非基变量, 这些条件可能满足, 也可能不满足。

特别地, 如果变量 x_j 是一个非基变量, 那么就表示第 j 种产品没有被生产。那么我们就需要计算每生产一单位这种产品所消耗的资源 $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i$ 目前能对利润有多大的贡献。

$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i$ 可能小于、大于或者等于 c_j 。如果小于, 那么在单纯形表的第 0 行, $z_j - c_j < 0$, 因此将这些资源用于这种产品的生产将会更有利润。如果 $z_j - c_j > 0$, 则说明这些资源已经被用于生产其他产品, 而生产这些其他产品可以比生产本产品产生更多的利润, 所以这些资源不应该被转移过来生产第 j 种产品。

类似的, 如果松弛变量 x_{n+i} 是一个非基变量, 那么第 i 种资源的 b_i 个单位全部被利用, 于是 y_i 是这种资源对于利润的边际贡献。因此, 如果 $y_i < 0$, 那么可以通过减少对这种资源的使用(也就是增加 x_{n+i})来增加利润; 如果 $y_i > 0$, 则说明可以继续增加对这种资源的使用; 如果 $y_i = 0$, 则这种资源不会对利润有任何影响。

因此, 单纯形法就是检查当前 BF 解中所有的非基变量, 来发现哪一个可以更有效地使用资源以产生更多的利润。如果任何一个都不满足条件, 则任何一种对资源的改变或减少都不可能增加利润, 所以当前的解就是最优解。如果有一个或者多个可以增加利润, 那么单纯形法就挑选出这样一个变量, 增加一个单位这个变量的生产可以增加最多的利润。之后, 就把这个非基变量变为基变量, 并给这个变量增加尽可能多的资源来生产它, 直到生产它的资源的边际价值改变。这样改进之后的 BF 解又形成了一个新的第 0 行(也就是一个新的对偶解), 之后重复上面的过程, 直到找到最优解。

对于对偶问题经济上的解释扩展了我们分析原问题的能力。但是, 在 6.1 节中我们已经看到, 这种解释只是两个问题之间关系的一部分。在 6.3 节中我们将更深入地讨论这些关系。



6.3 原问题与对偶问题的关系

因为对偶问题也是一个线性规划问题, 所以它同样也有角点解。而且, 通过使用问题的扩展形式我们可以把这些角点解解释成基本解。由于方程的约束函数是“ \geq ”的形式, 所以

扩展形式是通过在约束方程 $j(j=1,2,\dots,n)$ 左边减去(而不是加上)剩余变量获得的。^①

这些剩余变量是

$$z_j - c_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i - c_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

因此, $z_j - c_j$ 扮演了约束 j 中剩余变量(或者是松弛变量, 如果这些约束方程都乘以 -1)的角色, 每一个角落点解 (y_1, y_2, \dots, y_m) 通过对 $z_j - c_j$ 的解释产生了一个基本解 $(y_1, y_2, \dots, y_m, z_1 - c_1, z_2 - c_2, \dots, z_n - c_n)$ 。所以, 一个扩展形式的对偶问题拥有 n 个约束方程, $n+m$ 个变量。每一个基本解拥有 n 个基变量和 m 个非基变量(如表 6.3 所示, 对偶问题中的约束方程对应着原问题中的变量, 对偶问题中的变量对应着原问题中的约束方程)。

互补基本解

在原问题与对偶问题之间的关系中, 一个很重要的关系就是原问题与对偶问题基本解之间的直接对应关系。这种对应关系的关键就是原问题基本解的单纯形表的第 0 行, 正如表 6.4 或者表 6.5 展示的那样。这样的第 0 行可以在原问题的任何一个基本解、可行解或者非可行解中, 通过使用表 5.8 中底部的公式获得。

我们再来注意一下表 6.4 和表 6.5, 看一下如何直接从第 0 行找到对偶问题的完整解(包括剩余变量)。在第 0 行的系数中, 每一个原问题的变量都对应着一个对偶问题的变量。表 6.7 给出了总结。接下来, 我们先考察任意一个问题, 之后继续用 Wyndor 公司问题来说明。

这里我们可以发现一个关键问题, 就是直接从第 0 行中读出来的对偶问题解也必须是一个基本解。原因是原问题当中的 m 个基变量要求在第 0 行当中的系数为 0, 从而要求对偶问题当中 m 个对应的变量, 也就是 m 个非基变量的系数是 0。其余的 n 个变量(基变量)的值也必须是本节最开始给出的一系列方程的解。如果用矩阵的形式表示, 这一系列方程可以写成 $z - c = yA - c$ 。在 5.3 节观察到的结果实际上说明了 $z - c$ 和 y 的解是第 0 行中相应的部分。

由于 6.1 节所讨论的对称性(以及表 6.7 中所描述的变量之间的对应关系), 原问题基本解与对偶问题基本解之间的对应也是对称的。而且, 一对互补的基本解拥有同样的目标函数值(表 6.4 中的 W)。

下面让我们来总结一下原问题与对偶问题基本解之间的对应关系。第一条性质将 6.1 节讨论的互补解特性扩展到了两个问题的扩展形式, 进而扩展到了原问题任意的一个基本解(可行的或者不可行的)。

互补基本解的特性: 原问题当中的每一个基本解在对偶问题中都拥有一个互补的基本解, 并且它们各自的目标函数值 Z 和 W 相等。给定一个原问题的单纯形表, 从第 0 行

^① 你可能想知道, 为什么我们在这里没有像在 4.6 节中那样介绍人工变量。这是因为这些变量除了改变可行域, 并在单纯形法开始时起到简化作用外没有其他价值。我们现在感兴趣的不是如何在对偶问题中应用单纯形法, 也不是改变它的可行域。

可以直接利用表 6.4 给出的关系找到对偶问题的基本解 $(y, z - c)$ 。

下一条性质指出了如何在互补的基本解中确定基变量与非基变量。

互补松弛性：表 6.7 中给出了变量之间的对应关系。原问题基本解与对偶问题基本解中的变量满足表 6.8 中给出的互补松弛关系。而且,这种关系是对称的,所以两个问题的基本解彼此互补。

表 6.7 原问题与对偶问题变量之间的对应关系

	原问题中的变量	相应的对偶变量
任意问题	决策变量 x_j	$z_j - c_j$ (剩余变量) $j=1, 2, \dots, n$
	松弛变量 x_{n+i}	y_i (决策变量) $i=1, 2, \dots, m$
Wyndor 公司问题	决策变量 x_1	$z_1 - c_1$ (剩余变量)
	x_2	$z_2 - c_2$
	松弛变量 x_3	y_1 (决策变量)
	x_4	y_2
	x_5	y_3

表 6.8 互补基本解之间的互补松弛关系

原变量	对应的对偶变量
基变量	非基变量 (m 个)
非基变量	基变量 (n 个)

称这一性质为互补松弛性的原因是,它说明对于任意的一对相对应的变量,如果它们中的一个在其非负的约束中(基变量 > 0)有松弛变量,那么在另一个当中一定没有松弛变量(非基变量 $= 0$)。我们在 6.2 节中提到过,这条性质对于线性规划问题经济学上的解释十分有用。

例 为了更生动地说明这两条性质,我们再次考虑 3.1 节所举的 Wyndor Glass 公司问题这个例子。所有的 8 个基本解(5 个可行解,3 个非可行解)都被列举在表 6.9 中。因此,它的对偶问题(见表 6.1)也必须拥有 8 个基本解。原问题每一个基本解的互补解也在表 6.9 中给出。

表 6.9 Wyndor Glass 公司问题的互补基本解

序号	原问题		$Z=W$	对偶问题	
	基本解	可行?		可行?	基本解
1	(0,0,4,12,18)	是	0	否	(0,0,0,-3,-5)
2	(4,0,0,12,6)	是	12	否	(3,0,0,0,-5)
3	(6,0,-2,12,0)	否	18	否	(0,0,1,0,-3)
4	(4,3,0,6,0)	是	27	否	(-9/2,0,5/2,0,0)
5	(0,6,4,0,6)	是	30	否	(0,5/2,0,-3,0)
6	(2,6,2,0,0)	是	36	是	(0,3/2,1,0,0)
7	(4,6,0,0,-6)	否	42	是	(3,5/2,0,0,0)
8	(0,9,4,-6,0)	否	45	是	(0,0,5/2,9/2,0)

原问题用单纯形法得到的3个BF解分别是表6.9中的第1个、第5个和第6个。你已经在表6.5中看到如何直接从第0行中读出对偶问题的解,从松弛变量系数开始,接下来是最初始的变量。其他对偶问题的基本解也可以通过为原问题的每一个基本解构造第0行,并运用表5.8底部给出的公式找出来。

因为对于原问题的每一个基本解,都可以通过使用互补松弛性来识别对偶问题的互补解中的基变量与非基变量,因此,通过使用本节开始给出的方程,可以直接获得互补解。例如,考虑表6.9中倒数第二个解(4,6,0,0,-6)。注意到 x_1, x_2, x_5 是基变量,因为这些变量不为0。表6.7表明它们对应的对偶问题变量是 $z_1 - c_1, z_2 - c_2$ 和 y_3 。表6.8说明这些变量在对偶问题当中是非基变量,所以 $z_1 - c_1 = 0, z_2 - c_2 = 0$ 和 $y_3 = 0$ 。

因此,对偶问题约束条件的扩展形式:

$$\begin{aligned} y_1 + 3y_3 - (z_1 - c_1) &= 3 \\ 2y_2 + 2y_3 - (z_2 - c_2) &= 5 \end{aligned}$$

被缩减为:

$$\begin{aligned} y_1 + 0 - 0 &= 3 \\ 2y_2 + 0 - 0 &= 5 \end{aligned}$$

所以,可以得到 $y_1 = 3, y_2 = 5/2$ 。将这两个值与非基变量的0值结合起来,就得到表6.9中倒数第二行最右面的基本解(3,5/2,0,0,0)。我们注意到,这个对偶问题的基本解是可行的,因为所有的5个变量都满足非负的约束条件。

最后,我们注意到表6.9中的(0,3/2,1,0,0)是对偶问题的最优解,因为它是使目标函数值 $W(36)$ 最小的基本可行解。

互补的基本解之间的关系

现在,我们把注意力转回研究互补的基本解之间的关系上来,先从它们之间可能的关系开始。表6.9中间的那几列提供了一些有价值的线索。在这些对基本解之间,我们发现对于是否可行这个问题的回答,大多数同样满足互补关系。特别是,除了一个特例之外,其他解全都满足,如果一个解是可行的,则另一个解是不可行的(这当中也存在两个解都是不可行的这种可能性,就像第三对解)。唯一的例外是第六对解,而从 $W = Z$ 这一列可以看出,这个解对于原问题是最优解。由于第六个解在对偶问题中也是最优的(互补最优解特性),这个最优解中 $W = 36$,而前五个解由于全部 < 36 ,所以这五个解都是不可行的(对偶问题的目标函数是求最小值)。同样的原因,对于原问题,由于最后两个解 $Z > 36$,所以它们两个也不是可行解。

这个解释可以被强对偶性支持,也就是说,对于原问题与对偶问题的最优解有 $Z = W$ 所支持。

接下来让我们把6.1节中的互补最优解特性扩展为两个问题的扩展形式。

互补的最优基本解特性:任意一个原问题的最优基本解,在其对偶问题当中都拥有一个互补的最优基本解(complementary optimal basic solution),并且它们各自的目标函数值(W 和 Z)相等。给定一个原问题最优解的单纯形表的第0行,可以利用表6.4得到互补的对偶问题的最优解($y^*, z^* - c$)。

为了回顾在这条性质背后的原因,我们注意对偶解 $(y^*, z^* - c)$ 必须对对偶问题是可行的,因为原问题最优解条件要求所有的对偶变量(包括剩余变量)必须是非负的。既然这个解是可行的,那么,通过弱对偶性我们可以知道它对对偶问题一定是最优的(由于 $W=Z$,所以 $y^* b = cx^*$,这里 x^* 是原问题的最优解)。

基本解可以按照它们是否满足以下两个条件进行分类:一个条件是它是否可行,也就是说是否所有扩展形式中的变量(包括松弛变量)都是非负的;另一个条件是最优性,也就是说,是否第0行中的全部系数(也就是对偶问题中的互补的基本解全部变量)都是非负的。我们在表6.10中给出了分类后各种不同类型解的命名。举例来说,在表6.9中的基本解1、2、4和5是不满意解,6是最优解,7和8是超优解,而3既不是可行解也不是超优解。

		是否满足最优性?	
		是	否
可行?	是	最优解	不满意解
	否	超优解	不可行也不超优

通过给出的定义,表6.11总结了互补的基本解之间的一般关系。表6.11给出的前三个之间的转换关系见图6.1。因此,当使用单纯形法把原问题中的不满意解向最优解转化的同时,在对偶问题的互补基本解当中也进行着将超优解向可行解转化的过程。相反,有时候直接在原问题上处理超优解,使其转化为可行解,这样会更加简单(或者必要)。这也就是对偶单纯形法的目的。对偶单纯形法将在7.1节介绍。

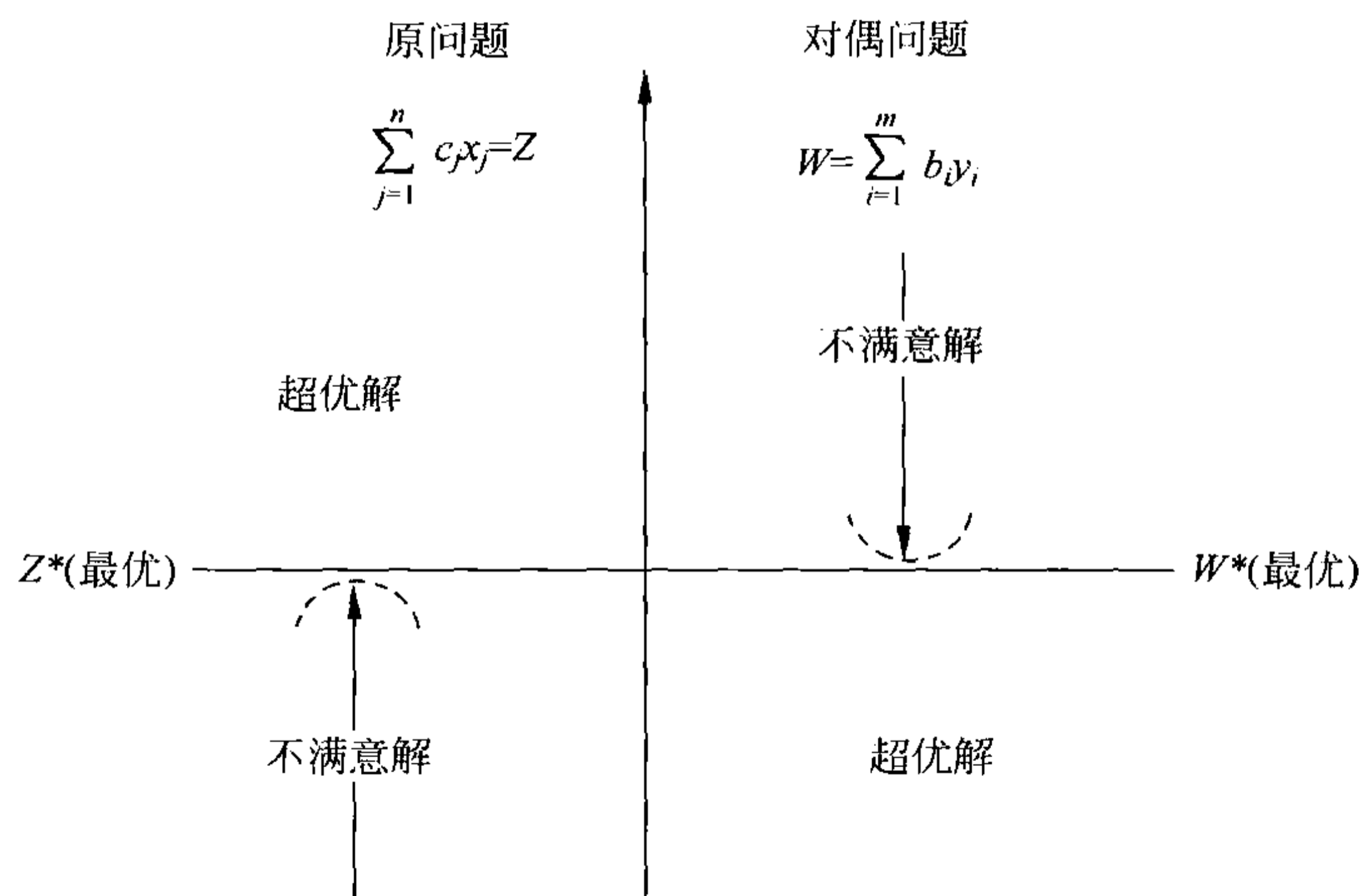


图 6.1 互补基本解之间的类型转换图

表 6.11 互补的基本解之间的关系

原问题基本解	互补的对偶问题的基本解	对于全部的基本解	
		原问题可行?	对偶可行?
不满意解	超优解	是	否
最优解	最优解	是	是
超优解	不满意解	否	是
不可行也不超优	不可行也不超优	否	否

表 6.11 的第三列和第四列介绍了其他两个非常常见的术语,这两个术语用来描述一对互补的基本解。这两个互补的解中,如果原问题的基本解是可行的,我们就称其为原可行解(primal feasible);同样,如果对偶问题对应的互补的基本解是可行的,我们就称其为对偶可行解(dual feasible)。通过使用这两个术语,单纯形法通过处理原可行解,努力使其同时也达到对偶可行解。一旦达到这个目的,这两个互补的解就是各自的最优解。

在本章接下来的部分你将看到,这些关系是非常有用的,尤其是在灵敏度分析当中。



6.4 改造适用于其他原问题形式

一般地,我们都假设原问题是通过我们的标准形式给出的。但是,我们在本章的开头指出,任何一个线性规划问题,无论是否以标准形式给出,都要处理对偶问题。因此,本节我们将注意力放在对原问题的其他形式上,如对偶问题是如何变化的。

4.6 节讨论了每一种非标准的形式,并且指出了如何将这些非标准形式转化成方程形式的标准形式。这些转化的方法在表 6.12 中给出了总结。因此,你总是可以将任意一个非标准形式的模型转化成标准形式,然后,为标准形式构造一个对偶问题模型。为了说明,我们在表 6.13 中给出了如何找出标准形式模型(标准形式模型一定有对偶问题)的对偶问题模型。可以注意到,我们正是以原问题的标准形式而结束的。由于任何一对原问题与对偶问题都可以转换为这些形式,这表明,对偶问题的对偶问题就是原问题。所以,对于任何的原问题和它的对偶问题,它们之间的关系一定是对称的。这就是表 6.1 中给出的对称性(没有证明),而表 6.13 证明了它。

表 6.12 将线性规划问题转化成标准形式

非标准的形式	等价的标准的形式
$\min Z$	$\max (-Z)$
$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i$	$-\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq -b_i$
$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$	$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$ 并且 $-\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq -b_i$
x_j 无约束	$x_j^+ - x_j^-, x_j^+ \geq 0, x_j^- \geq 0$

通过对称性我们可以得到一个结论,那就是前边所讲述的关于原问题与对偶问题之间的关系都是可以颠倒的。

另一个结论就是对于两个问题,哪一个被称为原问题、哪一个被称为对偶问题并没有实质上的区别。实际上,你可能会看见一个线性规划问题满足我们所提到的对偶问题的标准形式。我们的习惯是,将按照符合实际问题所建立的模型称为原问题,而不在乎它的形式。

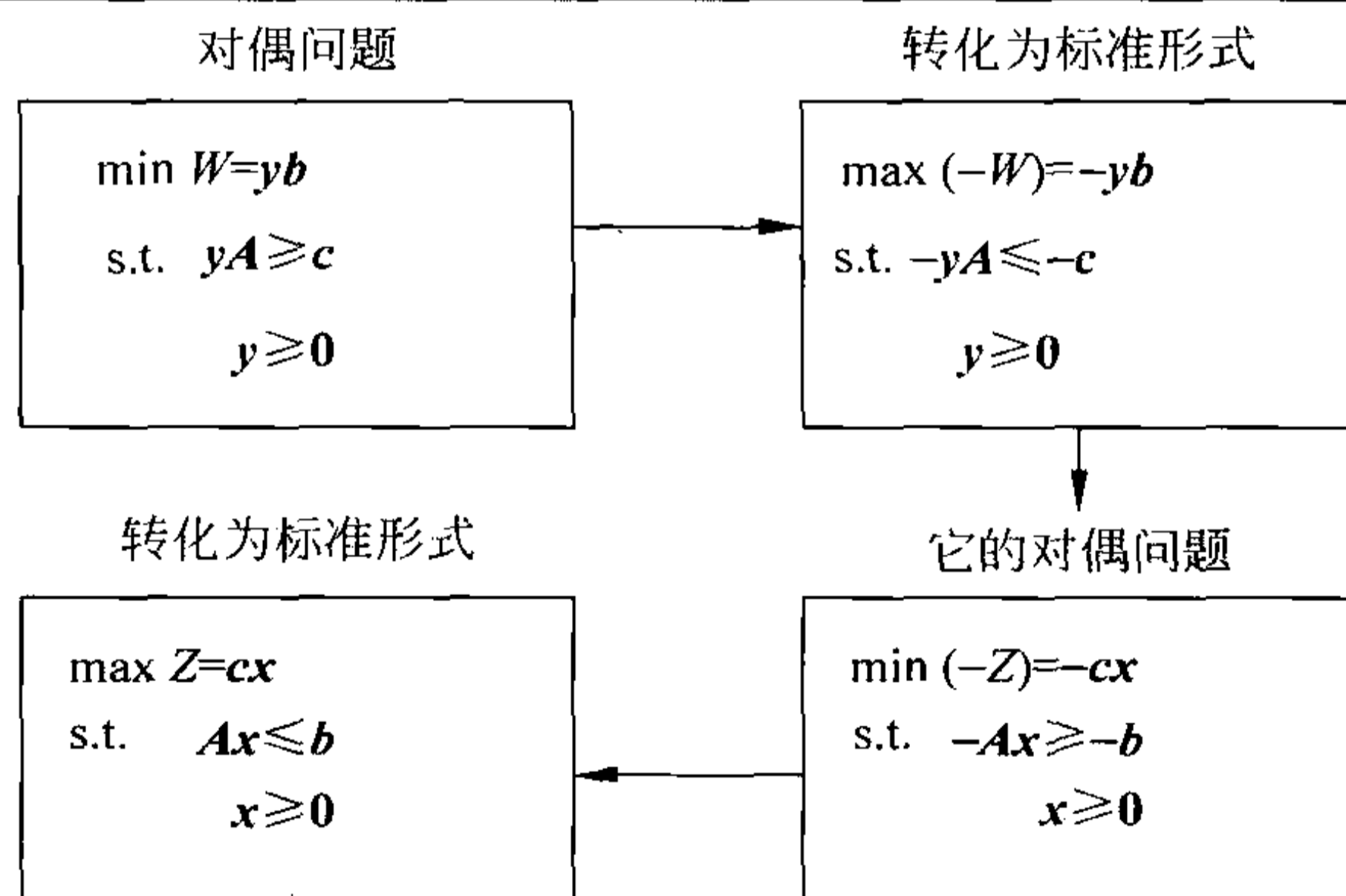
我们在说明如何为一个非标准形式构造一个对偶问题时,并没有包括约束方程是等式的和变量是无约束的这两种情况。事实上,对于这两种形式是有捷径的。对于等式形式的约束条件同样可以按照“ \leq ”的约束条件形式来构造它的对偶问题,只不过在对偶问题当中,相应变量的非负约束条件需要被去掉(也就是说这个变量是无约束的)。由于对称性,在原问题中去掉一个非负的约束,对于对偶问题的影响仅仅是将相对应的不等的约束变成等式的约束。

另一个捷径涉及对于求最大值问题的“ \geq ”约束条件。最直接的方法就是将这些约束全都转化成“ \leq ”的形式。

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \quad \text{转化为} \quad -\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq -b_i$$

接下来就可以按照通常的方法来构造对偶问题了。以 $-a_{ij}$ 作为第 j 个约束方程(这个约束方程含有“ \geq ”的形式)中 y_i 的系数,以 $-b_i$ 作为目标函数(是求最小值)的系数,这里 y_i 同样含有非负的约束 $y_i \geq 0$ 。现在,假设我们定义了一个新的变量 $y'_i = -y_i$ 。用 y'_i 替代 y_i 来对对偶问题进行解释,这会导致以下的变化:(1)约束方程 j 的变量系数变成 a_{ij} ,目标函数系数为 b_i ;(2)变量的约束变为 $y'_i \leq 0$ 。捷径就是通过使用 y'_i 替代 y_i 作为对偶变量,于是在原始约束中的参数(a_{ij} 和 b_i)立即变成了对偶问题中变量的系数。

表 6.13 构造对偶问题的对偶问题



这里有一个非常有用的可以帮助记忆对偶问题约束形式的工具。对于求最大值的问题,约束大多数是以“ \leq ”形式出现的,一小部分是以“ $=$ ”形式出现的,极个别的是以“ \geq ”形式出现的。类似的,对于求最小值的问题,约束更多的是以“ \geq ”形式出现,一小部分是以“ $=$ ”形式出现的,极个别的是以“ \leq ”出现的。对于任意类型的问题中的一个独立变量的约束,更多的是以非负的形式出现的,一小部分是无约束的,非常个别的一部分变量是以小于0或者等于0作为约束的。现在回忆一下表 6.3 中的原问题与对偶问题各项之间

的对应关系。也就是一个问题中的第 i 个约束方程对应着另一个问题当中的第 i 个变量,一个问题中的第 i 个变量也对应着另一个问题中的第 i 个约束方程。上面所说的这些大部分、小部分、极个别方法(sensible-odd-bizarre),也可以简称为 SOB 方法,说明了对偶问题中一个约束方程或者是一个变量的约束是大部分的、一小部分的或者极个别的取决于原问题当中与之相对应的项是大部分的、小部分的还是极个别的。下边给出了总结。

用 SOB 方法决定对偶问题约束形式^①

(1) 无论原问题是以最大值形式还是以最小值形式出现,对偶问题自动以与原问题相反的形式出现(即原问题求最大值对偶问题求最小值,原问题求最小值对偶问题求最大值)。

(2) 按照表 6.14,将原问题当中的约束方程以及对变量的约束条件分别加上大部分、小部分与极个别这样的三种标签。这个标签的种类取决于这个问题是求最大值(使用第二列)还是求最小值(使用第三列)。

标 签	原问题(或者对偶问题)	对偶问题(或者原问题)
	max Z (或者 W)	min W (或者 Z)
	第 i 个约束方程	变量 y_i (或者变量 x_i)
大部分(S)	\leq 的形式	$y_i \geq 0$
小部分(O)	$=$ 的形式	无约束
极个别(B)	\geq 的形式	$y_i \leq 0$
	变量 x_j (或者变量 y_j)	第 j 个约束方程
大部分(S)	$x_j \geq 0$	\geq 的形式
小部分(O)	无约束	$=$ 的形式
极个别(B)	$x_j \leq 0$	\leq 的形式

(3) 对于对偶问题中对变量的约束,使用与原问题中与这个变量相对应的那个约束方程相同的标签(对应关系见表 6.3)。

(4) 对于对偶问题中的每一个约束方程,使用与原问题中与这个约束方程相对应的那个变量的约束相同的标签(对应关系见表 6.3)。

表 6.14 第二列与第三列之间的箭头清楚地说明了原问题与对偶问题约束形式之间的对应关系。我们注意到,这些对应关系总是发生在一个问题的约束方程与另一个问题中对变量的约束这两者之间。由于原问题既可以是求最大值也可以是求最小值(而对偶问题目标函数的形式与原问题相反),表的第二列给出了原问题以及对偶问题求最大值的形式,而第三列给出了另一个问题的最小值形式。

为了更生动地说明,考虑我们在第 3.4 节开始时给出的那个放射治疗的例子。为了

^① 这个特殊的用来帮助记忆约束种类的工具是由 Harvey Mudd 大学的 Arthur T. Benjamin 教授所提出的。关于 Arthur T. Benjamin 教授的一件非常有意思的事情是他本人就是一个非常伟大的人类计算器,他可以用他的大脑进行 6 位数的乘法计算。对 SOB 方法的进一步讨论和推导可参见 A. T. Benjamin: "Sensible Rules for Remembering Duals—The S-O-B Method", *SIAM Review*, 37(1): 85-87, 1995.

能在表 6.14 中展示双向的转换,我们在以这个模型的目标函数取最小值之前,先以这个模型的目标函数取最大值作为原问题。

在表 6.15 的左侧我们给出了这个问题的目标函数取最大值的形式。通过使用表 6.14 的第二列来表现这个问题,表中的箭头表明第三列中对偶问题的形式。这些箭头在表 6.15 中用来展示对偶问题的结果(由于这些箭头,我们把这些约束放在对偶问题的后边,而不是像通常那样放在顶部)。在每一个方程的约束旁边我们加了 S、O 或者 B 的标签,分别代表大部分、小部分或者极个别。就像 SOB 方法所指明的那样,对偶问题约束的标签总是与原问题相对应的约束所拥有的标签相同。

表 6.15 放射治疗例子的原问题与对偶问题的一种形式

原 问 题		对 偶 问 题
$\max -Z = -0.4x_1 - 0.5x_2$		$\min W = 2.7y_1 + 6y_2 + 6y'_3$
s. t.		s. t.
(S) $0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7$	←	$y_1 \geq 0$ (S)
(O) $0.5x_1 + 0.5x_2 = 6$	←	y_2 无约束 (O)
(B) $0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6$	←	$y'_3 \leq 0$ (B)
且		且
(S) $x_1 \geq 0$	←	$0.3y_1 + 0.5y_2 + 0.6y'_3 \geq -0.4$ (S)
(S) $x_2 \geq 0$	←	$0.1y_1 + 0.5y_2 + 0.4y'_3 \geq -0.5$ (S)

但是,如果不是为了说明,一般不需要将原问题转化为最大值的形式。使用最初的最小值形式,表 6.16 左侧给出了原问题的方程。现在让我们用表 6.14 的第三列来表现这个原问题。箭头给出了对偶问题的形式,并用第二列展示。表 6.16 右侧展示了对偶问题的结果。同样,这里 S、O、B 标签显示了 SOB 方法的使用。

表 6.16 放射治疗例子的原问题与对偶问题的另一种形式

原 问 题		对 偶 问 题
$\min Z = 0.4x_1 + 0.5x_2$		$\max W = 2.7y'_1 + 6y'_2 + 6y_3$
s. t.		s. t.
(B) $0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7$	←	$y'_1 \leq 0$ (B)
(O) $0.5x_1 + 0.5x_2 = 6$	←	y'_2 无约束 (O)
(S) $0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6$	←	$y_3 \geq 0$ (S)
且		且
(S) $x_1 \geq 0$	←	$0.3y'_1 + 0.5y'_2 + 0.6y_3 \leq 0.4$ (S)
(S) $x_2 \geq 0$	←	$0.1y'_1 + 0.5y'_2 + 0.4y_3 \leq 0.6$ (S)

正如表 6.15 与表 6.16 中的原问题是等价的,这两个对偶问题也是完全等价的。认识这种等价性的关键就在于这样的事实,对偶每一个版本中的变量是其他版本中变量的负数($y'_1 = -y_1, y'_2 = -y_2, y'_3 = -y_3$)。所以,对于一个版本如果把变量换成另一个版本

中的变量,并且将目标函数以及约束全部乘以 -1 ,就可以得到另一个版本(问题 6.4-5 会让你验证这一结论)。

如果单纯形法被应用于一个含有非正约束变量的原问题或者对偶问题(比如表 6.15 中对偶问题中的 $y_3' \leq 0$),这个变量就应该变换成非负的形式(比如用 $y_3 = -y_3'$)。

当在原问题当中使用人工变量来帮助单纯形法解决问题的时候,对于单纯形表第 0 行中对偶的解释如下:因为人工变量扮演的是松弛变量的角色,它们的系数规定了对偶问题中互补的基本解中相应变量的值。由于使用人工变量,实际上是将原来的实际问题变成了一个简单的人工问题,因此,这个对偶问题实际上也是这个人工问题的对偶问题。但是,当所有的人工变量都变成非基变量的时候,我们又回到了实际的原问题和对偶问题。在两阶段法中,人工变量应该在第二阶段保留,这样可以很快在第 0 行中读出对偶问题的完整形式。对于大 M 法,由于大 M 被加到第 0 行来初始化人工变量的系数,所以对偶问题中对应的变量的当前值就是人工变量的负值,也就是 $-M$ 。

举例来说,观察一下在表 4.12 中给出的放射治疗的例子中最终单纯形表的第 0 行。当 M 被从变量 \bar{x}_4 和 \bar{x}_6 的系数中减去之后,在表 6.15 中给出的对偶问题的最优解是从 x_3 、 \bar{x}_4 和 \bar{x}_6 的系数中直接读出的, $(y_1, y_2, y_3') = (0.5, -1, 1, 0)$ 。与通常一样,对于两个约束方程中的剩余变量是直接从 x_1 、 x_2 的系数 $z_1 - c_1 = 0$ 和 $z_2 - c_2 = 0$ 直接读出来的。



6.5 对偶理论在灵敏度分析中的作用

就像接下来两节中描述的那样,灵敏度分析主要研究改变 a_{ij} 、 b_i 、 c_j 对最优解产生的影响。但是,改变原问题中的参数值同样会改变对偶问题中对应的值。因此,你可以选择使用哪个问题来进行研究。由于 6.1 节和 6.3 节中介绍的原问题和对偶问题之间的关系(尤其是互补的基本解特性),因此很容易按照要求在两个问题之间进行转换。在一些问题当中,直接分析对偶问题以决定对原问题的影响会更加方便。我们来讨论两个这样的例子。

非基变量系数的改变

假设在最初始的原问题的最优解中,非基变量的系数发生改变。这些改变对最优解会有什么影响?它是否仍然可行?它是否仍然最优?

由于所涉及的变量是非基变量,所以变量系数的改变不会影响解的可行性。因此,对于这种情况就只存在一个问题,即这个解是否还是最优的。就像表 6.10 和表 6.11 中指出的那样,这个问题的另一个等价的问题是,是否改变之后的这个原最优解所对应的对偶问题的互补的基本解仍然是可行的。由于这样的改变只是影响对偶问题中的一个约束方程,因此,要回答这个问题时只需简单地检验一下这个互补的基本解是否满足新的约束条件。

问题中引入新变量

正如表 6.6 中指出的那样,模型中的决策变量通常是代表考虑中的各种产品的生产水平。在某些情况下,这些产品是从更大范围的一组产品中挑选出来的,而这一组中的其他产品可能是因为看起来似乎效益不是特别好,所以没有被包含进来,或者是这些产品在模型建立好或求出最优解之后才被发现的。对于这两种情况的任意一种,关键问题都是这些之前没有被考虑的产品是否值得投产。换句话说,就是将这些产品加入最开始的模型中是否会改变最优解。

增加一种新产品就意味着在原模型中增加一个新的变量,并且在约束方程和目标函数中给它以合适的系数。而对于对偶问题的唯一影响就是在对偶问题当中增加了一个新的约束(见表 6.3)。

当这些改变发生后,原来的最优解加上新增加的这个以 0 为值的变量(非基变量)所组成的新解对于新模型是否仍然是最优的?如前所述,这个问题的另一个等价的说法是原最优解所对应的对偶问题的互补的基本解仍然是可行的。同样,如前所述,要回答这个问题只需简单地检验这个互补的基本解是否满足那个新增加的约束条件。

为了更清楚地说明,我们来考虑 3.1 节中给出的 Wyndor Glass 公司的例子。假设现在生产线有一个新的第三种产品加入了考虑当中。我们用 $x_{\text{新}}$ 来代表整个新增加的产品,改变之后的模型如下:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_{\text{新}} \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + 2x_{\text{新}} \leq 4 \\ & 2x_2 + 3x_{\text{新}} \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_{\text{新}} \leq 18 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_{\text{新}} \geq 0 \end{aligned}$$

当我们加入松弛变量后,最开始的那个问题在没有包含这个新增加的变量 $x_{\text{新}}$ 时的最优解是 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 6, 2, 0, 0)$ 。这个解再加上 $x_{\text{新}} = 0$ 仍然还是最优解吗?

为了回答这个问题,我们需要检查对偶问题互补的基本解。就像第 6.3 节介绍的互补的最优基本解特性那样,这个解在原问题的最终单纯形表的第 0 行给出。利用表 6.4 给出的方法在表 6.5 中解释。因此,就像表 6.5 的底行和表 6.9 的第 6 行中给出的那样,这个解是 $(y_1, y_2, y_3, z_1 - c_1, z_2 - c_2) = (0, 3/2, 1, 0, 0)$ (这个解在 6.3 节表 6.9 的倒数第 3 行给出)。

由于这个解是最初始模型的对偶问题的最优解,它当然会满足表 6.1 中给出的最初始模型的对偶问题约束条件。但是,这个解还满足这个新的对偶问题的约束吗?

$$2y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 4$$

我们将这个解代入,可以看到:

$2(0) + 3(3/2) + (1) \geq 4$ 满足约束条件。所以,这个解仍然是可行的(因此它仍然是最优的)。因此,最初始的原问题解 $(2, 6, 2, 0, 0)$ 加上这个新增加的变量 $x_{\text{新}} = 0$ 仍然是最优的。所以,这个新产品不应该投产。

这个方法同样可以非常简单地帮助灵敏度分析来分析加在新变量上的系数。通过

简单地查看新的对偶问题的约束方程,你马上就可以发现这些参数变化多少才可以影响对偶问题的解的可行性,进而分析这些参数变化多少就可以影响原问题解的最优性。

其他应用

我们已经讨论了对偶理论对于灵敏度分析的两个应用,也就是影子价格和对偶单纯形法。正如4.7节和6.2节中描述的那样, $(y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ 说明了各种资源的影子价格,也就说明了如果资源总量 b_i 变化将会如何影响 Z 。结果的分析将在6.7节中做详细的介绍。

总的来说,6.2节中对于原问题和对偶问题的经济解释为灵敏度分析提供了一些有用的信息。

当我们研究 b_i 的变化或者 a_{ij} 的变化的影响时,最初始模型的最优解可能变为超优解(就像表6.10中定义的那样)。如果我们想再次获得最优解的话,对偶单纯形法将会在这个解的基础上被使用(对偶单纯形法将在7.1节介绍)。

我们曾在6.1节中提到过,有的时候直接在对偶问题上使用单纯形法来识别原问题的最优解会更有效。当使用这种方法来寻找解的时候,对于原问题的灵敏度分析将会如下两节所述直接对对偶问题进行操作,然后对原问题互补的基本解进行推断(见表6.11)。由于6.1节与6.3节中所讲述的原问题与对偶问题之间的紧密联系,这种方法与灵敏度分析有直接相关性。



6.6 灵敏度分析的实质

当单纯形法已经被成功使用,并且找到最优解的时候,运筹小组的工作一般来说还没有完成。就像我们在3.3节末尾指出的那样,关于线性规划问题的一个假设就是模型中的所有参数 (a_{ij}, b_i, c_j) 都是固定不变的。而事实上,模型当中的参数值都是对于未来条件的预测的评估。用来评估这些参数所用到的数据,一般来说都很粗糙,不是固定不变的,因此这些最初始的模型中的参数对于那些被评价者来说往往是有一点高,或者有一点低。

因此,成功的经理以及运筹人员应该对那些利用计算机计算出来的最初始的数据保持怀疑,并且仅仅把这些数据当作对一个问题更进一步分析的开始。一个最优解有可能成为真正的最优解,只有在我们建立的数学模型可以真实地反映实际问题的时候它才是有意义的。一个最优的解要想正确地辅助决策,必须是在这个最优解经过其他问题验证可以良好地使用之后。而且,模型当中的参数(尤其是 b_i)有时候是作为物料决策的结果(也就是说某一种资源被用来生产产品的数量),当一些潜在的结果被发现的时候,需要重新对这些决策进行评价。

由于这些原因,所以有必要使用灵敏度分析(sensitivity analysis),利用单纯形法来研究如果参数取其他可能的值对最优解有什么影响。有的时候,有一些参数可以被分配许多值而不影响最优解。但是,同样也有一些参数,这些参数的值的改变将会产生新的最

优解。这种情况有时候可能很严重,因为它可能导致原模型的解变得特别差,有的时候甚至可能是不可行的。

因此,灵敏度分析的一个重要的目的就是识别那些敏感参数(sensitive parameters)(也就是说对于这些参数,不可能改变这个参数的值而不改变最优解)。对于某些不能被归为敏感变量的特定变量,分析这些变量值在什么范围下变化而不会影响最优解,也是十分重要的(我们称这个变化范围为保持最优性的允许变化范围)。有些情况将会影响一个最优 BF 解的可行性。对于这类变量我们还需要判断其变化范围而不影响最优解的可行性(我们称这个范围为参数的允许变化范围)。这个变化范围同样对应于约束方程的影子价格的变化范围。在接下来的一节我们将会讲述获得这些信息所使用的方法。

这样的信息是无价的。第一,它可以识别更重要的参数,所以在做评价的时候对这些参数应更加慎重,并且可以选择一个解,这个解对大多数参数的可能值更加合适。第二,它可以识别哪些参数在研究过程中应该被更密切地监视。如果发现这个参数的真实值超出了允许的变化范围,就应该立即改变方案。

对于一些小问题,要检查变量参数变化的影响,只需要简单地重新运行单纯形法来检验最优解是否发生了改变。当使用电子表格计算的时候这非常简单。Solver 被配置完成,并用它来求最优解的时候,你所需要做的全部事情就是在电子表格中输入你要求的变化,然后再按一下按钮。

但是,对于实际中出现的那些规模更大的问题来说,如果从头开始重新运行单纯形法来研究每一次参数的变化,则会花费过多的计算时间。幸运的是,我们在 5.3 节讨论的内容将会减少我们的计算时间。一个基本的观点是观察的结果立刻就能揭示原模型中的任何改变是如何改变最终单纯形表的(假设单纯形表的计算过程被重复进行)。因此,经过简单的计算来修订单纯形表,我们可以很容易检验原来的最优解是否已经变得不再是最优的(或者不可行)。如果已经变得不是最优或者不可行,那么如果需要的话,就要以当前的单纯形表为初始,继续在它的基础上使用单纯形法来计算最优解。如果模型中的变化不是特别大,只需要很少的几次迭代就可以从这个“改进”的初始单纯形表达到新的最优解。

为了更明确地描述这一过程,考虑下面这种情况。在含有参数 a_{ij} 、 b_i 、 c_j 的线性规划模型中,已经通过单纯形法获得了一个最优解。为了进行灵敏度分析,这些参数中至少有一个需要改变。当发生改变后,用 \bar{b}_i 、 \bar{c}_j 和 \bar{a}_{ij} 表示不同的参数值。因此,用矩阵表示 $b \rightarrow \bar{b}$ 、 $c \rightarrow \bar{c}$ 和 $A \rightarrow \bar{A}$ 改变的模型。

第一步是修订最终单纯形表来反映这些变化。特别是,我们想要找到这样的一个最终单纯形表来作为结果,这个单纯形表是当从新的初始单纯形表开始时,从原初始单纯形表到最终单纯形表的整个运算过程(包括某一行乘以一个数加到另一行上,或者被另一行减去)被重复进行一次所达到的结果(这与重复使用单纯形法不同,因此初始单纯形表的改变会导致运算过程的改变)。我们继续使用表 5.10 中介绍的符号以及公式[(1) $t^* = t + y^* T$ 以及 (2) $T^* = S^* T$], 改变后的单纯形表是从 y^* 和 S^* (未改变的) 中计算出来的,这个新的初始单纯形表如表 6.17 所示。注意到 y^* 和 S^* 放在一起就组成了最终单纯形表中的松弛变量系数。其中, y^* 等于第 0 行的系数,而矩阵 S^* 代表了单纯形表中的其他行。因此,表 6.17 通过简单地使用 y^* 和 S^* 以及初始单纯形表中修订后的数字,说明了最终单纯形表中的其他数字是如何不通过重复使用单纯形法就直接计算出来的。

表 6.17 原模型改变后修订的最终单纯形表

		系 数			右端列
		Z	最初始的变量	松弛变量	
新的初始单纯形表	(0)	1	$-\bar{c}$	$\mathbf{0}$	0
	(1, 2, ..., m)	$\mathbf{0}$	\bar{A}	\mathbf{I}	\bar{b}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
改变后的最终单纯形表	(0)	1	$z^* - \bar{c} = y^* \bar{A} - \bar{c}$	y^*	$Z^* = y^* \bar{b}$
	(1, 2, ..., m)	$\mathbf{0}$	$A^* = S^* \bar{A}$	S^*	$b^* = S^* \bar{b}$

例 (Wyndor Glass 公司模型的变化 1) 为了说明, 假设 3.1 节中 Wyndor Glass 公司问题的第一个变化如表 6.18 所示。

表 6.18 Wyndor Glass 公司问题灵敏度分析原模型以及第一次改变的模型

原模型	改变后模型
$\max Z = [3, 5] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\text{s. t. } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$ $x \geq 0$	$\max Z = [4, 5] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\text{s. t. } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}$ $x \geq 0$

因此, 原模型的变化是 $c_1 = 3 \rightarrow 4, a_{31} = 3 \rightarrow 2$, 以及 $b_2 = 12 \rightarrow 24$ 。图 6.2 展示了变化后的效果。对于原模型, 单纯形法已经找到了最优的 CPF 解(2, 6), 位于两个约束 $2x_2 = 12$ 与 $3x_1 + 2x_2 = 18$ 的交点上。因此, CPF 解从原来的(2, 6)变成了现在的新交点(-3, 12)。而这个新交点对于改变后的模型是不可行的。利用前面介绍的过程可以找到它。而且, 从某种意义上说, 对于那些作图法不可能完成的大问题, 这个方法也是十分有效的。

为了执行这个过程, 我们用矩阵的形式把改变后的模型的参数表示如下

$$\bar{c} = [4, 5], \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}$$

作为结果的新的初始单纯形表在表 6.19 顶部给出。这个单纯形表的下边是原模型的最初单纯形表(第一次在表 4.8 中给出)。我们在表 6.19 中画框的地方代表没有发生改变的部分, 也就是第 0 行(y^*)和其他行中(S^*)的松弛变量系数。因此

$$y^* = [0, 3/2, 1], \quad S^* = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

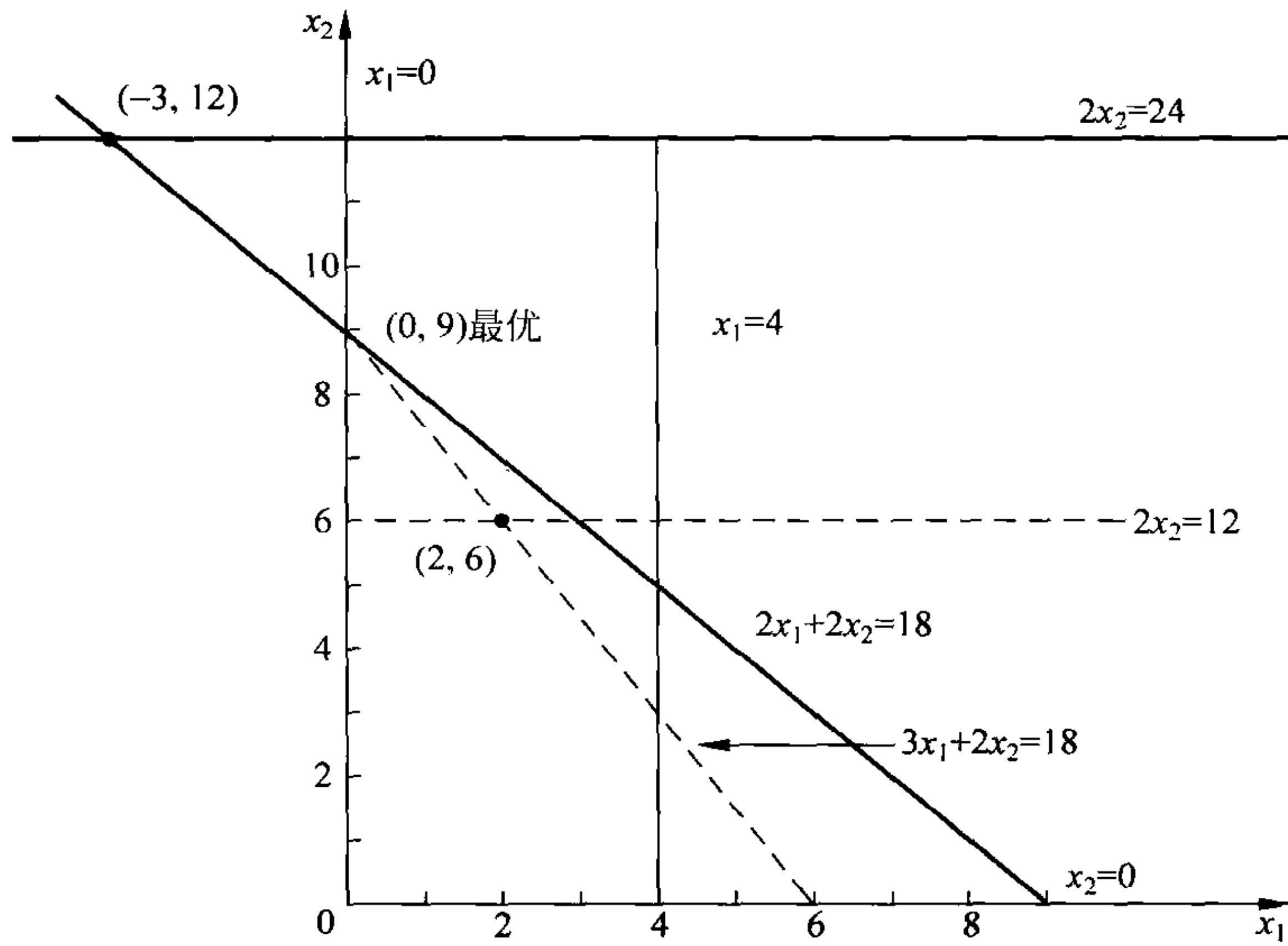


图 6.2 Wyndor Glass 公司例子中角点解从(2,6)变化到(-3,12),
 $c_1 = 3 \rightarrow 4, a_{31} = 3 \rightarrow 2, b_2 = 12 \rightarrow 24$

这些松弛变量的系数经过与单纯形法同样的运算没有发生改变,是由于这些系数在初始单纯形表中没有发生变化。

表 6.19 获取 Wyndor Glass 公司模型第一个改变版本的最终单纯形表

基变量	方程	系 数							右端列
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
新 初 始 单 纯 形 表	Z	(0)	1	-4	-5	0	0	0	0
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	24
	x_5	(3)	0	2	2	0	0	1	18
∴	∴		∴	∴	∴	∴	∴	∴	∴
原 模 型 最 终 单 纯 形 表	Z	(0)	1	0	0	0	3/2	1	36
	x_3	(1)	0	0	0	1	1/3	-1/3	2
	x_2	(2)	0	0	1	0	1/2	0	6
	x_1	(3)	0	1	0	0	-1/3	1/3	2
修 改 后 的 最 终 单 纯 形 表	Z	(0)	1	-2	0	0	3/2	1	54
	x_3	(1)	0	1/3	0	1	1/3	-1/3	6
	x_2	(2)	0	0	1	0	1/2	0	12
	x_1	(3)	0	2/3	0	0	-1/3	1/3	-2

但是,由于初始单纯形表的其他部分发生了变化,导致在最终单纯形表中的其余部分同样发生了变化。利用表 6.17 中给出的公式,我们计算最终单纯形表中其余改变的部分如下

$$z^* - \bar{c} = \left[0, \frac{3}{2}, 1\right] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - [4, 5] = [-2, 0]$$

$$Z^* = \left[0, \frac{3}{2}, 1\right] \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix} = 54$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$b^* = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ -2 \end{bmatrix}$$

这个改变后的最终单纯形表在表 6.19 底部给出。

事实上,我们可以将这些计算过程模式化,以获得改变后的最终单纯形表。由于 x_2 的系数在原模型(单纯形表)中没有发生变化,所以在最终单纯形表中也不会发生变化,我们可以省略对它的计算。其余的一些参数也没有发生变化(a_{11}, a_{21}, b_1, b_3),因此,我们的另一个捷径就是只计算那些在初始单纯形表中发生变化的,而忽略那些在初始单纯形表中没有变化的。特别地,在初始单纯形表中唯一的变化就是 $\Delta c_1 = 1, \Delta a_{31} = -1$,以及 $\Delta b_2 = 12$,所以它们是唯一值得考虑的。这些模式化的计算过程如下,0 和画横线的地方表示不需要计算。

$$\Delta(z^* - c) = y^* \Delta A - \Delta c = \left[0, \frac{3}{2}, 1\right] \begin{bmatrix} 0 & \text{---} \\ 0 & \text{---} \\ -1 & \text{---} \end{bmatrix} - [1, \text{---}] = [-2, \text{---}]$$

$$\Delta Z^* = y^* \Delta b = \left[0, \frac{3}{2}, 1\right] \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix} = 18$$

$$\Delta A^* = S^* \Delta A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \text{---} \\ 0 & \text{---} \\ -1 & \text{---} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \text{---} \\ 0 & \text{---} \\ -\frac{1}{3} & \text{---} \end{bmatrix}$$

$$\Delta b^* = S^* \Delta b = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

把这些增量加入原模型的最终单纯形表中(表 6.19 中间部分),可以得到改变后的最终单纯形表(表 6.19 底部)。

这种增量分析同样提供了一些有用的信息,即最终单纯形表中的变化必须是与初始单纯形表成比例的。我们在下一节中会看到,这个性质是如何帮助我们决定一个给定的参数值,在不改变解的可行性和最优性时的变化范围的。

取得改变后的最终单纯形表之后,我们接下来通过高斯消元法来转化出一个适合的

形式。特别地,对于第 i 行的基变量在第 i 行的系数必须是 1,而在其他行的系数必须是 0 (包括第 0 行)。这样单纯形表可以标识出基解。因此,如果改变违反了这些需求(只有原模型中基变量约束系数改变的时候才会发生),必须做更多的改变来恢复到这种形式。这种恢复是通过高斯消元法进行的,也就是说通过使用单纯形法迭代过程的第三步(见第 4 章),把这些违反规则的变量当做输入的基变量。注意,这些代数运算可能会导致右边列更进一步的改变,所以,只有当使用高斯消元法把它完全恢复到适合的形式以后,才可以从列中读出当前的基本解。

对于这个例子,改变后的最终单纯形表在表 6.20 顶部给出,因为基变量 x_1 这一列的存在,它还不是从高斯消元法得出的规定的格式。特别地, x_1 在它所在行(第三行)的系数是 $2/3$ 而不是 1,而且在第 0 行和第一行有非 0 系数(-2 和 $1/3$)。为了将它恢复成规定的形式,把第三行乘以 $3/2$,然后把这个新得出的第三行分别乘以 2 和 $1/3$,之后加到第 0 行和从第一行减去。于是就可以得出符合规定的形式,如表 6.20 底部所示。这样就可以用这个单纯形表来找出当前基本解。

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-3, 12, 7, 0, 0)$$

表 6.20 利用高斯消元法将 Wyndor Glass 公司模型第一个改变版本
改变后的最终单纯形表转化成合适形式的最终单纯形表

	基变量	方程	系 数					右端项	
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4		x_5
改变后的最 终单纯形表	Z	(0)	1	-2	0	0	$\frac{3}{2}$	1	54
	x_3	(1)	0	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	6
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	12
	x_1	(3)	0	$\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	-2
转化成适合 的形式	Z	(0)	1	0	0	0	$\frac{1}{2}$	2	48
	x_3	(1)	0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	7
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	12
	x_1	(3)	0	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-3

由于 x_1 是负数,所以这个基本解已经不是可行解了。但是,它是超优解(像表 6.10 中定义的那样)。由于第 0 行中的所有系数都是非负的,所以对偶问题可行。因此,如果希望的话,可以在这个单纯形表的基础上,通过使用对偶单纯形法来重新求最优解(IOR Tutorial 中的灵敏度分析包含这一部分)。如图 6.2 所示(忽略松弛变量),只用了一次迭代就从点 $(-3, 12)$ 变到了最优的 CPF 解 $(0, 9)$ (在灵敏度分析中,有时候找出几组参数值对应的最优解会比较有用。这可以帮助决定哪种方案被持续使用)。

如果基本解 $(-3, 12, 7, 0, 0)$ 对于原问题与对偶问题都不可行(也就是说,单纯形表中在第 0 行和右端列都有负值),那么就需要在单纯形表中引入人工变量来帮助建立一个符合形式的初始单纯形表。^①

① 也存在这样一个原问题—对偶问题算法,不需要改变就可以直接应用这样的单纯形表来计算。

一般过程

当一个人测试一个最优解对于原模型中的参数是多么敏感时,一个常用的方法是独立检验每一个参数(或者至少是 b_i 和 c_j)。除了像下一节中所说的那样可以帮助寻找允许的变化范围,这种检验还可以包含改变在初始评价中的参数值为其他可能值(包括范围的终点)。然后我们会研究多个参数同时发生变化(比如改变整个约束方程)的影响。每一次一个参数(或者多个)发生变化时,下面所描述的过程都将会被应用。下面让我们对这个过程进行总结。

(1) 对模型进行修订:按照需求修改模型,为下面的研究做准备。

(2) 对最终单纯形表进行修订:按照表 6.17 中总结的公式对最终单纯形表的结果做改变(见表 6.19 进行说明)。

(3) 转换单纯形表为适合的形式:通过变换,使当前的单纯形表变成适合的形式以找出和评价目前的基本解。

(4) 可行性检验:通过检查所有的基变量在右端列的值是否非负来判断解的可行性。

(5) 最优性检验:检查是否全部的非基变量在第 0 行中的系数仍然都是非负的,来判断这个解的最优性。

(6) 重新最优化:如果这个新的解不满足可行性或者是最优性,则需要以当前的最终单纯形表作为新的初始单纯形表使用单纯形法或者对偶单纯形法来求新的最优解。

在 IOR Tutorial 中标题为灵敏度分析的交互式程序将帮助你有效执行这个过程。在 OR Tutor 中一个同样标题的灵敏度分析的演示为你提供了另一个例子。

对只含两个决策变量的例子,因图解法取代了上述用代数方法进行灵敏度分析。IOR Tutorial 包含一个有效运行图解分析的称为图解法和灵敏度分析的程序。

下一节,我们将讨论如何在原模型上应用上述方法来处理每一类的改变。我们同样会对图形分析的方法进行解释。这些讨论将会通过对 Wyndor Glass 公司模型进行改变来研究。事实上我们将会逐一检查上述各种改变。同时,我们还会结合 6.5 节中介绍的一些对偶理论在灵敏度分析中的应用。



6.7 应用灵敏度分析

灵敏度分析的研究,通常是从改变 b_i (也就是可用于生产各种产品的资源总量)开始的。之所以从改变这个参数开始,是因为实际上这个参数更有弹性,对于这个参数的调整比其他参数更容易。正如 4.7 节和 6.2 节中对于对偶变量(y_i)经济上的解释,影子价格对于决定如何做出改变是非常有用的。

情形 1: 改变 b_i

假设,对于当前模型的改变仅仅局限在改变模型中的一个或者多个 b_i 参数,这里 $i=1, 2, \dots, m$ 。在这种情况下,最终单纯形表中的唯一改变就是右端列。因此,在这种情况下,单纯形表仍然满足从高斯消元法中得到的适合的形式,而非基变量在第 0 行中的系数仍然是非负的。因此,对于单纯形表形式的转化和最优性检验这两个步骤都可以省略。在右端列

改变之后,现在唯一的问题就是这一列中基变量的值是否仍然是非负的(可行性检验)。

如同表 6.17 中所展示的那样,对于 b_i 向量从 b 改变到 \bar{b} ,最终单纯形表中计算新的右端列的公式为

$$\text{最终单纯形表第 } 0 \text{ 行右端 } Z^* = y^* \bar{b}$$

$$\text{最终单纯形表第 } 1 \text{ 到第 } m \text{ 行右端 } b^* = S^* \bar{b}$$

(观察表 6.17 底部,最终单纯形表中没有发生改变的 y^* 以及 S^*)第一个方程的经济解释和 6.2 节开始时所介绍的关于对偶变量的经济解释是一样的。向量 y^* 给出了对偶变量的最优值,这个向量也被解释为各种资源的影子价格。特别地,当 Z^* 代表使用最优解 x^* 所获得的最优利润, b_i 代表第 i 种可用资源的总量的时候, y_i^* 代表每增加一个单位的 b_i 可以带来多少利润(b_i 很小的增加)。

例(Wyndor Glass 公司模型的变化 2) 灵敏度分析是从检查 3.1 节中原始的 Wyndor Glass 公司模型的对偶变量的最优值开始的($y_1^* = 0, y_2^* = 3/2, y_3^* = 1$)。这些影子价格给出了目前可以用来生产产品的第 i 种资源(第 i 个车间的可用生产能力)的边际价值,这个边际价值用 Z (千美元/周)来解释。如 4.7 节中所讨论的(见图 4.8),每增加一单位的第 2 种资源可以从全部多生产的产品中获得 1 500 美元/周的增加利润(y_2^* 是 1 000 美元/周)。利润的增加是在不影响解的可行性的情况下产生的(同样也不影响 y_i^* 的值)。

因此,运筹小组调查了目前对这些资源的其他使用的边际利润,以决定是否有利利润低于 1 500 美元/周的。调查显示,一种旧产品的利润很低。这种产品的生产率已经被缩减到很低的水平以适应其市场费用。但是,它完全可以停产,这样可以增加 12 单位的第 2 种资源来生产别的产品。因此,下一步就是通过改变生产新产品可以增加的利润。这一改变将线性规划问题中的 b_2 从 12 改变到 24。图 6.3 中改变后的图形效果包括从角落点 $(2,6)$ 改变到 $(-2,12)$ 。

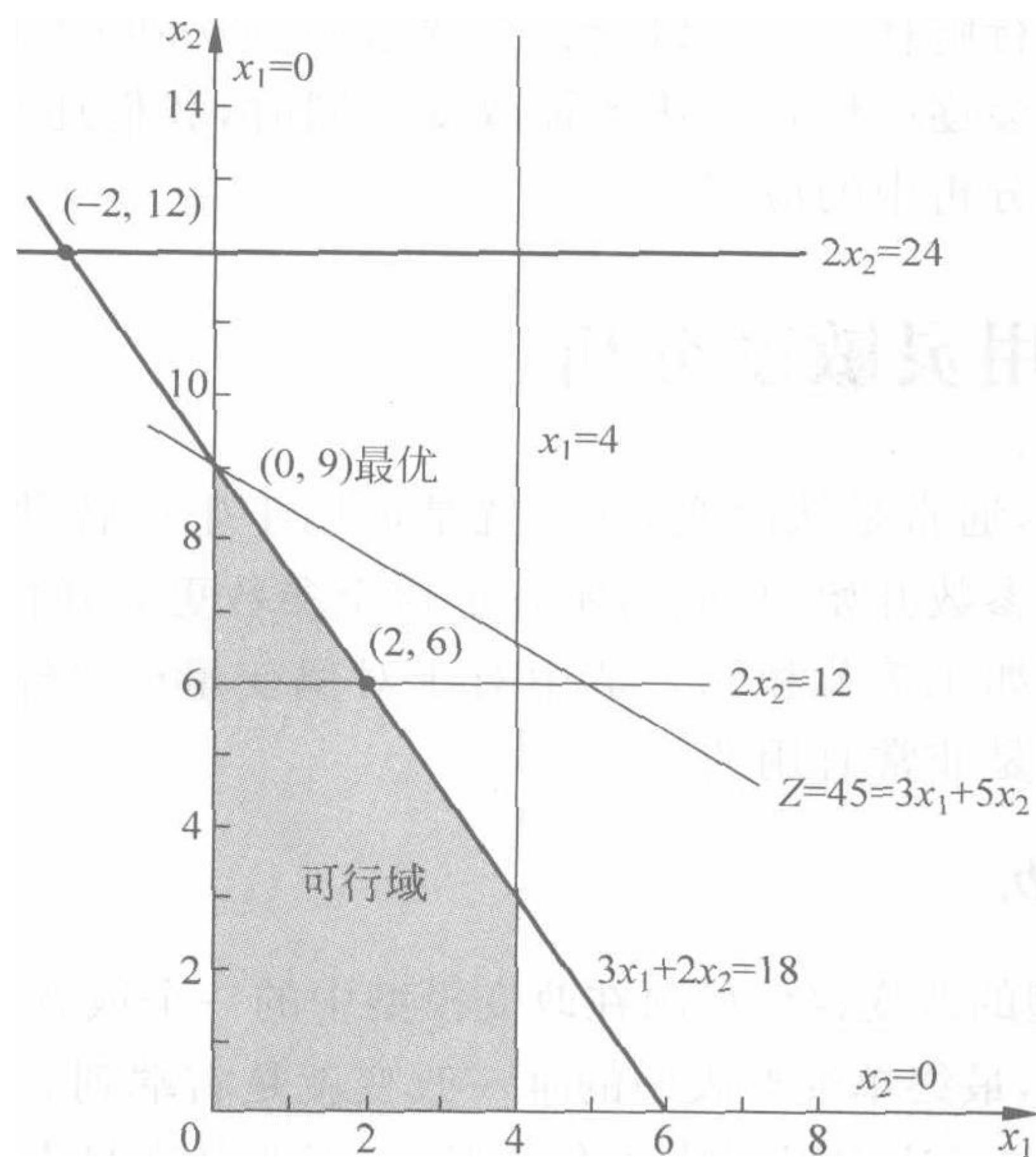


图 6.3 Wyndor Glass 公司模型变化 2 的可行域,当 $b_2 = 12 \rightarrow 24$

(注意,该图和图 6.2 不同,图 6.2 描绘了 Wyndor Glass 公司模型的第 1 种变化。而这里约束方程 $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ 并没有发生改变)

因此,对于 Wyndor Glass 公司模型的第 2 种变化版本,需要对模型进行的唯一修订就是改变向量 b_i 的值

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} \rightarrow \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}$$

所以,只有 b_2 是新值。

对于第 2 个变化版本的分析

当表 6.17 中介绍的内容被应用后,这一变化在原始最终单纯形表(表 6.19 中间部分)中对 b_2 产生的影响是右端列进行了如下的变化

$$Z^* = \mathbf{y}^* \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0, \frac{3}{2}, 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix} = 54$$

$$\mathbf{b}^* = \mathbf{S}^* \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \text{所以} \quad \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ -2 \end{bmatrix}$$

同样,原模型中唯一的变化是 $\Delta b_2 = 24 - 12 = 12$,使用增量分析可以更快地计算出这些值。增量分析只包含计算改变原模型给单纯形表带来的增量,之后将这些计算得到的增量加到原模型的值上。

$$\Delta Z^* = \mathbf{y}^* \Delta \mathbf{b} = \mathbf{y}^* \begin{bmatrix} \Delta b_1 \\ \Delta b_2 \\ \Delta b_3 \end{bmatrix} = \mathbf{y}^* \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{b}^* = \mathbf{S}^* \Delta \mathbf{b} = \mathbf{S}^* \begin{bmatrix} \Delta b_1 \\ \Delta b_2 \\ \Delta b_3 \end{bmatrix} = \mathbf{S}^* \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

因此,使用 \mathbf{y}^* 的第 2 部分以及 \mathbf{S}^* 的第 2 列,唯一需要计算的是:

$$\Delta Z^* = \frac{3}{2}(12) = 18, \quad \text{所以} \quad Z^* = 36 + 18 = 54$$

$$\Delta b_1^* = \frac{1}{3}(12) = 4, \quad \text{所以} \quad b_1^* = 2 + 4 = 6$$

$$\Delta b_2^* = \frac{1}{2}(12) = 6, \quad \text{所以} \quad b_2^* = 6 + 6 = 12$$

$$\Delta b_3^* = -\frac{1}{3}(12) = -4, \quad \text{所以} \quad b_3^* = 2 - 4 = -2$$

这里的原始值是从原始的最终单纯形表的右端列中取得的(表 6.19 的中间部分)。这个结果表示,只需要将原最终单纯形表的右端列改变成新的值,就可以得到新的单纯形表。

因此,当前基本解(原最优解)的值变为

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-2, 12, 6, 0, 0)$$

这个解因为有负值的存在已经不满足可行性检验了。在这里,可以以这个新的单纯形表为基础,使用对偶单纯形法,来寻找新的最终单纯形表。这个方法只需要一步的迭代就可以生成新的最终单纯形表,见表 6.21(也可以从开始时使用单纯形法,经过一步的迭代得到这个单纯形表)。这个单纯形表给出的新的最优解是

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 9, 4, 6, 0)$$

最优目标函数值是 $Z=45$ 。因此,比原最优解 $Z=36$ 增加了 9 个单位(9 000 美元/周)。 $x_4=6$ 在这个解中的 12 个单位新增加的第 2 种资源中有 6 个单位没有被使用。

表 6.21 Wyndor Glass 公司模型变化 2 的数据

模型参数		重新优化后的最终单纯形表						
基变量	方程	系数					右端项	
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4		x_5
$c_1=3, c_2=5, (n=2)$								
$a_{11}=1, a_{12}=0, b_1=4$								
$a_{21}=0, a_{22}=2, b_2=24$								
$a_{31}=3, a_{32}=2, b_3=18$								
Z	(0)	1	9/2	0	0	0	5/2	45
x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
x_2	(2)	0	3/2	1	0	0	1/2	9
x_4	(3)	0	-3	0	0	1	-1	6

在 $b_2=24$ 这个结果的基础上,相应的不赢利的旧产品将会被停产,因而闲置的 6 个单位的第 2 种资源将被储存起来供将来应用。由于 y_3^* 仍然是正的,类似地,需要对第 3 种资源的分配进行研究,但是研究的结果是保留目前的分配方式。因此,可以将在该点上的(第 2 个变化版本)当前的线性规划模型的参数值以及最优解在表 6.21 中给出。这一模型将被用来作为研究本节以后其他改变的起始点。但是,在开始其他例子之前,让我们再从更宏观的角度看一下当前的例子。

应用案例

太平洋木材公司(PALCO)是一家有大量木材资源的公司,其总部位于加利福尼亚州斯科舍(Scotia)。该公司拥有超过 20 万英亩的高产林,为位于加利福尼亚北部的共堡县的 5 个工厂提供原料。这片林地包括世界上最为壮丽的一片红杉林——被以极低的价格或者是赠送给了政府,作为公园保护起来。PALCO 必须在严格的森林保护法下精细地经营剩余森林以维持木材生产。由于 PALCO 的林地还是许多野生动物——包括诸如斑点猫头鹰和斑纹海雀等濒危动物——的家园, PALCO 必须严格遵守联邦濒危动物保护法。

为了得到持续性的生产计划, PALCO 的管理团队与一个运营咨询团队签约开发了一个历时 120 年、包括 12 个阶段的长期森林生态系统管理计划。运营团队通过构建和应用一个线性规划模型来优化公司的整个森林运作,在满足多种约束的同时优化公司收益。模型非常巨大,包括大约 8 500 个函数约束和 353 000 个决策变量。

应用该线性规划模型的主要挑战是在决定应该采用什么参数时有大量的不确定性。造成这些不确定性的主要原因是市场供应和需求、伐木成本及环境法规的连续性波动。

因此,运营团队大量应用了详细敏感度分析方法。最终得到的稳定生产计划增加了公司的净现值,金额超过3.98亿美元,同时实现了与野生动物栖息地更好的融合。

资料来源: L. R. Fletcher, H. Alden, S. P. Holmen, D. P. Angelis, and M. J. Etzenhouser: "Long-Term Forest Ecosystem Planning at Pacific Lumber," *Interfaces*, 29(1): 90-112, Jan.-Feb. 1999. (以下网址提供本文的链接: www.mhhe.com/hillier.)

约束右端项的允许变化范围

虽然 $\Delta b_2 = 12$ 表明对 b_2 来说增加这么多单位的量,在保持 x_1, x_2, x_3 作为基变量时,对于保持解的可行性来说增加的量太大了。但是,增量分析马上可以帮助我们得出增加多少可以不改变解的可行性。特别要注意

$$b_1^* = 2 + \frac{1}{3} \Delta b_2$$

$$b_2^* = 6 + \frac{1}{2} \Delta b_2$$

$$b_3^* = 2 - \frac{1}{3} \Delta b_2$$

这三个量分别是对于这个基本解, x_1, x_2, x_3 各自的值。因为这三个值都是非负的,这个解仍然是可行的,也是最优的。

$$2 + \frac{1}{3} \Delta b_2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{3} \Delta b_2 \geq -2 \Rightarrow \Delta b_2 \geq -6$$

$$6 + \frac{1}{2} \Delta b_2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \Delta b_2 \geq -6 \Rightarrow \Delta b_2 \geq -12$$

$$2 - \frac{1}{3} \Delta b_2 \geq 0 \Rightarrow 2 \geq \frac{1}{3} \Delta b_2 \Rightarrow \Delta b_2 \leq 6$$

因此,由于 $b_2 = 12 + \Delta b_2$,那么只要 $-6 \leq \Delta b_2 \leq 6$,亦即 $6 \leq b_2 \leq 18$ 的时候,解就仍然是可行的(可利用图 6.3 验证)。正如 4.7 节介绍的那样,这个 b_2 的变化范围被称为允许变化范围。

对于任意的 b_i ,如 4.7 节所述,允许变化范围就是保持当前最优 BF 解仍然可行(包含基变量值的调整)的值的范围。^① 因此,只要 b_i 的变化在这个允许的范围之内, b_i 的影子价格对于评价 b_i 的变化对 Z 的影响仍然是有效的(假设 b_i 值的变化是模型中唯一的变化)。对于基变量调整的值是通过公式 $b^* = S^* \bar{b}$ 计算出来的。因此,允许变化范围的计算最后就建立在找到 b_i 的变化范围上。

许多线性规划软件包都是利用这种技术来自动生成每一个 b_i 的允许变动范围的(在第二种情况和第三种情况我们将介绍类似的方法,这种方法也是自动生成在保持最优性时 c_j 的允许变动范围)。第 4 章我们在图 4.10 和 A4.2 中向大家展示了 Excel 和 LINDO 相应的输出结果。表 6.22 总结了关于 Wyndor Glass 公司原模型中 b_i 的相同的输出结果。例如,对于 b_2 来说,允许的增加值与减少量都是 6,也就是 $-6 \leq \Delta b_2 \leq 6$ 。前面的分析说明了这些值是如何计算出来的。

① 当当前模型中存在多个最优的 BF 解时(b_i 发生改变之前),我们这里所指的是利用单纯形法得到的解。

分析约束右端项同时变化

当多个 b_i 的值同时发生变化的时候,同样可以利用公式 $b^* = S^* \bar{b}$ 来得到最终单纯形表中约束右端项的变化。如果所有这些约束右端项都是非负的,可行性检验表明这个改变发生后的解仍然是可行的。由于第 0 行是不改变的,所以通过可行性检验意味着这个解仍然是最优的。

虽然这种方法在揭示一组 b_i 的同时发生变动可以带来多大的影响上做得很好,但是它没有给出很多关于在保持解的可行性的同时这组 b_i 可以变化多少的信息。作为优化后分析的一部分,一个组织的管理可能对研究各种关于约束右端项变化(也就是用于生产产品的资源总量)有什么效果很感兴趣。除了研究某种特定的改变,管理者可能还想研究约束右端项中,一部分变量增加而另一部分减少的情况。影子价格对于这样的研究是非常重要的。但是,影子价格对于评价固定范围内的变化对 Z 的影响仍然是很有效的。允许变动范围给出了在其他 b_i 没有同时发生改变时这个 b_i 可以变动的范围。那么,当很多 b_i 同时发生变动的时候,允许变动范围又是什么呢?

通过下面的百分之百规则可以部分地回答这个问题,该规则组合各个 b_i 的允许变动范围, b_i 的变动范围在表 6.22 的最后两列给出。

表 6.22 对于 Wyndor Glass 公司模型约束右端项灵敏度分析的典型软件的输出

约束	影子价格	当前的右端项	允许增加	允许减少
车间 1	0	4	∞	2
车间 2	1.5	12	6	6
车间 3	1	18	6	6

对于约束右端项同时改变的百分之百规则

只要改变不是很大,影子价格对于预测几个约束方程中约束右端项的同时改变带来的影响仍然是有效的。为了检查这样的变化是否足够小,我们可以计算约束右端项的变化占其允许变动范围的百分比。如果这些百分比之和不超过 100%,那么影子价格仍然是可用的(如果和超过了 100%,那么是否仍然可用就不好说了)。

例(Wyndor Glass 公司模型的变化 3) 为了说明这个规则,我们以 Wyndor Glass 公司模型的第 3 个变化版本为例。这个版本对约束右端项进行了如下的改变

$$b = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} \rightarrow \bar{b} \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \\ 15 \end{bmatrix}$$

对于这种情况的百分之百规则计算如下:

$$b_2: 12 \rightarrow 15 \quad \text{允许增加的百分比} = 100 \times \left(\frac{15-12}{6} \right) = 50\%$$

$$b_3: 18 \rightarrow 15 \quad \text{允许减少的百分比} = 100 \times \left(\frac{18-15}{6} \right) = 50\%$$

$$\text{总和} = 100\%$$

由于和刚好是 100% 而没有超出 100%，因此，影子价格对于预测这些变化对 Z 的影响仍然是有效的。特别地，由于 b_2 和 b_3 的影子价格分别是 1.5 和 1，所以 Z 最终改变的结果是

$$\Delta Z = 1.5(3) + 1(-3) = 1.5$$

因此， Z^* 将从 36 增加到 37.5。

图 6.4 给出了这个变化后的模型的可行域(虚线标识出改变前模型约束边界的初始位置)。现在的最优解是 CPF 解 $(0, 7.5)$ 。

计算 $Z = 3x_1 + 5x_2 = 0 + 5(7.5) = 37.5$ 。

这与影子价格预测的结果相同。但是，请注意，一旦 b_2 增加后超过 15 或者 b_3 减少低于 15，那么允许变动范围的总百分比将超过 100%。这将导致原来最优解落到 x_2 轴线的左边 ($x_1 < 0$)。所以，这个新的非可行解就不再是最优的了。因此，原来的影子价格对于预测新的目标函数值 Z^* 就不再有效了。

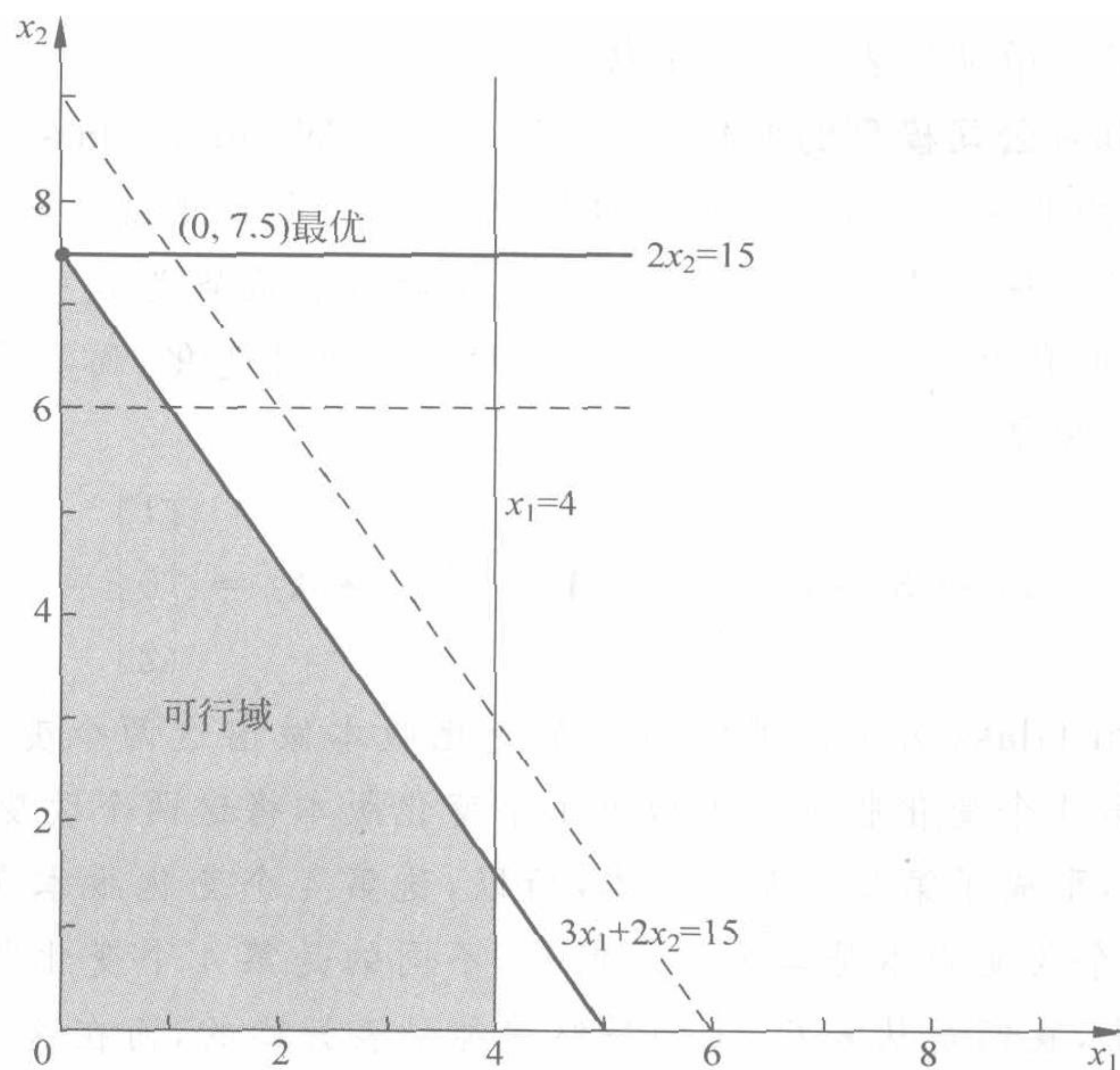


图 6.4 将 $b_2 = 12$ 变为 15 以及将 $b_3 = 18$ 变为 15 后的 Wyndor Glass 公司模型变化 3 版本的可行域

情形 2a 改变非基变量系数

考虑最优解的最终单纯形表中的一个非基变量 x_j (j 固定)。在现在讨论的这种情况下，模型唯一的变化就是一个或者多个变量的系数—— $c_j, a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$ 发生了变化。因此，用 \bar{c}_j, \bar{a}_{ij} 来表示这些参数的新值；用 \bar{A}_j (矩阵 \bar{A} 中的列) 来表示包含 \bar{a}_{ij} 的向量。对于这个改变的模型，我们有 $c_j \rightarrow \bar{c}_j, A_j \rightarrow \bar{A}_j$ 。

正如 6.5 节开始的时候讲述的，对偶理论提供了一种非常简单的方法来检查这种改变。特别地，如果对偶问题中互补的基本解 y^* 仍然满足改变后对偶中的约束，那么原模

型中原问题的最优解仍然是最优的。因此,如果 y^* 不再满足对偶中的约束,那么它就不再是最优的了。

如果最优解改变了而你又想寻找新的最优解,你可以很容易做到。只需要改变最终单纯形表中的 x_j 列。特别地,利用表 6.17 中的公式

$$\text{最终单纯形表中 } x_j \text{ 在第 } 0 \text{ 行的系数: } z_j^* - \bar{c}_j = y^* \bar{A}_j - \bar{c}_j$$

$$\text{最终单纯形表中 } x_j \text{ 在第 } 1 \text{ 行到第 } m \text{ 行的系数: } A_j^* = S^* \bar{A}_j$$

由于当前基本解不再是最优的,新的 $z_j^* - c_j$ 在第 0 行将会是一个负数,所以以 x_j 作为初始单纯形表中的基变量,重新开始单纯形法。

注意,这一过程就是 6.6 节总结的过程。由于对最终单纯形表的改变只发生在非基变量 x_j 上,所以步骤三和步骤四(转化成适合的形式以及可行性检验)由于与问题不相关,因此被减掉了。步骤五(最优性检验)在步骤一之后被一个更快的方法所代替。如果这个检验说明最优解已经发生了改变,而且你想寻找新的最优解,这时候才需要使用步骤二和步骤六(修订最终单纯形表和重新最优化)。

例(Wyndor Glass 公司模型的变化 4) 因为 x_1 是 Wyndor Glass 公司模型的第 2 个变化版本最优解中的非基变量,所以灵敏度分析的下一个步骤就是检查改变后 x_1 的系数,决定继续生产第一种产品是否明智。通过将参数重新设置为 $c_1=4$ 以及 $a_{31}=2$ 可能使生产第一种产品更有吸引力。下边我们同时考虑这两种变化,而不是一个一个地单独考虑。因此,这些变化是

$$c_1 = 3 \rightarrow \bar{c}_1 = 4, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow \bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

通过对 Wyndor Glass 公司模型的第 2 个变化版本做出这两个变化得到了 Wyndor Glass 公司模型的第 4 个变化版本。因为第 1 个变化版本将这两个改变与 $b_2=12 \rightarrow 24$ 这个改变组合在一起,形成了第 2 个变化版本,所以,这第 4 个变化版本实际上与 6.6 节以及图 6.2 中的第一个改变版本是等价的。但是,不同的是第 4 个变化版本是从第 2 个版本变化而来的,因此,我们是从表 6.21 的最终单纯形表开始的,而在这里 x_1 是非基变量。

a_{31} 的改变导致了可行域从图 6.3 变成了图 6.5。 c_1 的变化使目标函数从 $Z=3x_1+5x_2$ 变成了 $Z=4x_1+5x_2$ 。如图 6.5 所示,最优目标函数 $Z=45=4x_1+5x_2$ 仍然通过当前最优解(0,9),所以在经过了 c_1 和 a_{31} 的改变之后它仍然是最优的。

为了通过对偶理论仍然可以得到相同的结论, c_1 和 a_{31} 的改变导致了对偶问题当中一个约束方程的变化。这个约束方程是 $a_{11}y_1+a_{21}y_2+a_{31}y_3 \geq c_1$ 。这个改变的约束方程以及 y^* (表 6.21 第 0 行中的松弛变量系数)如下

$$y_1^* = 0, \quad y_2^* = 0, \quad y_3^* = 5/2$$

$$y_1 + 3y_3 \geq 3 \rightarrow y_1 + 2y_3 \geq 4$$

$$0 + 2\left(\frac{5}{2}\right) \geq 4$$

由于 y^* 仍然满足改变后的约束方程,所以当前的最优解仍然是最优的。

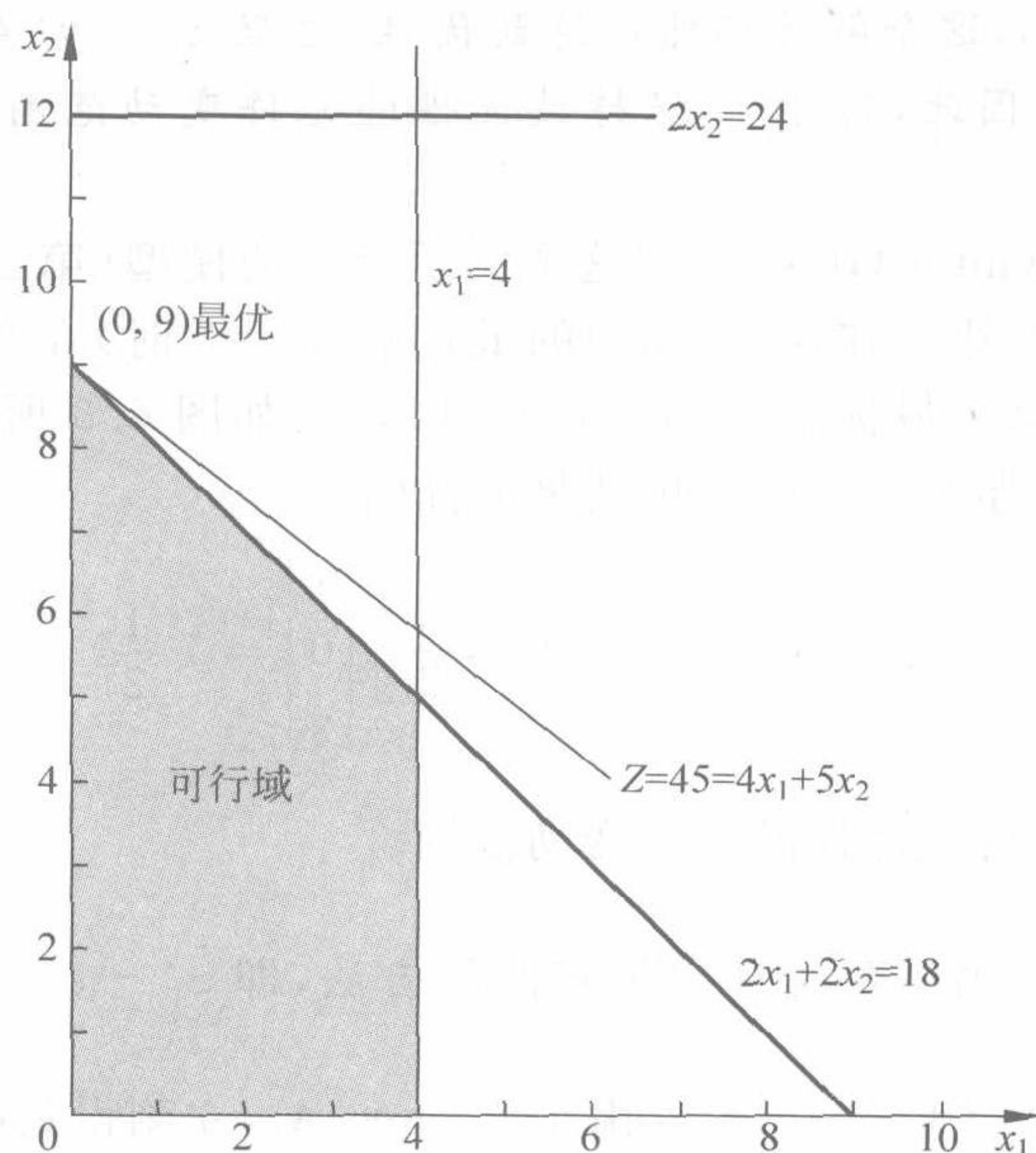


图 6.5 将第 2 个变化版本中的 $a_{31}=3$ 变为 2 以及将 $c_1=3$ 变为 4 后的 Wyndor Glass 公司模型变化 4 版本的可行域

由于这个解仍然是最优的,所以没有必要在最终单纯形表中修改 x_j 列(步骤二)。不过,为了解释,我们说明如下:

$$z_1^* - \bar{c}_1 = \mathbf{y}^* \bar{\mathbf{A}}_1 - c_1 = \left[0, 0, \frac{5}{2} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - 4 = 1$$

$$\mathbf{A}_1^* = \mathbf{S}^* \bar{\mathbf{A}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$z_1^* - \bar{c}_1 \geq 0$ 这一事实再一次说明当前解的最优性。因为 $z_1^* - \bar{c}_1$ 是改变后的对偶问题中约束方程的剩余变量,通过这种方法来验证解的最优性与上一种方法等价。

这样,我们对于第四种改变的分析就结束了。由于对 x_1 系数做出更大的改变是不现实的,因此,运筹小组认为,这些系数是当前模型中的不敏感参数。因此,对于接下来的分析,他们仍然保持表 6.21 中给出的 $c_1=3$ 和 $a_{31}=3$ 。

非基变量目标函数系数的允许变动范围

我们刚刚说明了如何在模型中分析非基本变量 x_j 的系数同时发生改变的情况。一般来说,在实践中灵敏度分析只研究一个参数(c_j)变化的影响也是很常见的。正如在 4.7 节中介绍的,我们需要将上面介绍的方法模式化来寻找 c_j 可以保持解的最优性的允许变化范围。

对于任意一个 c_j ,我们回忆 4.7 节中保持最优性的允许变化范围就是使当前的最优解(当前模型在 c_j 改变之前通过单纯形法计算出来的)仍然保持最优性(假设模型中 c_j 的改变是目前模型中的唯一改变)的参数值的变化范围。当 x_j 是这个解中的一个非基变量

的时候,只要 $z_j^* - c_j \geq 0$,这个解就仍然保持最优性,这里 $z_j^* = \mathbf{y}^* \mathbf{A}_j$ 是固定的、不会被 c_j 值的任何变化所影响。因此,对于 c_j 保持最优性的允许变动范围可以按公式 $c_j \leq \mathbf{y}^* \mathbf{A}_j$ 来计算。

举例来说,考虑 Wyndor Glass 公司这个例子当前的模型(第二个改变版本),这个模型被总结在表 6.21 的左边。在这里,当前的最优解($c_1 = 3$ 时)在右边给出。当只考虑决策变量 x_1, x_2 的时候,这个最优解是 $(x_1, x_2) = (0, 9)$,如图 6.3 所示。当只有 c_1 改变的时候,如满足如下条件,那么这个解就仍然是最优的。

$$c_1 \leq \mathbf{y}^* \mathbf{A}_1 = \left[0, 0, \frac{5}{2} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 7 \frac{1}{2}$$

所以, $c_1 \leq 7 \frac{1}{2}$ 是保持最优性的允许变动范围。

在表 6.21 中记录了另一个实现向量乘法的方法,即 $z_1^* - c_1 = \frac{9}{2}$ (第 0 行中 x_1 的系数),当 $c_1 = 3$ 时,有 $z_1^* = 3 + \frac{9}{2} = 7 \frac{1}{2}$ 。由于 $z_1^* = \mathbf{y}^* \mathbf{A}_1$,立刻得到同样的允许变动范围。

图 6.3 从图形的角度给出了为什么 $c_1 \leq 7 \frac{1}{2}$ 是允许变动范围。 $c_1 = 7 \frac{1}{2}$ 时,目标函数变成 $Z = 7.5x_1 + 5x_2 = 2.5(3x_1 + 2x_2)$,所以,最优目标线将会位于图中约束边界线 $3x_1 + 2x_2 = 18$ 的顶部。因此,在这个允许变动范围的终点,我们有多组最优解,这些最优解组成了点 $(0, 9)$ 和点 $(4, 3)$ 之间的线段。如果 c_1 有所增加 ($c_1 > 7 \frac{1}{2}$),那么只有 $(4, 3)$ 是最优的。因此,我们需要 $c_1 \leq 7 \frac{1}{2}$ 来使 $(0, 9)$ 保持最优。

IOR Tutorial 包含了一个名为图形方法与灵敏度分析的程序,这个程序可以帮助你很有效地实现这类图形分析工作。

对于任意的非基决策变量 x_j , $z_j^* - c_j$ 有时候表示对于 x_j 成本的减少,因为它是最小的产量,通过降低第 j 种产品的单位成本使得第 j 种产品值得生产(从 0 增加到 x_j)。将 c_j 解释成第 j 种产品带来的单位利润(因此降低单位成本增加 c_j 相等),因此, $z_j^* - c_j$ 的值是保持当前 BF 解仍然是最优的允许 c_j 增加的最大值。

被线性规划软件包收集起来的灵敏度分析的信息,一般来说包含成本的降低以及对于目标函数中的每一个系数保持最优的允许变动范围(表 6.22 中展示的各种信息)。这被展现在关于 Excel Solver 和 LINDO 的图 4.10、A4.1 和 A4.2 中。表 6.23 中对于当前的模型(第二个改变版本)以一种典型的形式展示这些信息。最后三列是用来计算保持最优性的每一个系数的允许变动范围,所以这些允许变动范围是

$$c_1 \leq 3 + 4.5 = 7.5$$

$$c_2 \geq 5 - 3 = 2$$

正如我们在 4.7 节中讨论的那样,如果任何一个允许增加或者减少的量变为 0,就标志着这个表中给出的最优解是众多最优解中唯一的一个。在这种情况下,对于系数做出任何微小的改变,将会对原模型生成一个新的 CPF 最优解。

迄今,我们讨论了如何计算表 6.23 中给出的关系非基变量的各种信息。对于一个基变量,比如 x_2 ,减少的成本自动是 0。我们将会讨论第三种情况,也就是当 x_j 是一个基变量的时候,如何获得为保持最优性 c_j 的允许变动范围。

表 6.23 Wyndor Glass 公司模型目标函数系数采取变化 2 时灵敏度分析的软件输出结果

变量	值	成本降低	当前系数	允许增量	允许减量
x_1	0	4.5	3	4.5	∞
x_2	9	0	5	∞	3

分析目标函数中系数同时发生变化

如果忽略 x_j 是一个基变量还是一个非基变量,当目标函数系数中只有一个发生改变时,保持最优性的 c_j 的允许变动范围才是可用的。但是,当目标函数中多个系数同时发生改变的时候,可以通过使用百分之百原则来确定原始解是否仍然保持最优。这与约束右端项同时改变时所使用的百分之百原则非常相似,这里的百分之百原则将每一个 c_j 的允许变动(增加或减少)组合起来,每一个 c_j 的允许变动范围在类似表 6.23 的一张表的后两列给出。

目标函数系数同时发生变化的百分之百规则。 如果目标函数系数同时发生变化,为每一个系数计算它的变化占允许变动范围的百分比。如果这些百分比之和没有超过百分之百,那么原始的最优解仍然是最优的(如果超过了百分之百,则无法确定它是否仍然是最优的)。

通过使用表 6.23(并参考图 6.3),百分之百规则说明,即使我们同时将 c_1 从 3 增加,并且将 c_2 从 5 减少,只要变化不是特别大,那么(0,9)这个解仍然是 Wyndor Glass 公司模型的第二个改变版本的最优解。举例来说,如果 c_1 增加了 1.5(允许变动范围的 $33\frac{1}{3}\%$),那么 c_2 最多可以减少 2(允许变动范围的 $66\frac{2}{3}\%$)。同样,如果 c_1 增加了 3(允许变动范围的 $66\frac{2}{3}\%$),那么 c_2 最多可以减少 1(允许变动范围的 $33\frac{1}{3}\%$)。这个最大的改变值将目标函数修订为 $Z=4.5x_1+3x_2$ 或者 $Z=6x_1+4x_2$,这导致图 6.3 中最优目标函数线顺时针方向旋转直到与约束边界线 $3x_1+2x_2=18$ 重合。

一般来说,当目标函数系数同方向变化的时候,可能百分比之和会超过百分之百,但是却没有改变最优性。我们将会情况 3 中的结尾给出这样一个例子。

情形 2b: 引入新变量

在解决了最优解之后,我们可能会发现,线性规划公式没有考虑到全部的变化。如果生产一种新的产品,将会在原模型中加入一个新的变量,并给这个变量配合适当的系数以及约束方程。于是,就产生了情况 2b。

处理这种问题的一个简单的方法与处理情况 2a 一样。可以通过假设这个新增加的变量 x_j 原来就存在于原模型中,只不过它的系数全都是 0(所以它们在最终单纯形表中也是 0),这时 x_j 在当前的 BF 解中是一个非基变量。因此,如果我们将这些 0 系数改变

成目前的真实系数,那么接下来的过程就与情况 2a 完全一样。

特别地,如果你需要检查当前的解是否仍然是最优的,你所需要做的全部工作就是检查互补的基本解 y^* 是否满足与这个新增加的变量相对应的对偶约束方程。这个方法我们在 6.5 节中已经介绍过了。

情形 3: 改变基变量系数

现在假设我们考虑的 x_j 是一个最优解所对应的最终单纯形表中的基变量。情况 3 假设现在对于模型的唯一变化就出现在这个基变量上。

因为要求单纯形表要拥有适合的形式,因此情况 3 和情况 2a 不同。这个要求允许非基变量所对应列的内容可以是任何形式,所以它不影响情况 2a。但是,对于情况 3,基变量 x_j 在单纯形表中它所对应的行上的系数为 1,而且其他行上的系数(包括第 0 行)为 0。因此,在最终单纯形表中对 x_j 列计算完毕后^①,需使用高斯消元法将单纯形表转化成像表 6.20 那样的适当形式。同样,这一步骤可能会改变当前基本解中的值,因此可能导致这个解不可行或者不是最优的(所以需要重新最优化)。因此,6.6 节中总结的全部过程在情况 3 中都会被用到。

在使用高斯消元法之前,对于 x_j 列数值的修订所需要用到的公式与情况 2a 相同,这些公式总结如下:

$$\text{最终单纯形表中 } x_j \text{ 在第 0 行的系数: } z_j^* - \bar{c}_j = y^* \bar{A}_j - \bar{c}_j$$

$$\text{最终单纯形表中 } x_j \text{ 在第 1 行到第 } m \text{ 行的系数: } A_j^* = S^* \bar{A}_j$$

例(Wyndor Glass 公司模型的变化 5) 对于表 6.21 中 Wyndor Glass 公司模型的第 2 个变化版本,由于 x_2 是一个基变量,因此,对它的系数的灵敏度分析满足情况 3。给定当前最优解($x_1=0, x_2=9$),第二种产品是唯一需要生产的新产品,而且它的生产率会相当高。所以,现在的一个关键问题就是,在最开始得到当前模型中(第 2 个变化版本)的 x_2 系数时,对第二种产品的吸引力是否给予了过高的评价,所以才得到这个结论。对于这个问题,可以通过检验这些系数可能的、最悲观的情况来回答,也就是令 $c_2=3, a_{22}=3$ 并且 $a_{32}=4$ 。因此,需要研究的变化(Wyndor Glass 公司模型的第 5 个变化版本)就是

$$c_2 = 5 \rightarrow \bar{c}_2 = 3, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \bar{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

这些变化在图像上出现的影响就是使图 6.3 中的可行域演变成图 6.6 中的可行域。在图 6.3 中的最优解是 $(x_1, x_2) = (0, 9)$, 这个点是一个角落点,位于 $x_1=0$ 与约束边界线 $3x_1+2x_2=18$ 交点上。伴随着约束方程的改变,图 6.6 中相应的角点解变成了 $(0, 9/2)$ 。但是,这个解不再是最优的了。我们可以看到对应新的目标函数 $Z=3x_1+3x_2$ 产生了一

^① 对于那些还有些迷惑的读者,我们应该指出在情形 3 中一个可能的陷阱。特别地,这些变化可能破坏初始单纯形表中基变量系数列的线性关系。这种情况会发生是因为基变量 x_j 在最终单纯形表中的系数在这一点上变成了 0。在这样的情况下必须对情形 3 使用更复杂的单纯形法。

一个新的最优解,那就是 $(x_1, x_2) = (4, 3/2)$ 。

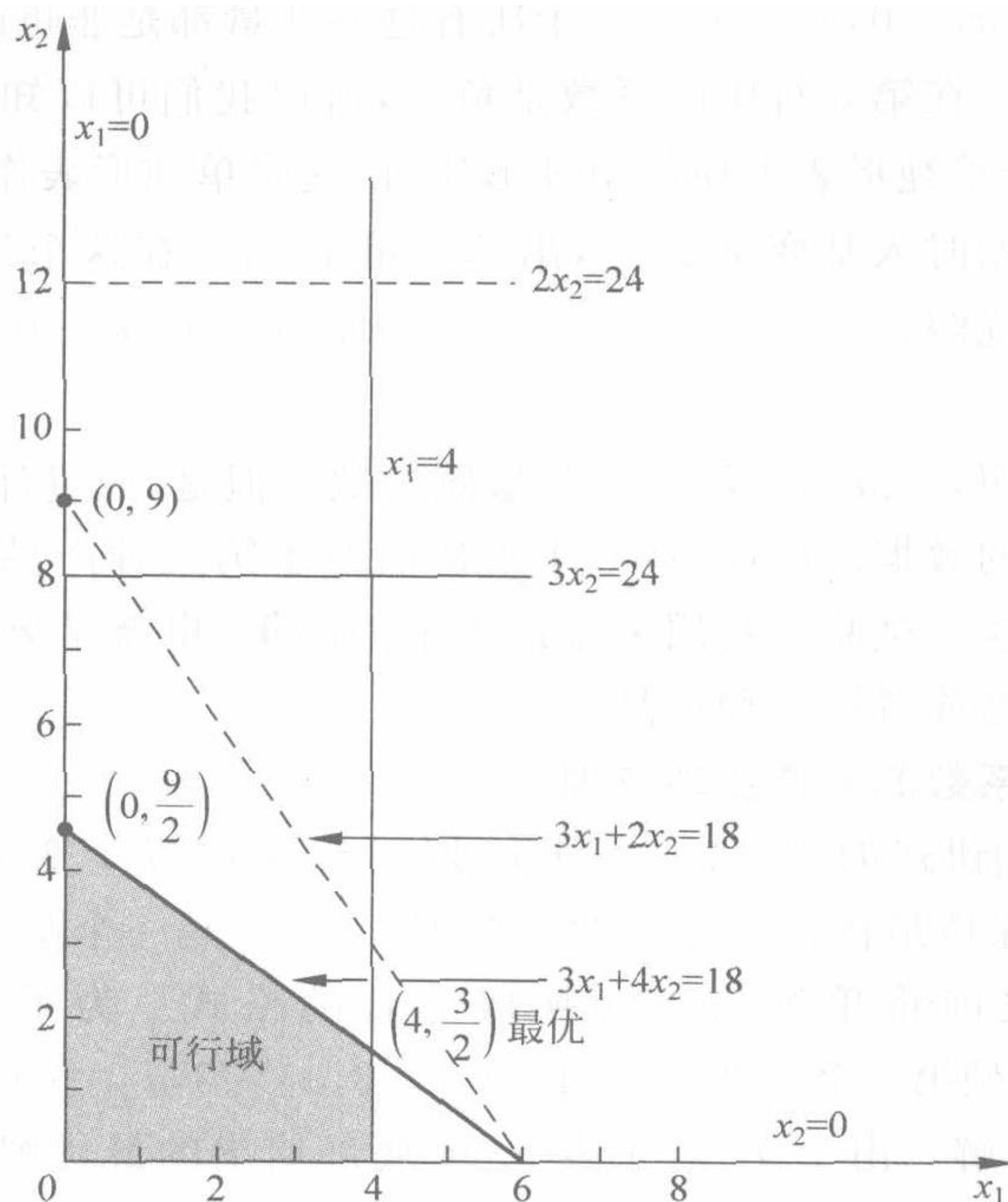


图 6.6 将第 2 个变化版本中的 $a_{22} = 2$ 变为 3、 $a_{32} = 2$ 变为 4 以及将 $c_2 = 5$ 变为 3 后的 Wyndor Glass 公司模型第 5 个变化版本的可行域

对于第 5 个变化版本的分析

下面让我们来看看如何通过代数的方法得到相同的结论。由于模型中唯一的改变就是 x_2 的系数,所以,在最终单纯形表中导致的唯一变化就是 x_2 对应的列。因此,可以使用上面介绍的公式来重新计算这一列。

$$z_2 - \bar{c}_2 = \mathbf{y}^* \bar{\mathbf{A}}_2 - \bar{c}_2 = \left[0, 0, \frac{5}{2} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - 3 = 7$$

$$\mathbf{A}_2^* = \mathbf{S}^* \bar{\mathbf{A}}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(与之相等价的,使用增量分析,利用 $\Delta c_2 = -2$, $\Delta a_{22} = 1$ 以及 $\Delta a_{32} = 2$,同样可以获得这一列)。

利用计算结果对最终单纯形表进行修订,修订结果如表 6.24 顶部所示。注意到基变量 x_2 的新系数的值并没有满足要求,因此需要对单纯形表进行转变以获得适当的形式,所以接下来要使用高斯消元法。这一步骤包括将第二行除以 2,然后从第 0 行中减去这个新得到的第二行的 7 倍,并且把这个新的第二行加到第三行上。

计算结果为表 6.24 中第二个单纯形表,并且给出了当前基本解的新值,也就是 $x_3 = 4, x_2 = 9/2, x_4 = 21/2 (x_1 = 0, x_5 = 0)$ 。由于所有这些变量都是非负的,所以这个解仍然是可行的。但是,由于 x_1 在第 0 行中的系数是负数,所以我们可以知道这个解不再是最优的。所以,需要在这个单纯形表上应用单纯形法,以这张单纯形表作为初始单纯形表来寻找新的最优解。在开始时入基变量是 x_1 ,出基变量是 x_3 。在这个例子中,只需要一步迭代就可以获得新的最优解, $x_1 = 4, x_2 = 3/2, x_4 = 39/2 (x_5 = 0, x_3 = 0)$,如表 6.24 最后的表格所示。

上述所有分析表明, c_2, a_{22} 以及 a_{32} 都是敏感参数。但是,通过计算我们还可以获得其他可以更好分析它们的数据。因此,运筹小组建议对于第二种产品的生产以一个比较小的量开始 ($x_2 = 3/2$),这一试验也被用来制订未来的决策,也就是剩余的生产能力是否应该被分配给第二种产品或者第一种产品。

基变量目标函数系数的允许变动范围

对于情况 2a,我们讲述的是当 x_j 是当前最优解(在 c_j 发生变化以前)中的非基变量时,如何寻找任意 c_j 保持最优性的允许变动范围。当 x_j 是一个基变量的时候,这个过程还要在检验最优性之前将单纯形表转换成适合的格式。为了说明这个过程,考虑 Wyndor Glass 公司模型第 5 个改变版本(其中 $c_2 = 3, a_{22} = 3, a_{32} = 4$),对应的图形见图 6.6,并在表 6.24 中加以求解。由于 x_2 对于表 6.24 底部给出的最优解是一个基变量($c_2 = 3$ 时),寻找 c_2 保持最优性的允许变动范围需要的步骤如下:

表 6.24 对于 Wyndor Glass 公司模型变化 5 版本灵敏度分析过程

基变量	方程	Z	系 数					右端项	
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
修订后的 最终单纯 形表	Z	(0)	1	9/2	7	0	0	5/2	45
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_2	(2)	0	3/2	2	0	0	1/2	9
	x_4	(3)	0	-3	-1	0	1	-1	6
转化成适 当形式	Z	(0)	1	-3/4	0	0	0	3/4	27/2
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_2	(2)	0	3/4	1	0	0	1/4	9/2
	x_4	(3)	0	-9/4	0	0	1	-3/4	21/2
重新最优 化后新的 最终单纯 形表	Z	(0)	1	0	0	3/4	0	3/4	33/2
	x_1	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_2	(2)	0	0	1	-3/4	0	1/4	3/2
	x_4	(3)	0	0	0	9/4	1	-3/4	39/2

1. 由于 x_2 是一个基变量,注意到它在最终单纯形表第 0 行的系数在 c_2 从当前值 3 改变之前,自动计算为 $z_2^* - c_2 = 0$ 。

2. 在 $c_2 = 3$ 的基础上增加 Δc_2 (所以 $c_2 = 3 + \Delta c_2$)。所以第一步中的变化为 $z_2^* - c_2 = -\Delta c_2$ 。这导致第 0 行变化为第 0 行 $= \left[0, -\Delta c_2, \frac{3}{4}, 0, \frac{3}{4}, \left| \frac{33}{2} \right. \right]$ 。

3. 因为这些系数现在都不是 0, 所以必须将其转化为适当的形式。如下所示, 将第 2 行的 Δc_2 倍加到第 0 行上。

$$\begin{array}{r} \left[0, -\Delta c_2, \frac{3}{4}, 0, \frac{3}{4}, \left| \frac{33}{2} \right. \right] \\ + \left[0, \Delta c_2, -\frac{3}{4}\Delta c_2, 0, \frac{1}{4}\Delta c_2, \left| \frac{3}{2}\Delta c_2 \right. \right] \\ \hline \text{新的第 0 行} = \left[0, 0, \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\Delta c_2, 0, \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\Delta c_2, \left| \frac{33}{2} + \frac{3}{2}\Delta c_2 \right. \right] \end{array}$$

4. 利用这个新的第 0 行, 求出保持非基变量 (x_3 和 x_5) 系数非负的 Δc_2 值的变化范围。

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\Delta c_2 \geq 0 &\Rightarrow \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}\Delta c_2 \Rightarrow \Delta c_2 \leq 1 \\ \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\Delta c_2 \geq 0 &\Rightarrow \frac{1}{4}\Delta c_2 \geq -\frac{3}{4} \Rightarrow \Delta c_2 \geq -3 \end{aligned}$$

因此, 值的变化范围是 $-3 \leq \Delta c_2 \leq 1$ 。

5. 因为 $c_2 = 3 + \Delta c_2$, 所以, c_2 保持最优性的允许变化范围是 $0 \leq c_2 \leq 4$ 。

对于只有两个决策变量的情况, 这个允许变化范围可以用图 6.6 进行图像验证, 图中的目标函数是 $Z = 3x_1 + c_2x_2$ 。对于当前的 $c_2 = 3$, 最优解是 $(4, 3/2)$ 。当 c_2 增加的时候, 这个解只有当 $c_2 \leq 4$ 的时候才是最优的。当 $c_2 \geq 4$ 的时候, 因为约束边界 $3x_1 + 4x_2 = 18$, 所以最优解变为 $(0, 9/2)$ (当 $c_2 = 4$ 时两个解的目标函数值相等)。当 c_2 减小的时候, 只有在 $c_2 \geq 0$ 时, 原最优解 $(4, 3/2)$ 仍然保持最优。当 $c_2 \leq 0$ 时, 因为约束边界 $x_1 = 4$, 所以 $(4, 0)$ 变成了新的最优解。

类似的, 对于 c_1 保持最优性的允许变动范围, 同样可以通过图形或者代数这两种方法求出来, 其结果为 c_1 大于等于 $9/4$ (习题 6.7-9 会让你通过两种方法验证它)。

因此, 对于 c_1 , 在其当前值为 3 的情况下, 最多只允许减少 $3/4$ 。但是, 当 c_2 减少的量足够大的时候, 仍然存在 c_1 可以减少更多的量, 但是却不改变解的最优性这样的情况。例如, 假设 c_1 与 c_2 都从当前值 3 减去 1, 目标函数就从 $Z = 3x_1 + 3x_2$ 变成了 $Z = 2x_1 + 2x_2$ 。按照目标函数系数同时改变的百分之百规则, 允许变动的百分比是 $133 \frac{1}{3}$ 和 $33 \frac{1}{3}$, 两者之和已经大于百分之百。但是, 目标函数的斜率根本没有发生变化, 所以最优解仍然是 $(4, 3/2)$ 。

情形 4: 引入新的约束

在这种情况下, 在问题已经求解之后, 一个新的约束必须被引入原模型中。这种情况之所以会发生, 可能是因为在最开始建立模型时这个约束条件被忽略了, 或者是当模型建立好之后又出现了新的约束条件。另一种可能性是, 因为这个约束与其他约束比起来限制性不强, 为了减少计算的复杂程度, 所以被有目的地从原模型中去掉了, 但是现在需要最优解对其进行检验。

为了观察新加入的这个约束是否会影响当前的最优解, 你所需要做的全部工作就是

直接检查当前的最优解是否满足这个约束方程。如果满足的话,即使在原模型中新加入这个约束,原来的解仍然是最好的可行解(也就是最优解)。原因就是新的约束只能消除先前的一些可行解,但是不能增加新的可行解。

如果这个新的约束可以排除当前的最优解,而且你又想要寻找新的最优解,那么,可以把这个约束方程引入最终单纯形表,并将其作为初始单纯形表,加入新的人工变量或者松弛变量作为这个新增加行的基变量。因为这个新行对于其他基变量来说,一般会含有非零的系数,所以接下来首先要将它转化成适当的形式,然后再重新求最优解。

正如前边提到的一些例子,情况 4 的求解过程与 6.6 节中总结的过程一样也是一种流水的过程。对于这种情况,唯一的问题就是原来的最优解现在是否仍然可行。所以步骤五(最优性检验)可以被删除。步骤四(可行性检验)可以被另一种更快的可行性检验方法所代替,并且在步骤一(修订模型)之后被使用。只有当这个检验出现一个负数结果,并且你希望重新最优化的时候,步骤二、步骤三以及步骤六才会被使用(最终单纯形表修订、转化成适当的形式、重新最优化)。

例(Wyndor Glass 公司模型的变化 6) 为了说明这种情况,我们考虑 Wyndor Glass 公司模型的第 6 个变化版本。在这个版本中,我们在表 6.21 中 Wyndor Glass 公司模型的第 2 个变化版本的基础上增加了一个新的约束条件 $2x_1 + 3x_2 \leq 24$ 。图像效果如图 6.7 所示。原来的最优解 $(0, 9)$ 不满足这个新的约束方程,所以新的最优解就变为 $(0, 8)$ 。

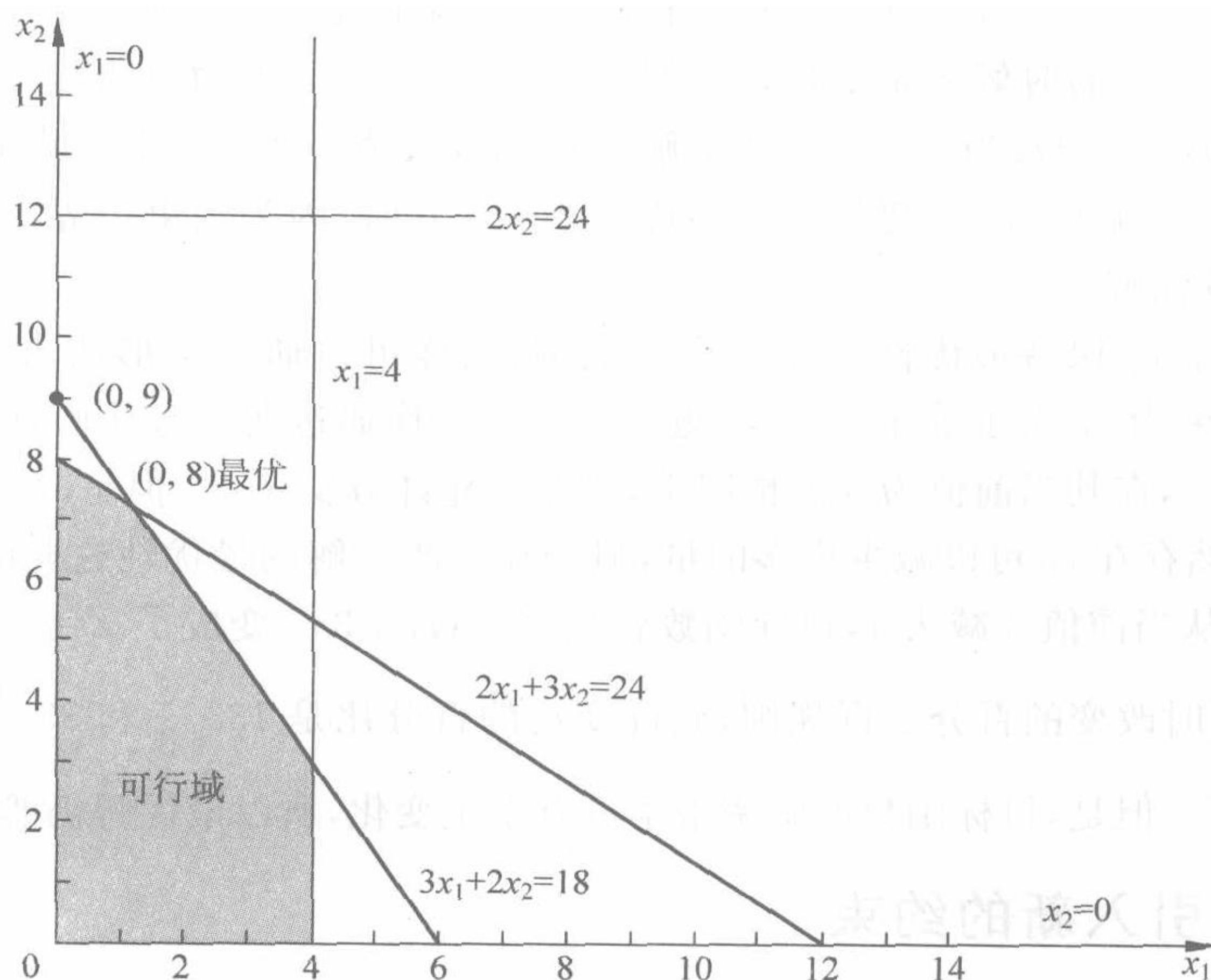


图 6.7 将第 2 个变化版本(图 6.3)中增加了一个新的约束 $2x_1 + 3x_2 \leq 24$ 后的 Wyndor Glass 公司模型第 6 个变化版本的可行域

为了用代数的方法分析这个问题,我们将 $(0, 9)$ 代入这个约束方程,得到 $2x_1 + 3x_2 = 27 > 24$,所以这个原来的最优解不再可行。为了找到一个新的最优解,像前边叙述的那样,将这个新的约束方程加入最终单纯形表,并且加入松弛变量 x_6 作为基变量,把这张改

变后的表作为新的初始单纯形表。这一步骤生成的单纯形表如表 6.25 所示。为了转化成适当的形式,这个新行需要减去第 2 行的 3 倍,得到当前的基本解如表 6.25 的第二个表所示, $x_3=4, x_2=9, x_4=6, x_6=-3(x_1=0, x_5=0)$ 。在该表上应用对偶单纯形法,只需要一步迭代就可以得到新的最优解,如表 6.25 最后一个表格所示。

表 6.25 Wyndor Glass 公司模型的第 6 个改变版本的灵敏度分析

基变量	方程	Z	系数						右端
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
Z	(0)	1	9/2	0	0	0	5/2	0	45
修订后的 最终单纯 形表	x_3	(1)	1	0	1	0	0	0	4
	x_2	(2)	3/2	1	0	0	1/2	0	9
	x_4	(3)	-3	0	0	1	-1	0	6
	x_6	新	2	3	0	0	0	1	24
转化成适 当形式	Z	(0)	9/2	0	0	0	5/2	0	45
	x_3	(1)	1	0	1	0	0	0	4
	x_2	(2)	3/2	1	0	0	1/2	0	9
	x_4	(3)	-3	0	0	1	-1	0	6
	x_6	新	-5/2	0	0	0	-3/2	1	-3
重新最优 化后新的 最终单纯 形表	Z	(0)	1/3	0	0	0	0	5/3	40
	x_3	(1)	1	0	1	0	0	0	4
	x_2	(2)	2/3	1	0	0	0	1/3	8
	x_4	(3)	-4/3	0	0	1	0	-2/3	8
	x_5	新	5/3	0	0	0	1	-2/3	2

系统的灵敏度分析——参数规划

到目前为止,我们讨论了如何处理模型中一些特定的变化。对于灵敏度分析另一种常见的方法是连续改变一个或者多个参数,来观察最优解什么时候发生变化。

例如,对于 Wyndor Glass 公司模型的第 2 个变化版本,我们不是以检查将 $b_2=12$ 变为 $\bar{b}_2=24$ 这种特殊的变化开始,而是令 $\bar{b}_2=12+\theta$ 。然后,我们令 θ 从 0 到 12(我们感兴趣的极大值)进行连续的变化。根据图 6.3 的图形分析,也就是将约束线 $2x_2=12$ 改变到 $2x_2=12+\theta$,这里 θ 可以在 0 到 12 之间取值。这样的结果就是,原始的最优解(2,6)沿约束线 $3x_1+2x_2=18$ 向(-2,12)移动。只要解($x_1 \geq 0$)是可行的,那么角点就是最优的,这种情况一直持续到(0,9)这个点成为最优解为止。

对 $\Delta b_2=\theta$ 的影响代数方法的计算过程与情况 1 中的令 $\Delta b_2=12$ 类似,特别地,我们仍然使用情况 1 中对 Z^* 和 b^* 的解释。

$$Z^* = y^* \bar{b}$$

$$b^* = S^* \bar{b}$$

而 \bar{b} 现在为

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 + \theta \\ 18 \end{bmatrix}$$

而 S^* 和 y^* 在表 6.19 中部的表格的方框中给出。这些方程揭示出最优解为

$$\begin{aligned} Z^* &= 36 + \frac{3}{2}\theta \\ x_3 &= 2 + \frac{1}{3}\theta \\ x_2 &= 6 + \frac{1}{2}\theta \\ x_1 &= 2 - \frac{1}{3}\theta \end{aligned} \quad (x_4 = 0, \quad x_5 = 0)$$

如果 θ 足够小,那么这些解就仍然是可行的,也就是说,要求 $\theta \leq 6$ 。对于 $\theta > 6$,利用对偶单纯形法(将在 7.1 节介绍)得出的单纯形表如表 6.21 所示,只是没有 x_4 的值。因此, $Z=45, x_3=4, x_2=9(x_1=0, x_5=0)$ 。按照对于 b^* 的解释, $x_4 = b_3^* = 0(4) + 1(12 + \theta) - 1(18) = -6 + \theta$ 。这条信息可以被用来决定是否应保持原来的最优解,如果否,那么应该增加多少 b_2 。

应用类似的方法,我们可以研究同时改变多个参数对于最优解的影响。当我们只改变 b_i 参数的时候,我们得到新的 b_i 如下

$$\bar{b}_i = b_i + \alpha_i \theta \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

这里 α_i 是一个输入的固定常数,用来表示约束右端项随着 θ 的变化率。

举例来说,假设有这样一种可能性,对于 Wyndor Glass 公司问题,可以把一部分产品的生产从第三个车间转移到第二个车间,即通过减少 b_3 来增加 b_2 。还假定 b_3 的减少比 b_2 的增加快 2 倍,于是

$$\begin{aligned} \bar{b}_2 &= 12 + \theta \\ \bar{b}_3 &= 18 - 2\theta \end{aligned}$$

这里的 θ 值(非负数)代表了转移的产量的度量(因此,对于这个例子, $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -2$)。在图 6.3 中,几何学的解释是,当 θ 从 0 开始增加时, $2x_2 = 12$ 这条约束线被推到了 $2x_2 = 12 + \theta$ 的位置(忽略 $2x_2 = 24$ 这条线),同时,约束线 $3x_1 + 2x_2 = 18$ 被往下推到 $3x_1 + 2x_2 = 18 - 2\theta$ 的位置。原始的最优的角点解 CPF 解 $(2, 6)$ 位于约束线 $2x_2 = 12$ 与 $3x_1 + 2x_2 = 18$ 的交点,所以这两条线位置的改变,导致了角点对应的解的改变。但是,对于目标函数 $Z = 3x_1 + 5x_2$,只要这些角点所对应的解是可行的($x_1 \geq 0$),那么这个解就仍然是最优的。

对于 b_2 和 b_3 同时改变这样的问题,如果用代数方法进行研究,同样要用到情况 1 中用到的公式(把 θ 看成一个未知数)以计算最终单纯形表的变化结果(如表 6.19 中间部分)。如下所示

$$Z^* = y^* \bar{b} = \left[0, \frac{3}{2}, 1 \right] \begin{bmatrix} 4 \\ 12 + \theta \\ 18 - 2\theta \end{bmatrix} = 36 - \frac{1}{2}\theta$$

$$b^* = S^* \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 + \theta \\ 18 - 2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + \theta \\ 6 + \frac{1}{2}\theta \\ 2 - \theta \end{bmatrix}$$

因此,最优解变成了

$$\begin{aligned} Z^* &= 36 - \frac{1}{2}\theta \\ x_3 &= 2 + \theta \\ x_2 &= 6 + \frac{1}{2}\theta \\ x_1 &= 2 - \theta \end{aligned} \quad (x_4 = 0, x_5 = 0)$$

当 θ 足够小的时候,也就是说,对于 $\theta \leq 2$,这个解仍然是可行的(通过图 6.3 检查这个结果)。但是,因为当 θ 从 0 开始增加的时候, Z 的值会减少,这表明最好的选择就是令 $\theta=0$ 。因此,不应该对生产做出任何的变动。

同时改变多个 c_j 的情况所使用的方法也是类似的。在这种情况下,我们用 \bar{c}_j 代表 c_j 改变后的值。

所以
$$\bar{c}_j = c_j + \alpha_j \theta \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

这里 α_j 是一个输入的固定常数,用来表示 c_j 随着 θ 的变化率。

为了说明这种情况,我们再来考虑一下之前讨论过的 Wyndor Glass 公司问题中 c_1 和 c_2 发生变化时的灵敏度分析。从表 6.21 和图 6.3 中所介绍的 Wyndor Glass 公司第 2 个变化版本开始,我们分别考虑将 c_1 从 3 变到 4 和将 c_2 从 5 变到 3(最悲观的情况)。现在,让我们考虑这两者同时发生变化(这个变化包括中间发生微小变化的过程)的情况,表示如下:

$$\begin{aligned} \bar{c}_1 &= 3 + \theta \\ \bar{c}_2 &= 5 - 2\theta \end{aligned}$$

这里 θ 表示可能发生的变化的度量。由于引进了 θ ,所以目标函数由 $Z=3x_1+5x_2$ 变成了 $Z(\theta)=(3+\theta)x_1+(5-2\theta)x_2$,所以现在可以对任意一个介于 0 和 1 之间的 θ 值求最优解。通过检查 θ 在 0 到 1 之间变化的影响,我们可以确定当参数发生变化的时候最优解什么时候以及如何变化。

如果有一些因素可以使这些参数同时发生变化,那么像上面那样考虑它们同时发生变化是非常有价值的。从某种意义上来说,这两种产品是相互竞争的,是否一种产品有高于预期的单位利润就暗示着另一种产品有低于预期的单位利润呢? 是否它们都被一些外生的因素(如竞争者的广告)所影响呢? 是否可以通过适当地改变人员和设备来同时改变两种产品的单位利润呢?

在图 6.3 所展示的可行域中,将目标函数从 $Z=3x_1+5x_2$ 变成 $Z(\theta)=(3+\theta)x_1+(5-2\theta)x_2$ 的图形解释是,我们改变了通过(0,9)点的目标函数线($Z=45=3x_1+5x_2$)的斜率。如果 θ 增加得足够大,那么斜率的这一变化将会显著地改变最优解,使之从(0,9)变化到另一个 CPF 解(4,3)(检查图形,看 $\theta \leq 1$ 的时候是否也会发生)。

用来处理这两个同时发生的变化($\Delta c_1 = \theta, \Delta c_2 = -2\theta$)的代数过程如表 6.26 所示。

虽然这里用 θ 而不是用一个特定的数来表示,但是在处理的过程中,仍然是将 θ 当作一个未知的数来处理。表中只是展示了所包含的单纯形表中涉及的相关的行(第 0 行以及基变量 x_2 所对应的行)。第一张单纯形表是模型改变之前的最终单纯形表,与表 6.21 中所给出的相同。按照表 6.17 中给出的公式,修订后的单纯形表所含有的唯一的改变就是,从第 0 行的 x_1 和 x_2 的系数中减去 Δc_1 和 Δc_2 。为了将这个单纯形表转化为适当的形式,我们从第 0 行中减去第二行的 2θ 倍,于是产生了最后的单纯形表。用 θ 对这张单纯形表中的非基本变量 x_1 和 x_5 在第 0 行中的系数进行解释,我们可以看到,对于 $\theta \leq 9/8$ 来说,当前的[^]BF 解仍然是最优的。因为 $\theta=1$ 是 θ 的最大可能值,这表明 c_1 和 c_2 都是表 6.21 中第 2 个变化版本中的非敏感参数。所以,如果其他参数没有发生变化(就好像第 5 个版本那样),则没有必要对这两个参数进行更进一步的评价。

正如我们在 4.7 节中讨论的那样,像这样同时连续改变几个参数的值被称作参数线性规划。7.2 节将会介绍参数线性规划中只有 c_j 发生变化以及只有 b_i 的计算过程。一些线性规划软件包同样包含了一个变量的系数或者一个约束方程的参数发生变化时的程序。除了包含 4.7 节中介绍的内容之外,这些过程还提供了系统化灵敏度分析更简单的方法。

表 6.26 处理 Wyndor Glass 公司问题第 2 个版本中 $\Delta c_1 = \theta, \Delta c_2 = -2\theta$

	基变量	方程	系 数					右端项	
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4		x_5
最终表	Z	(0)	1	9/2	0	0	0	5/2	45
	x_2	(2)	0	3/2	1	0	0	1/2	9
$\Delta C_1 = \theta, \Delta C_2 = -2\theta$ 时的修订的最终表	Z(θ)	(0)	1	$9/2 - \theta$	2θ	0	0	5/2	45
	x_2	(2)	0	3/2	1	0	0	1/2	9
转化为适当的形式	Z(θ)	(0)	1	$9/2 - 4\theta$	0	0	0	$5/2 - \theta$	$45 - 18\theta$
	x_2	(2)	0	3/2	1	0	0	1/2	9



6.8 应用电子表格进行灵敏度分析^①

借助 Excel Solver,可以通过使用电子表格直接处理 6.5 节~6.7 节中介绍的许多灵敏度分析的问题。使用电子表格处理的问题种类与 6.7 节中介绍的那些对原模型的改变是相同的。因此,我们只关注改变目标函数中的变量系数(6.7 节中的情况 2a 和情况 3)。我们将通过改变 3.1 节中的原始的 Wyndor Glass 公司模型来介绍这种方法。在这个模型里, x_1 的系数(每周新生产的门的批数)和 x_2 的系数(每周新生产窗子的批数)在目标函数中分别是

$$c_1 = 3 = \text{每批新门的利润(千美元)}$$

$$c_2 = 5 = \text{每批新窗子的利润(千美元)}$$

为了方便讨论,图 6.8 中的这个电子表格中的模型与图 3.22 相同。注意,单元格中要被改变的数据是每批的利润(C4:D4)。这些单元格中的数字是以美元的形式表示的,

^① 本节的写作方式是让读者不需要阅读本章前面的各节内容就能懂得。然而,对于本节后半部分内容来说,4.7 节提供了重要的背景知识。

c_1 和 c_2 是以千美元为单位的。我们以后在讨论灵敏度分析的时候将只改变这些单元格中的代表利润的数字,而不再改变 c_1 和 c_2 。最后,我们将通过如下方式表示这些理论

P_D = 每批门所产生的利润,输入单元格 C4

P_w = 每批窗子所产生的利润,输入单元格 D4

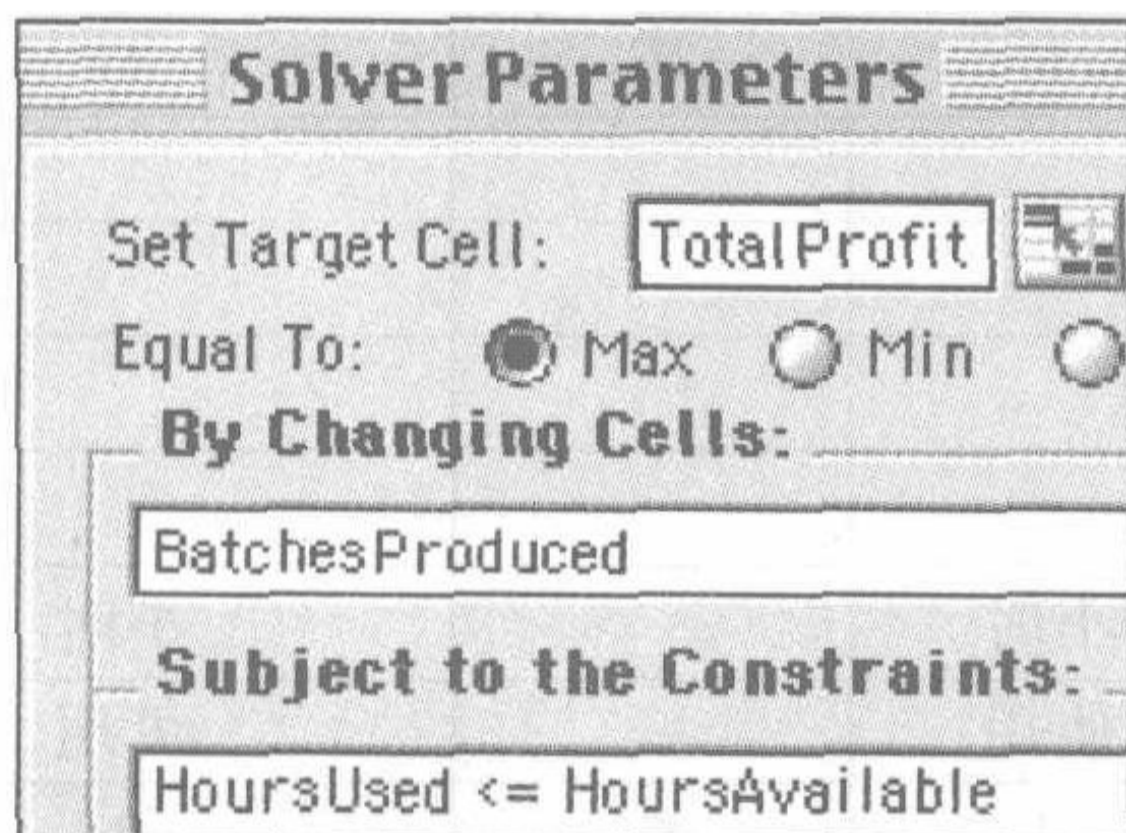
在电子表格中,实际上提供了三种方法来进行灵敏度分析。第一种方法是用来检查模型中一个单独的变化效果,可以简单地通过在电子表格中改变模型,然后重新计算来解决。第二种方法是系统地生成一张单独的电子表格,用它来展示模型中一个或者两个参数的变化效果。第三种是获得并应用 Excel 中的灵敏度报告。我们将在下面分别介绍这三种方法。

检查模型中单独的一个变化

电子表格一个强大的功能是它可以很轻松地进行交互式的灵敏度分析。一个表格被建立起来,而且可以得到最优解的时候,你就可以很快发现当模型中的一个参数发生变化时会发生什么事情。你所需要做的全部工作就是在电子表格上改变这个参数,然后再单击 Solve 键。

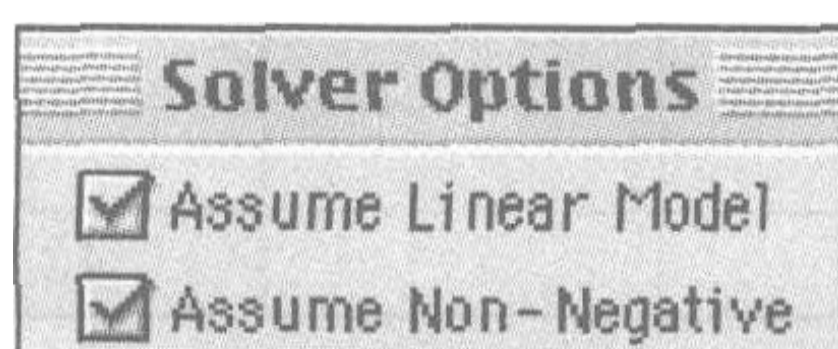
为了说明这个问题,我们假设 Wyndor Glass 公司的经理对生产每批门的利润是多少非常不确定。虽然,图 6.8 中给出的 3 000 美元这个数字可能是合理的,但是经理感觉真实的

	A	B	C	D	E	F	G
1	Wyndor Glass 公司问题的产品组合						
2							
3			门	窗子			
4		每批利润	3 000 美元	5 000 美元			
5					小时		小时
6			每批生产所用的小时数		使用		可用
7		车间 1	1	0	2	≤	4
8		车间 2	0	2	12	≤	12
9		车间 3	3	2	18	≤	18
10							
11			门	窗子			总利润
12		每批产量	2	6			36 000 美元



	E
5	Hours
6	Used
7	=SUMPRODUCT(C7:D7,BatchesProduced)
8	=SUMPRODUCT(C8:D8,BatchesProduced)
9	=SUMPRODUCT(C9:D9,BatchesProduced)

	G
11	Total profit
12	=SUMPRODUCT(ProfitPer Batch,Batches Produced)



Range Name	Cells
BatchesProduced	C12:D12
HoursAvailable	G7:G9
HoursUsed	E7:E9
HoursUsedPerBatchProduced	C7:D9
ProfitPerBatch	C4:D4
TotalProfit	G12

图 6.8 Wyndor Glass 公司问题在进行灵敏度分析之前得到的电子表格模型和最优解

数字会在这个数字的基础上存在偏离。这个变化范围应该是介于 $P_D=2\,000$ 美元与 $P_D=5\,000$ 美元之间。

图 6.9 展示了每批门的利润从 $P_D=3\,000$ 美元下降到 $P_D=2\,000$ 美元时会发生什么事情。与图 6.8 相比,我们可以看到产品的生产组合对于最优解来说根本没有发生任何变化。事实上,唯一的变化就是电子表格单元格 C4 中 P_D 的变化以及单元格 G12 中总利润减少了 2 000 美元(因为每一批门少产生了 1 000 美元的利润)。因为最优解没有发生改变,原来对于 $P_D=3\,000$ 美元的评价可能过高但却不会影响模型的最优解。

	A	B	C	D	E	F	G
1	Wyndor Glass 公司问题的产品组合						
2							
3			门	窗子			
4		每批利润	2 000 美元	5 000 美元			
5					小时		小时
6			每批生产所用的小时数		使用		可用
7		车间 1	1	0	2	\leq	4
8		车间 2	0	2	12	\leq	12
9		车间 3	3	2	18	\leq	18
10							
11			门	窗子			总利润
12		每批产量	2	6			34 000 美元

图 6.9 $P_D=3\,000$ 美元变成 $P_D=2\,000$ 美元后的产品组合以及最优解

但是,当估值过低的时候将会发生什么呢? 图 6.10 展示了如果 P_D 增加到 $P_D=5\,000$ 美元将会发生什么。同样,这里最优解仍然没有改变。因此,我们现在知道 P_D 介于 2 000 美元和 5 000 美元之间,也可能是更大的范围之中时,这个变动范围不会影响最优解(即 6.7 节中讨论的保持最优性的允许变动范围)。

	A	B	C	D	E	F	G
1	Wyndor Glass 公司问题的产品组合						
2							
3			门	窗子			
4		每批利润	5 000 美元	5 000 美元			
5					小时		小时
6			每批生产所用的小时数		使用		可用
7		车间 1	1	0	2	\leq	4
8		车间 2	0	2	12	\leq	12
9		车间 3	3	2	18	\leq	18
10							
11			门	窗子			总利润
12		每批产量	2	6			40 000 美元

图 6.10 $P_D=3\,000$ 美元变成 $P_D=5\,000$ 美元后的产品组合和最优解

因为在原模型当中, $P_D = 3\,000$ 美元可以向两个方向变化而不会影响最优解, 所以 P_D 是一个不灵敏参数。因此, 对于这个参数不需要特别精确的估计, 因为即使有些误差也不会影响最优解。

可能这些就是 P_D 所需要的全部信息。但是, 可能还存在 P_D 的真实值在 2 000 美元到 5 000 美元这个范围之外的可能性, 因此, 我们仍然需要更深入的研究。那么保持最优解的 P_D 上界和下界是多少呢?

图 6.11 说明, 当 P_D 增加到 10 000 美元的时候, 最优解确实会发生改变。因此, 我们知道, 在 P_D 变化的过程中, 在 5 000 美元到 10 000 美元之间, 存在一个值, 当超过这个值的时候, 最优解会发生改变。

	A	B	C	D	E	F	G
1	Wyndor Glass 公司问题的产品组合						
2							
3			门	窗子			
4		每批利润	10 000 美元	5 000 美元			
5					小时		小时
6			每批生产所用的小时数		使用		可用
7		车间 1	1	0	4	\leq	4
8		车间 2	0	2	6	\leq	12
9		车间 3	3	2	18	\leq	18
10							
11			门	窗子			总利润
12		每批产量	4	3			55 000 美元

图 6.11 $P_D = 3\,000$ 美元变化到 $P_D = 10\,000$ 美元之后的最优解和生产组合

使用 Solver 表格进行系统化的灵敏度分析

为了阻止最优解的改变, 我们必须连续地随机选择新的 P_D 的值。但是, 更好的方法是系统化地考虑 P_D 值的变化范围。由 Mark Hillier 教授开发的一个名为 Solver 表格的 Excel 增加功能可以处理这种问题的分析工作。

Solver 表格是用来展示改变的单元格的结果或者是输出我们追踪的值。对于数据单元格中每一个我们要追踪的值, Solver 都会重新解决这个问题。因此, Solver 表格(或者任何一个相应的 Excel 增加功能)提供了进行灵敏度分析的一种系统化方法, 之后将结果提供给经理, 或者其他熟悉灵敏度分析技术的人员。

为了使用 Solver 表格, 首先需要扩展原始的电子表格(见图 6.8), 变成一个如图 6.12 所示的带标题的表格。这个表格的第一列(单元格 B19: B28)给出了数据单元格的追踪值, 第一行空白(B18)。下一列的标题区分了哪些输出需要评价。对于这些列中的每一列, 使用表格的第一行(C18: E18)来写出一个方程, 这个方程用来在输出结果表格的单元格中填写相应变化或者输出的值。在这种情况下, 这些单元格是每批生产的门(C12)、每批生产的窗子(D12)以及总利润(G12), 因此 C18: E18 的方程在图 6.12 中的电子表格之下给出。

	A	B	C	D	E	F	G
1	Wyndor Glass 公司问题的产品组合						
2							
3			门	窗子			
4		每批利润	3 000 美元	5 000 美元			
5					使用		可用
6			每批生产所用的小时数		小时		小时
7		车间 1	1	0	2	≤	4
8		车间 2	0	2	12	≤	12
9		车间 3	3	2	18	≤	18
10							
11			门	窗子			总利润
12		每批产量	2	6			36 000 美元
13							
14							
15							
16		每批门的	每批最优产量		总利润		在选择 Solver 表之前先选择下列单元格 (B18:E28)
17		利润	门	窗子			
18			2	6	36 000 美元		
19		1 000 美元					
20		2 000 美元					
21		3 000 美元					
22		4 000 美元					
23		5 000 美元					
24		6 000 美元					
25		7 000 美元					
26		8 000 美元					
27		9 000 美元					
28		10 000 美元					

	C	D	E
16	每批最优产量		总利润
17	门	窗子	
18	= 每批生产的门	= 每批生产的窗子	= 总利润

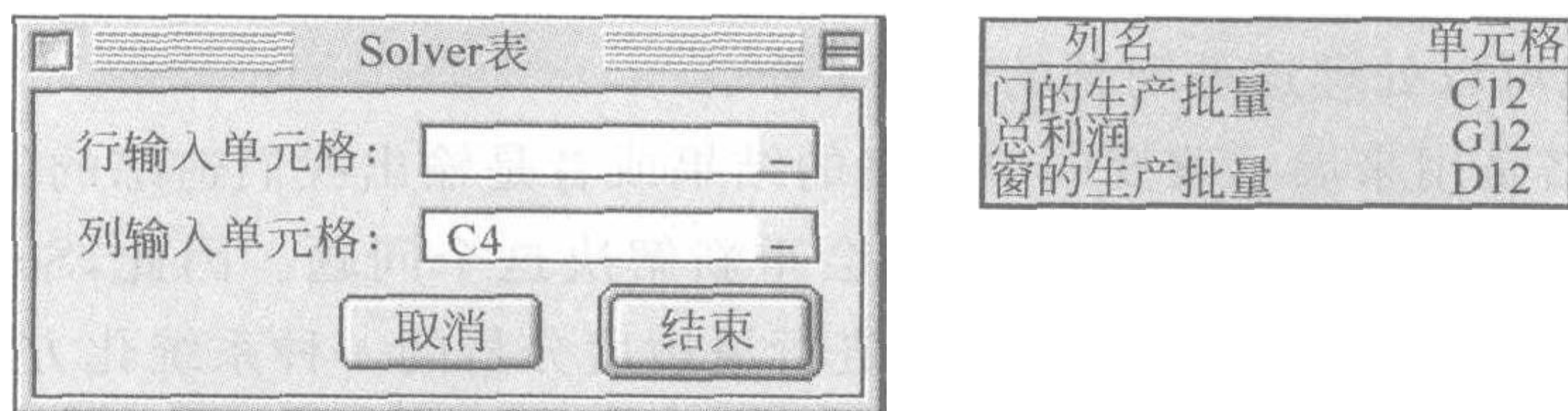


图 6.12 准备用于 Solver 表格进行系统化的灵敏度分析的图 6.8 电子表格的扩充

接下来,通过单击和拖曳来选择整个表格,之后从工具菜单中选择 Solver 表格(在安装了 OR Courseware 中的 Excel 增加功能之后才可以)。在 Solver 表格对话框(见图 6.12 最下面)中给出了输入单元格列(C4),这一列说明了在表格中将要被改变的第一列。在输入行单元格中没有添入任何东西,这是因为在这个例子中不需要使用任何行来列出数据单元格中的追踪值。

图 6.13 所示的 Solver 表格在单击了 OK 按钮之后会自动产生出来。对于表中数据单元格第一列中的每一个追踪值,Excel 重新利用 Solver 解出问题答案,并将相应的值填

写在表中的其他列里(表中第一列中的数值来自数据单元格还没有改变之前的电子表格的原始最优解)。

	A	B	C	D	E	F	G
1	Wyndor Glass 公司问题的产品组合						
2							
3			门	窗子			
4		每批利润	3 000 美元	5 000 美元			
5					小时		小时
6			每批生产所用的小时数		使用		可用
7		车间 1	1	0	2	≤	4
8		车间 2	0	2	12	≤	12
9		车间 3	3	2	18	≤	18
10							
11			门	窗子			总利润
12		每批产量	2	6			36 000 美元
13							
14							
15							
16		每批门的利润	每批最优产量		总利润		
17			门	窗子			
18			2	6	36 000 美元		
19		1 000 美元	2	6	32 000 美元		
20		2 000 美元	2	6	34 000 美元		
21		3 000 美元	2	6	36 000 美元		
22		4 000 美元	2	6	38 000 美元		
23		5 000 美元	2	6	40 000 美元		
24		6 000 美元	2	6	42 000 美元		
25		7 000 美元	2	6	44 000 美元		
26		8 000 美元	4	3	47 000 美元		
27		9 000 美元	4	3	51 000 美元		
28		10 000 美元	4	3	55 000 美元		

图 6.13 对于 Solver 表格的应用,这个应用反映了对于 Wyndor Glass 公司模型中每批门的利润发生系统变化时的影响

这张表格显示,在 $P_D=1\ 000$ 美元到 $P_D=7\ 000$ 美元之间,最优解是没有变化的,但是最优解的变化发生在 $P_D=7\ 000$ 美元到 $P_D=8\ 000$ 美元之间。接下来我们需要考虑的是在 7 000 美元到 8 000 美元之间更准确地确定变化的范围。但是,这不是必需的,因为接下来我们会提到,我们有一个捷径就是通过使用 Excel 灵敏度报告,可以精确地得到什么时候最优解发生变化。

到目前为止,我们说明了如何系统化地研究只有 P_D 发生变化时的影响(图 6.8 中的单元格 C4)。这个方法可以同样应用于 P_w (D4 单元格)。事实上,对于模型中任何一个单独数据的变化,包括可用小时中的数据(G7:G9)或者每批生产所用小时数据(C7:D9)。

我们接下来要说明如何利用电子表格研究两个数据单元格同时发生变化的情况。首先是只使用 Excel 来独立处理,之后再研究在 Solver 表格的帮助下处理问题。

处理模型中的两端变化

当使用原模型中的两个参数 P_D (3 000 美元)和 P_w (5 000 美元)时,与生产门(每周 2

批)相比,模型中的最优解将对生产窗子(每周6批)赋予更大的权重。假设 Wyndor Glass 公司的管理层考虑到这种不平衡,感觉可能对于 P_D 的估计过低,而对 P_W 的估计过高。这就产生了问题。如果估计确实存在问题,那么是否会有一个更平衡的生产混合,可以产生更大的利润呢(要记住,是 P_D 和 P_W 比例决定了产品生产的组合,所以当两者同方向发生变化的时候不会改变产品的生产混合)?

这个问题可以很容易地回答,只需要用新的每批利润取代图 6.8 中原始电子表格中的数据,然后单击 Solve 按钮就可以了。从图 6.14 中可以看出,当门的利润为 4 500 美元、窗子的利润为 4 000 美元时两种产品组合的最优解没有发生变化(总利润发生了变化,但是这种变化的发生是由于每批产品的利润发生了变化)。每批产品的利润发生更大的变化时,是否最终会导致产品组合的最优解发生变化?图 6.15 说明这种事情确实会发生。当门的单位利润是 6 000 美元而窗子的利润是 3 000 美元时,最优的产品组合是 $(x_1, x_2) = (4, 3)$ 。

	A	B	C	D	E	F	G
1	Wyndor Glass公司产品组合问题						
2							
3			门	窗			
4		每批利润	4 500 美元	4 000 美元			
5					小时		小时
6			每批生产所用小时数		使用		可用量
7		车间1	1	0	2	≤	4
8		车间2	0	2	12	≤	12
9		车间3	3	2	18	≤	18
10							
11			门	窗			总利润
12		每批产量	2	6			33 000 美元

图 6.14 改变后的 Wyndor Glass 公司问题,当 $P_D = 4\,500$ 美元和 $P_W = 4\,000$ 美元,而产品的组合没有发生变化时的最优解

	A	B	C	D	E	F	G
1	Wyndor Glass公司产品组合问题						
2							
3			门	窗			
4		每批利润	6 000 美元	3 000 美元			
5					小时		小时
6			每批生产所用小时数		使用		可用量
7		车间1	1	0	4	≤	4
8		车间2	0	2	6	≤	12
9		车间3	3	2	18	≤	18
10							
11			门	窗			总利润
12		每批产量	4	3			33 000 美元

图 6.15 改变后的 Wyndor Glass 公司问题,当 $P_D = 6\,000$ 美元和 $P_W = 3\,000$ 美元,而产品的最优组合因此发生相应变化时的最优解

图 6.14 和图 6.15 并没有说明,在 P_D 从 4 500 美元变化到 6 000 美元以及 P_W 从 4 000 美元变化到 3 000 美元的过程中,什么时候最优解发生了变化。我们接下来讨论如何系统化地、更好地帮助我们借助电子表格和 Solver 表格调查两个数据单元格的同时变化。

使用 Solver 表格进行两个变量的灵敏度分析

用来处理两个变量的 Solver 表格提供了一种系统化的研究方法,可以处理当两个数

据单元格中的估计数据同时不准确的情况(但是 Solver 表格最多只能处理两个数据单元格不准确这样的情况)。在这种情况下, Solver 表格用一个单独的输出单元格来展示这两个数据单元格中需要追踪的值的的结果。

为了说明这个方法,我们再一次研究 P_D 增加以及 P_w 减少这两种情况同时发生时产生的效果。在考虑对最优产品组合产生的影响之前,我们先看一下对总利润的影响。为了达到这个目的,我们在图 6.18 中将通过 Solver 表格看到总利润(G12)是如何随这两个数据单元格(C4: D4)的值的变化的。我们将使用 Solver 来重新处理这个问题。

为了建立 Wyndor Glass 公司问题的两个变量同时发生变化的 Solver 表格,可以通过扩展图 6.8 的电子表格,得到一个带有列和行标题的新表格,如图 6.16 电子表格中 16~21 行所示。在表格左上方的角落(C17),有一个方程(=总利润)代表了触发的单元格。在表格的第一列(C列,在 C17 单元格中方程的下方),插入关于第一个数据单元格(每批门的单位利润)的追踪值。在表格的第一行(17 行,在 C17 单元格中方程的右方),插入第二个数据单元格(每批窗子的单位利润)。

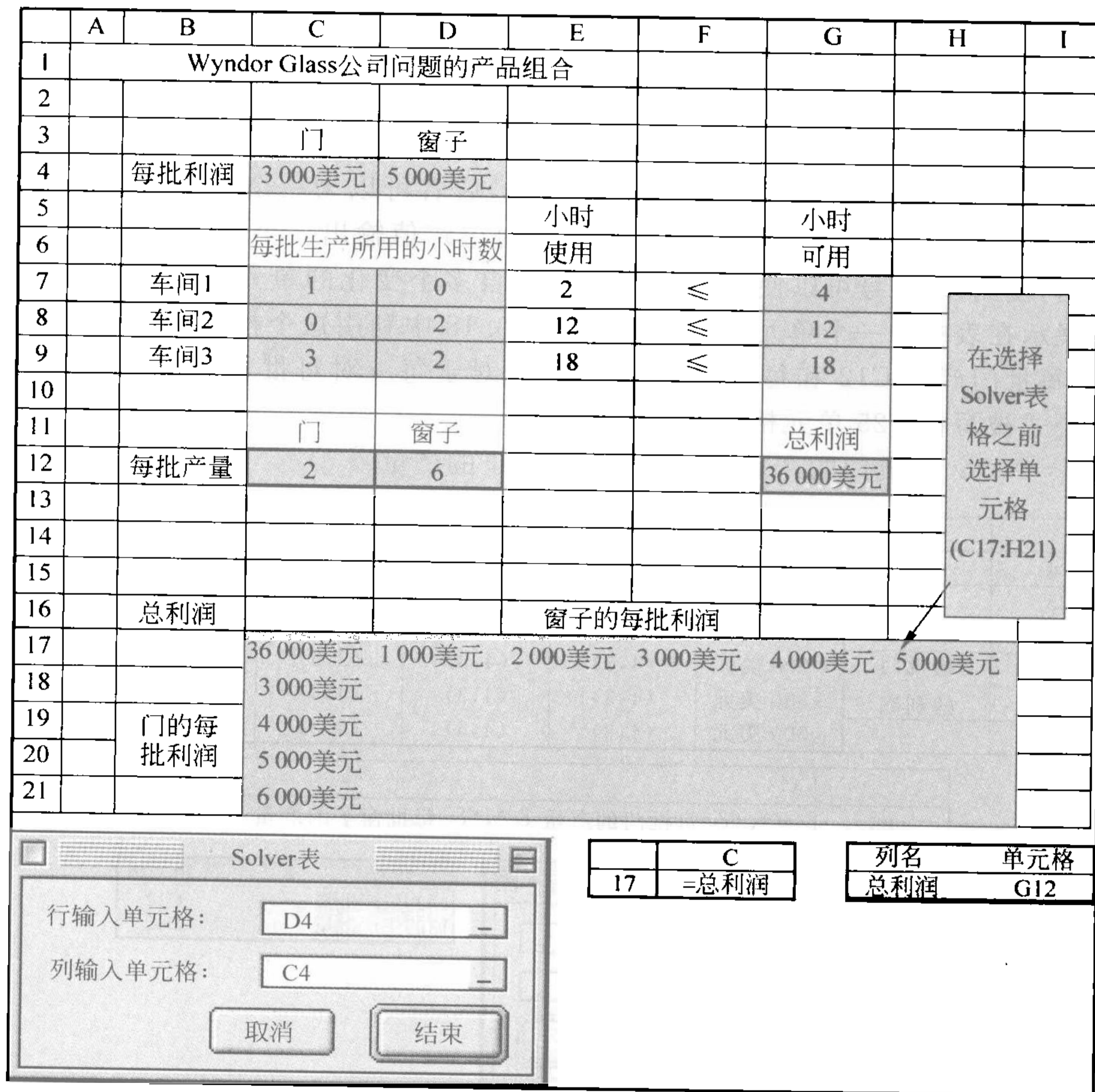


图 6.16 Wyndor Glass 公司问题中扩展图 6.8 为用二维 Solver 表格分析门和窗的单位利润发生系统变化时对于总利润的影响作准备

接着,选择整个表格(C17:H21)以及从 Add-Ins 表(对 Excel 2007)或从工具菜单中选择 Solver 表格(只有在安装了 OR Courseware 中 Excel 的增加功能后才可以使用的)。在 Solver 表格对话框中说明哪两个数据单元格是同时发生变化的。列输入单元格 C4 代表了一个数据单元格,它的追踪值被写在表格的第一列(C18:C21)。行输入单元格 D4 代表了一个数据单元格,它的追踪值被写在表格的第一行。

单击 OK 按钮之后,自动生成如图 6.17 所示的 Solver 表格。对于每一对关于这两个数据单元格的追踪值,Excel 都通过使用 Solver 重新处理,并且将总利润添入表中对应的单元格内(C17 中的数字来自与两个数据单元格发生变化之前的原始电子表格中的触发单元格)。

美元							
	B	C	D	E	F	G	H
16	总利润	每批窗子的利润					
17		36 000	1 000	2 000	3 000	4 000	5 000
18		3 000	15 000	18 000	24 000	30 000	36 000
19	每批门	4 000	19 000	22 000	26 000	32 000	38 000
20	的利润	5 000	23 000	26 000	29 000	34 000	40 000
21		6 000	27 000	30 000	33 000	36 000	42 000

图 6.17 Wyndor Glass 公司问题中 Solver 表格的一个二维应用,反映门和窗的单位利润发生系统变化时对于总利润的影响

与只有一个变量变化时的 Solver 表格不同,后者可以为一个追踪值输出多个单元格,而两个变量变化的 Solver 表格只能为每一对追踪值输出一个单元格。但是,这里有一个窍门,使用 & 符号可以使 Solver 表格将来自多个变化的单元格或者输出单元格中的内容展示在表中的一个单元格内。我们在图 6.18 中利用这个技巧来展示两个变化的单元格(每批门产量 C12 和每批窗子产量 D12)对于每一对每批利润(C4:D4)的结果。关键的公式被写在 C25 单元格中。

C25 = “(‘& 每批门的产量 &’, ‘& 每批窗子的产量 &’)”

	B	C	D	E	F	G	H
24	每批产量(门,窗子)			每批窗子的利润			
25		(2,6)	1 000 美元	2 000 美元	3 000 美元	4 000 美元	5 000 美元
26		3 000 美元	(4,3)	(4,3)	(2,6)	(2,6)	(2,6)
27	每批门	4 000 美元	(4,3)	(4,3)	(2,6)	(2,6)	(2,6)
28	的利润	5 000 美元	(4,3)	(4,3)	(4,3)	(2,6)	(2,6)
29		6 000 美元	(4,3)	(4,3)	(4,3)	(4,3)	(4,3)

	C
25	=“(‘& 每批门的产量 &’, ‘& 每批窗子的产量 &’)”

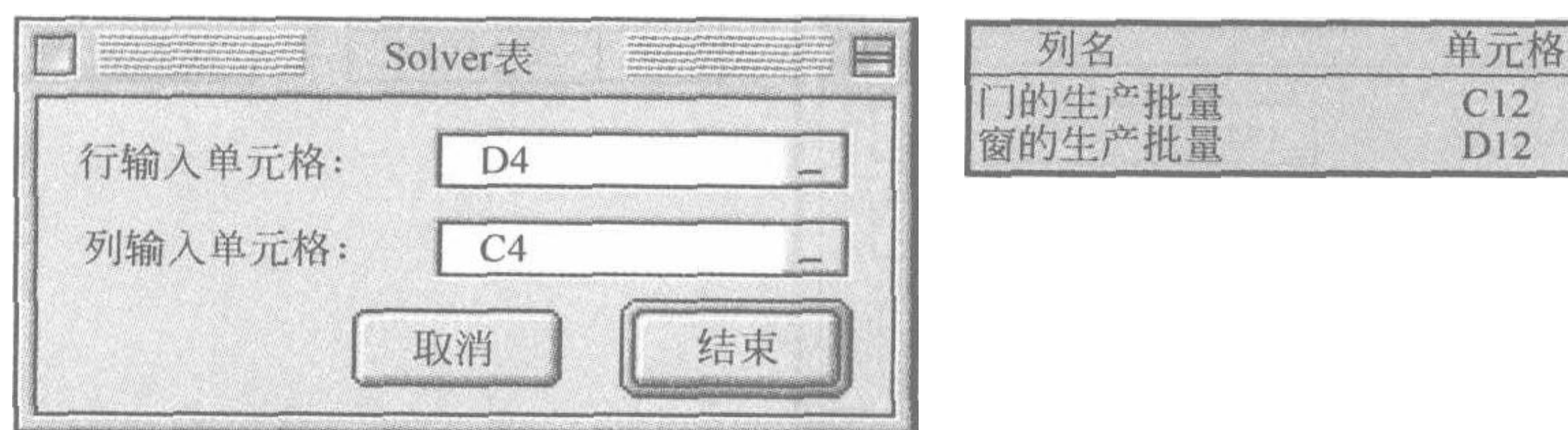


图 6.18 对于 Wyndor Glass 公司问题中 Solver 表格的二维应用,反映门和窗的单位利润发生系统变化时对于最优产品组合的影响

这里符号 & 告诉 Excel 进行连接处理,所以结果会是这样的形式:首先是个左括号,之后是每批门的产量(C12),之后是一个逗号,然后是每批窗子的产量(D12),最后是一个右括号。如果每批门的产量是 2,而每批窗子的产量是 6,那么结果就是(2,6)。所以,这两个变化的单元格的结果被同时列在一个单独的单元格中。

把所需要的信息填写进图 6.18 中的 24~25 行,以及 B~C 列,并且在 C25 中填写好公式之后,单击 OK 按钮,就会自动产生完整的 Solver 表格。单元格 D26:H29 给出了对于每一对追踪值(每批门的利润和每批窗子的利润)的最优解。Solver 表格右上方的角落(单元格 H26)给出了每批门的利润是 3 000 美元、每批窗子的利润是 5 000 美元时的最优解 $(x_1, x_2) = (2, 6)$ 。从这个单元格向下移动代表对每批门的利润的估计增加,向左移动代表对每批窗子的利润的估计减少(H26 上方和右方的结果没有给出,这是因为这些地方不会改变最优解)。注意到最优解 $(x_1, x_2) = (2, 6)$ 在单元格 H26 附近仍然是最优的。这说明,对于每批利润的评价不需要过分精确,即使有些误差也不会影响最优的产品组合。

利用灵敏度报告进行灵敏度分析

现在您已经看到如何利用电子表格通过重新计算,或者在 Solver 表格的帮助下进行灵敏度分析了。但是,还有一个捷径。同样的或者更多的一些信息可以通过 Excel Solver 提供的灵敏度报告被更快地获得(实质上,灵敏度报告是其他线性规划软件包,比如 MPL/CPLEX, LINDO, LINGO 的可用输出部分的标准组成部分)。

4.7 节已经讨论了灵敏度报告以及如何使用它来进行灵敏度分析。该节的图 4.10 展示了 Wyndor Glass 公司问题的灵敏度报告。这个报告的一部分被展示在图 6.19 当中。在这里我们不重复进行 4.17 节的工作,而是致力于说明灵敏度分析报告如何有效地处理前面提出的关于 Wyndor Glass 公司问题的一些改变。

单元格	名字	最终值	减少成本	目标函数系数	允许增加	允许减少
\$C\$12	每批门产量	2	0	3 000	4 500	3 000
\$D\$12	每批窗子产量	6	0	5 000	E+30	3 000

图 6.19 Wyndor Glass 公司问题(图 6.18)利用 Excel Solver 产生的灵敏度报告的一部分,最后三列给出了保持最优的门与窗的单位利润的允许变动范围

在前面两小节我们主要考虑的是在保持最优解(2,6)不变的情况下,对于 P_D 为 3 000 美元的初始估计最多可以偏离多远。图 6.10 和图 6.11 说明在 P_D 达到介于 5 000 美元到 10 000 美元之间的某个值之前,最优解是不会改变的。之后在图 6.13 中,我们将这个范围缩小到了 7 000~8 000 美元之间。这个数字同样表明,如果 3 000 美元对于 P_D 来说估计得过高,那么 P_D 的真实值必须在 1 000 美元以下,最优解才会发生改变。

下面让我们来看一下图 6.19 中这一部分的灵敏度报告是如何处理同样问题的。报告中每批门的产量这一行提供了关于 P_D 的下列信息。

当前 P_D 的值: 3 000

P_D 允许增加的最大值: 4 500 所以 $P_D \leq 3 000 + 4 500 = 7 500$

P_D 允许减少的最大值: 3 000 所以 $P_D \geq 3 000 - 3 000 = 0$

保持最优解的 P_D 允许变动范围: $0 \leq P_D \leq 7 500$

因此,如果 P_D 在当前值的基础上发生变化,只要这个变动范围是在允许变动范围 $0 \leq P_D \leq 7500$ 之内,那么最优解就不会发生变化。

图 6.20 从图形角度提供了这个保持最优性的允许变动范围的信息。对于原始值 $P_D = 3000$,图中的实线表示目标函数通过点 $(2,6)$ 。保持最优解的允许变动范围的下界是 $P_D = 0$,这时目标函数线对应图中的 B 线,所以在 $(2,6)$ 和 $(0,6)$ 两点的线段之上的所有点全都是最优解。当 $P_D < 0$ 时,目标函数线会旋转得过大,使得只有 $(0,6)$ 点是最优点。在允许变动范围的上界 $P_D = 7500$,目标函数线为图中的 C 线,所以在点 $(2,6)$ 和点 $(4,3)$ 所组成的线段之间的全部点都是最优解。当 $P_D > 7500$ 时,目标函数线会变得过陡,使得只有 $(4,3)$ 点成为最优解。因此,只有在 $0 \leq P_D \leq 7500$ 时, $(x_1, x_2) = (2,6)$ 这个最优解才能保持最优性。

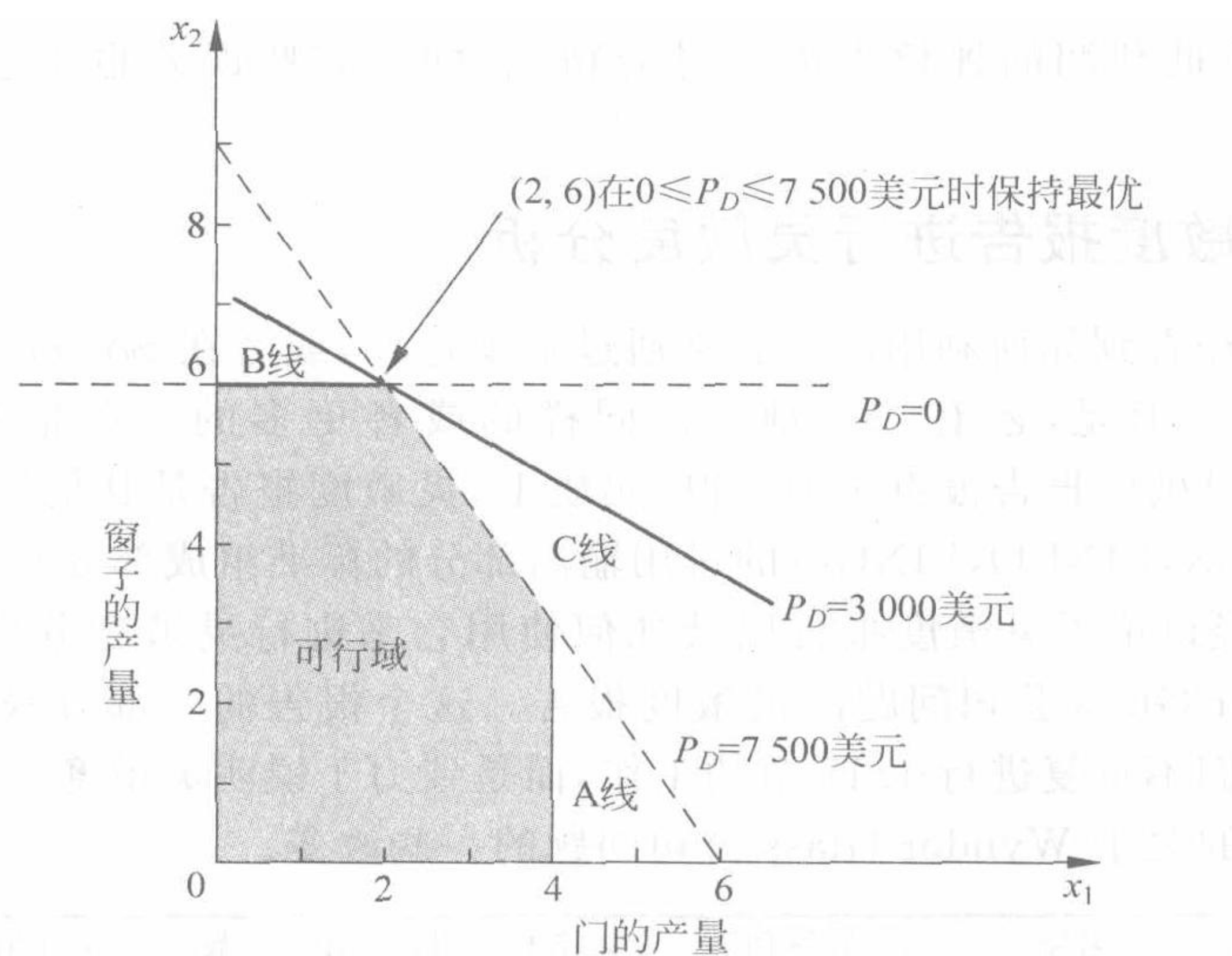


图 6.20 穿过固定约束边界线的两条虚线是目标函数线。当 P_D 在允许范围的末端时为最优解, $0 \leq P_D \leq 7500$, 产生 $(x_1, x_2) = (2,6)$ Wyndor Glass 公司问题的最优解

这一过程在 IOR Tutorial 中被称为图形方法与灵敏度分析,它是被设计用来帮助完成类似这样的图形分析工作的。输入 Wyndor Glass 公司模型之后,这一模块将会给你提供如图 6.20 中所示的图形(没有虚线)。你可以简单地通过向上或者向下拖曳目标函数线的一端,来观察在 $(x_1, x_2) = (2,6)$ 保持最优性的时候, P_D 可以增加或者减少多少。

结论: 因为 $(x_1, x_2) = (2,6)$ 在 $0 \leq P_D \leq 7500$ 这个范围内是最优解,而超过这个范围时则不再是最优解,所以对于 P_D 来说,保持最优性的允许变动范围是 $0 \leq P_D \leq 7500$ (当 $P_D = 0$ 和 $P_D = 7500$ 的时候有多个最优解,但是 $(x_1, x_2) = (2,6)$ 仍然是多个最优解中的一个)。因为当前对每批门利润的估计在这个范围的上下都有很大的空间,所以可以相信,当前的最优解就是真实的最优解。

下面让我们来考虑上两小节提出的问题。当对 P_D 的估计(3000 美元)过低,而同时又对 P_w 的估计(5000 美元)过高的时候,会发生什么呢? 特别是,当 $(x_1, x_2) = (2,6)$ 仍然是最优解的时候,这两端可以分离多远呢?

图 6.14 说明,当 P_D 增加 1 500 美元(也就是从 3 000 美元增加到 4 500 美元),而同时 P_w 减少 1 000 美元(也就是从 5 000 美元减少到 4 000 美元)的时候,最优解仍然保持不变。接下来图 6.15 说明,将这种变化扩大一倍,最优解会发生变化。但是,我们还不清楚最优解是在哪个点发生的变化。图 6.18 提供了更多的信息,但是仍然没有为这个问题提供明确的答案。

幸运的是,通过灵敏度报告中 P_D 和 P_w 的允许变化范围,我们可以收集更多的信息。关键是使用下面的规则(第一次是出现在 6.7 节中)。

目标函数系数同时发生变化时的百分之百规则: 如果目标函数中的系数同时发生变化,计算每一个变化(增加或者减少)占其相应系数保持最优性的允许变化范围的比例。如果这些比例之和没有超过百分之百,那么原来的最优解仍然是最优的(但如果总数确实超过百分之百,那么这个解就不一定仍然是最优的了)。

这个规则并没有清楚地说明当百分比之和超过百分之百时会发生什么。结果取决于系数变化的方向。记住,是系数之间的比例关系决定了最优解。所以,当系数同方向发生变化的时候,即使百分比之和超过了百分之百,也存在最优解不变的可能性。因此,当百分比之和超过百分之百的时候,最优解可能变化也可能不变化,但是只要百分比之和没有超过百分之百,那么原来的最优解就一定不会改变它的最优性。

我们要记住,当一个系数没有发生变化,而另一个系数发生变化的时候,我们可以使用整个完整的允许变动范围。当同时发生变化的时候,我们要将注意力集中在增加或者减少的百分比之和上。

为了说明这个问题,我们再一次通过图 6.19 中灵敏度报告提供的信息来考虑 Wyndor Glass 公司问题。假设,现在对于 P_D 的估计从 3 000 美元增加到 4 500 美元,而同时对 P_w 的估计从 5 000 美元减少到 4 000 美元。按照百分之百规则计算如下

P_D : 3 000 美元 \rightarrow 4 500 美元

$$\text{增加的百分比} = 100 \times \left(\frac{4\,500 - 3\,000}{4\,500} \right) \% = 33 \frac{1}{3} \%$$

P_w : 5 000 美元 \rightarrow 4 000 美元

$$\text{减少的百分比} = 100 \times \left(\frac{5\,000 - 4\,000}{3\,000} \right) \% = 33 \frac{1}{3} \%$$

$$\text{总和} = 66 \frac{2}{3} \%$$

由于百分比之和没有超过百分之百,所以原来的最优解 $(x_1, x_2) = (2, 6)$,就如同我们先前在图 6.14 中看到的一样,仍然是最优的。

现在假设, P_D 的估计从 3 000 美元增加到 6 000 美元,同时对 P_w 的估计从 5 000 美元减少到 3 000 美元。按照百分之百规则计算如下

P_D : 3 000 美元 \rightarrow 6 000 美元

$$\text{增加的百分比} = 100 \times \left(\frac{6\,000 - 3\,000}{4\,500} \right) \% = 66 \frac{2}{3} \%$$

P_w : 5 000 美元 \rightarrow 3 000 美元

$$\text{减少的百分比} = 100 \times \left(\frac{5\,000 - 3\,000}{3\,000} \right) \% = 66 \frac{2}{3} \%$$

$$\text{总和} = 133 \frac{1}{3} \%$$

由于百分比之和超过百分之百,所以按照百分之百规则,我们不能肯定 $(x_1, x_2) = (2, 6)$ 仍然是最优的。事实上,按照我们之前在图 6.15 和图 6.18 中得到的结论,最优解已经变成了 $(x_1, x_2) = (4, 3)$ 。

这个结果可以告诉我们如何寻找 P_D 增加而 P_W 相应减少时最优解发生的变化。由于百分之百是 $66 \frac{2}{3} \%$ 和 $133 \frac{1}{3} \%$ 的中点,所以,当 P_D 和 P_W 的值是中点的时候,它们变化的百分比之和将会等于百分之百。特别地,当 $P_D = 5\,250$ 美元时,这是 $4\,500$ 美元和 $6\,000$ 美元的中点; $P_W = 3\,500$ 美元是 $4\,000$ 美元与 $3\,000$ 美元的中点。相应的百分之百规则计算结果如下

$$P_D: 3\,000 \text{ 美元} \rightarrow 5\,250 \text{ 美元}$$

$$\text{增加的百分比} = 100 \times \left(\frac{5\,250 - 3\,000}{4\,500} \right) \% = 50 \%$$

$$P_W: 5\,000 \text{ 美元} \rightarrow 3\,500 \text{ 美元}$$

$$\text{减少的百分比} = 100 \times \left(\frac{5\,000 - 3\,500}{3\,000} \right) \% = 50 \%$$

$$\text{总和} = 100 \%$$

虽然此时百分比之和是百分之百,但是它仍然没有超过百分之百,所以最优解 $(x_1, x_2) = (4, 3)$ 仍然是最优的。图 6.21 说明,此时 $(2, 6)$ 和 $(4, 3)$ 都是最优的,同样,这两点之间线段上的点也都是最优的。但是,如果 P_D 和 P_W 在它们原始值的基础上变化更多(所以百分比之和将会超过百分之百),目标函数线将会旋转得过大,从而使得只有点 $(x_1, x_2) = (4, 3)$ 是最优解。

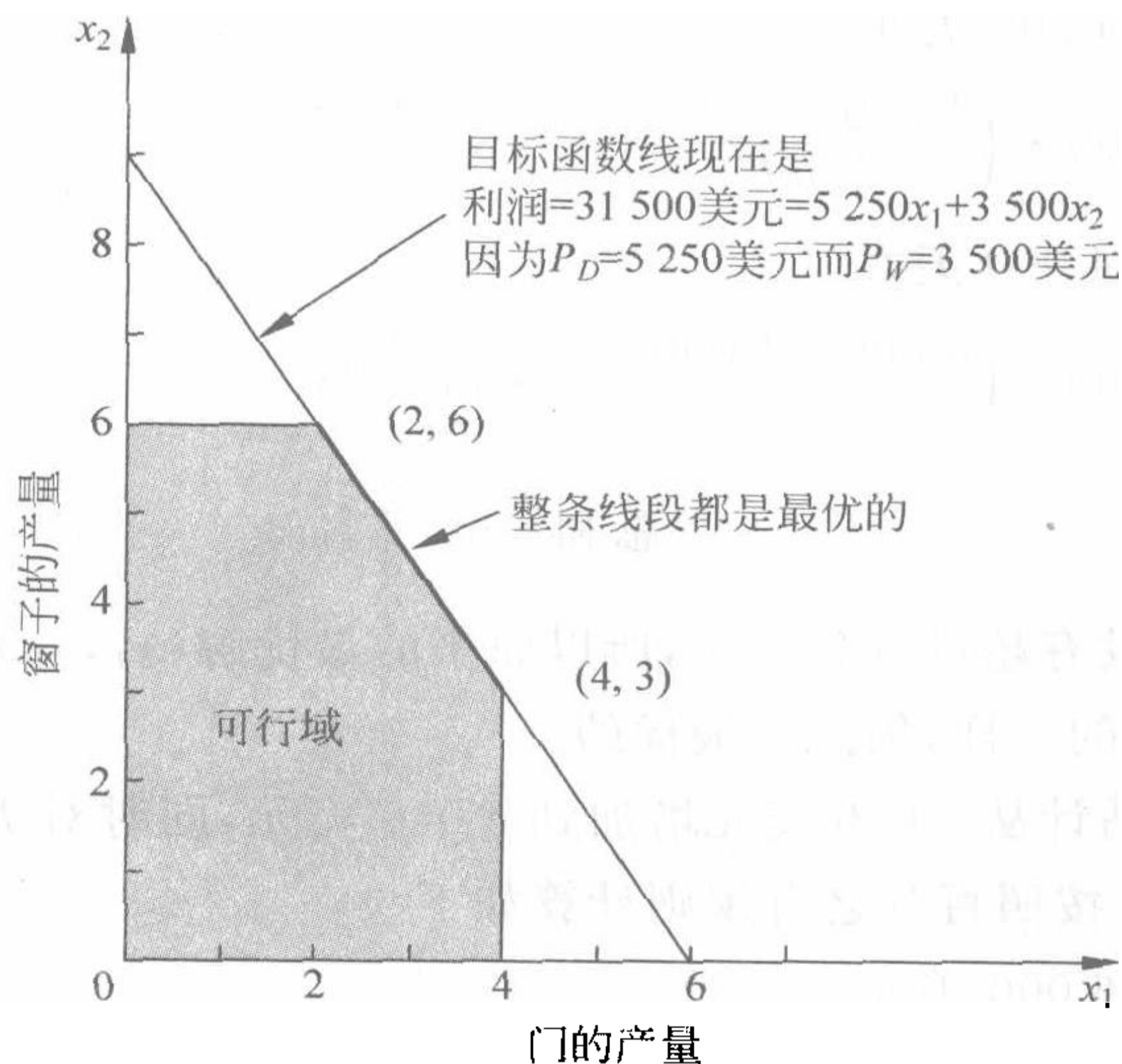


图 6.21 当每批门和窗的单位利润变成 $P_D: 3\,000$ 美元 $\rightarrow 5\,250$ 美元, $P_W: 5\,000$ 美元 $\rightarrow 3\,500$ 美元时,正好坐落在百分之百原则的允许变动范围的边界上,此时 $(x_1, x_2) = (2, 6)$ 仍然是最优解,但是在它与 $(4, 3)$ 点的连线上的所有的点此时都已经变成最优解

同时,我们应该记住,即使百分比之和超过了百分之百,那也不一定意味着最优解一定会发生变化。比如,假设两个单位利润全都减半。相应的百分之百规则计算结果如下

$$P_D: 3\,000 \text{ 美元} \rightarrow 1\,500 \text{ 美元}$$

$$\text{增加的百分比} = 100 \times \left(\frac{3\,000 - 1\,500}{3\,000} \right) \% = 50\%$$

$$P_W: 5\,000 \text{ 美元} \rightarrow 2\,500 \text{ 美元}$$

$$\text{减少的百分比} = 100 \times \left(\frac{5\,000 - 2\,500}{3\,000} \right) \% = 83 \frac{1}{3}\%$$

$$\text{总和} = 133 \frac{1}{3}\%$$

即使这个百分比之和超过了百分之百,但是,从图 6.22 中可以看到,原始的最优解仍然保持最优性。事实上,目标函数线拥有与原始目标函数相同的斜率(图 6.20 中目标函数线的斜率)。因此,只要利润的值成比例地发生变化,那么最优解就不会改变。

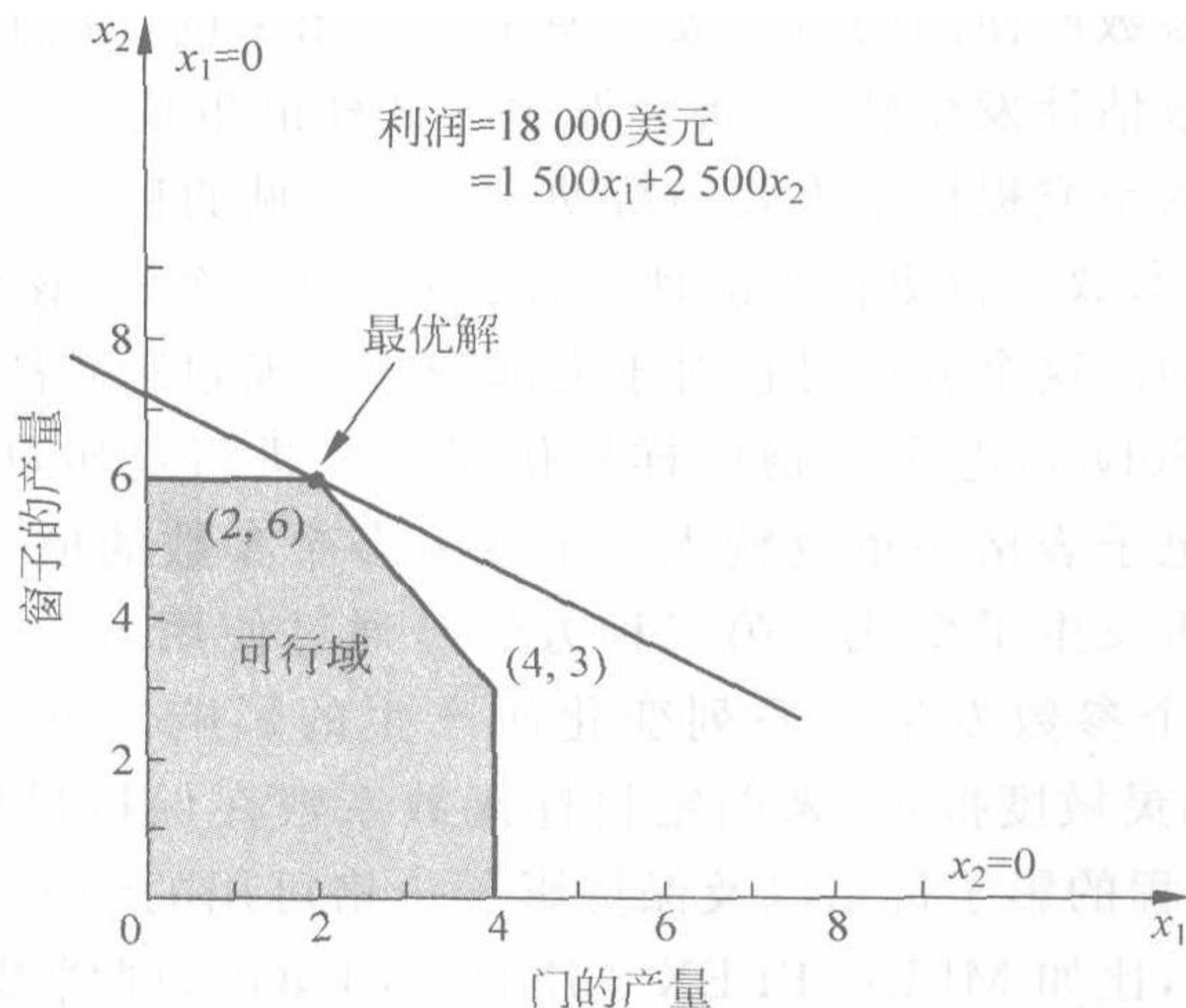


图 6.22 当每批门和窗的单位利润变成 $P_D: 3\,000 \rightarrow 1\,500$, $P_W: 5\,000 \rightarrow 2\,500$ 后,图形方法表明 $(x_1, x_2) = (2, 6)$ 仍然是最优解,尽管百分之百规则表示最优解可能发生变化

其他类型的灵敏度分析

本节中我们主要研究如何利用电子表格处理目标函数中变量系数发生变化这种情况的灵敏度分析问题。同样,可能有人对改变约束方程中约束右端项这样的问题更感兴趣。偶尔,你也许会对改变约束方程中的系数这样的问题感兴趣。

使用电子表格来处理模型中这些其他类型的变化,其实与处理目标函数系数变化相同。同样,你只需要简单地利用电子表格来实现这些改变,然后利用 Excel Solver 进行重新处理。同样,你也可以使用 Solver 表格来系统化地检查任意一个单独的单元格值的变化,或者两个数据单元格值同时变化所产生的影响。正如 4.7 节中已经讨论过的,Excel Solver(或者其他线性规划软件包)提供的灵敏度报告同样可以为我们提供很多有价值的信息,其中包括影子价格,或者是改变约束方程的约束右端项所带来的影响。当同时改变多个约束右端项的时候,同样也有一个百分之百规则,就像目标函数系数同时发生改变时

所用到的百分之百规则那样(回顾 6.7 节的情形 1, 可以看到研究约束右端项发生改变这样问题的具体细节, 以及相应的百分之百规则)。

本书网站的工作例子部分包含应用电子表格研究某个右端项变化时的影响。



6.9 结论

每一个线性规划问题都伴随着一个对偶线性规划问题。在原问题与对偶问题之间有很多有用的关系, 利用这些关系可以提高我们分析原问题的能力。例如, 对于对偶问题经济学上的解释给出了影子价格的概念。利用影子价格我们可以分析原问题当中所使用资源的边际价值并且可以对单纯形法进行解释。因为单纯形法可以直接应用于这两种问题中的任意一种, 以同时解决它们, 所以, 直接处理对偶问题可以显著地减少计算的复杂程度。而对偶理论(包括处理超优解的对偶单纯形法)同样在灵敏度分析当中扮演了重要的角色。

线性规划模型中参数所使用的值一般来说是估计出来的。因此, 我们需要使用灵敏度分析来研究如果参数估计发生错误, 将会发生什么样的事情。5.3 节中的观察结果为我们有效地进行这样的研究提供了重要的帮助。一个常见的目标是识别出影响最优解的灵敏参数, 并且对这些参数进行更精确的评价, 之后选择一个解, 该解在灵敏参数的可能变化范围内始终是好的。这个分析过程对于大部分线性规划研究都是很重要的。

通过使用 Excel Solver, 电子表格同样提供了一些进行灵敏度分析的有用的方法。第一种方法是通过在电子表格中重复输入一个或者多个参数的值, 然后单击 Solve 按钮来直接观察最优解是否发生了变化。第二种方法是通过使用 Solver 表格来系统化地观察模型中一个或者两个参数发生一系列变化所产生的影响。第三种方法是通过使用 Excel Solver 所提供的灵敏度报告, 来确定目标函数系数在保持最优解不变的情况下的允许变动范围、约束方程的影子价格以及保持影子价格可用的约束右端项的允许变动范围(其他线性规划软件, 比如 MPL/CPLEX、LINDO、LINGO, 同样提供了灵敏度报告)。

参考文献

1. Bertsimas, D., and M. Sim: "The Price of Robustness." *Operations Research*, 52(1): 35–53, January–February 2004.
2. Dantzig, G. B., and M. N. Thapa: *Linear Programming 1: Introduction*, Springer, New York, 1997.
3. Gal, T., and H. Greenberg (eds.): *Advances in Sensitivity Analysis and Parametric Programming*, Kluwer Academic Publishers (now Springer), Boston, MA, 1997.
4. Hight, J. L., and S. W. Wallace: "Sensitivity Analysis and Uncertainty in Linear Programming," *Interfaces*, 33(4): 53–60, July–August 2003.
5. Hillier, F. S., and M. S. Hillier: *Introduction to Management Science: A Modeling and Case Studies Approach with Spreadsheets*, 3rd ed., McGraw-Hill/Irwin, Burr Ridge, IL, 2008, chap. 5.
6. Nazareth, J. L.: *An Optimization Primer: On Models, Algorithms, and Duality*, Springer-Verlag, New York, 2004.
7. Vanderbei, R. J.: *Linear Programming: Foundations and Extensions*, 3rd ed., Springer, New York, 2008.
8. Wendell, R. E.: "Tolerance Sensitivity and Optimality Bounds in Linear Programming," *Management Science*, 50(6): 797–803, June 2004.

习题

一些习题的左端的符号意义如下：

D：上边提供的例子会提供帮助。

I：我们建议你使用上边给出的相应的交互过程。

C：使用任何一种你可以使用的软件来自动解决这个问题。

E*：使用 Excel 表格。

习题上有一个星号表示书后至少给出该题一部分答案。

6.1-1* 为下面给出的每一个满足标准格式的线性规划问题建立对偶问题：

(a) 习题 3.1-6 的模型。

(b) 习题 4.7-5 的模型。

6.1-2 考虑问题 4.5-4 中的线性规划模型。

(a) 为这个模型建立原问题—对偶问题表，并建立对偶模型。

(b) 这个问题中的 Z 无界对对偶问题有什么影响？

6.1-3 对于下面每一个线性规划模型，是应该直接在原问题上应用单纯形法还是应该在对偶问题上应用单纯形法？给出你的建议并解释。

$$(a) \max Z = 10x_1 - 4x_2 + 7x_3$$

$$\text{s. t. } 3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 25$$

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 25$$

$$5x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 40$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 90$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 \leq 20$$

$$\text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$(b) \max Z = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5$$

$$\text{s. t. } x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 \leq 6$$

$$4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + x_5 \leq 15$$

$$\text{且 } x_j \geq 0 \quad j=1, 2, 3, 4, 5$$

6.1-4 考虑下面的问题：

$$\max Z = -x_1 - 2x_2 - x_3$$

$$\text{s. t. } x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 12$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$$

$$\text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

(a) 建立对偶问题。

(b) 利用对偶理论来说明原问题的最优解有 $Z \leq 0$ 。

6.1-5 考虑下面的问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_3 \leq 15 (\text{资源 1}) \\ & x_2 + 2x_3 \leq 25 (\text{资源 2}) \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(a) 为这个原问题建立对偶问题。

I(b) 用图形法解决这个对偶问题,并用求出的结果说明原问题中资源的影子价格。

C(c) 用单纯形法解原问题,找出影子价格来证明你在(b)中得到的结论。

6.1-6 按照上一问题的要求解答本题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 6 (\text{资源 1}) \\ & -x_2 + 2x_3 \leq 4 (\text{资源 2}) \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

6.1-7 考虑下面的问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 4x_1 + x_2 \leq 20 \\ & -x_1 + x_2 \leq 10 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

I(a) 用图形法证明这个问题没有解。

(b) 建立对偶问题。

I(c) 用图形法证明对偶问题目标函数无界。

16.1-8 建立一个有两个决策变量、两个约束方程、有可行解但是目标函数无界的原问题,并画图。之后,建立这个原问题的对偶问题,并用图形法证明对偶问题没有可行解。

16.1-9 建立一对原问题与对偶问题,每一个问题有两个决策变量、两个约束方程。每个问题都没有可行解,并用图形法证明。

6.1-10 建立一对原问题与对偶问题,每一个问题有两个决策变量、两个约束方程。原问题都没有可行解,对偶问题有无界解。

6.1-11 利用弱对偶性证明如果原问题与对偶问题都有可行解,那么两个问题都有最优解。

6.1-12 考虑我们在 6.1 节给出的原问题与对偶问题的标准矩阵形式。利用对偶问题对于原问题的这种形式的定义来证明以下结论:

(a) 6.1 节中的弱对偶性。

(b) 如果原问题有无界的可行域,那么对偶问题没有可行解。

6.1-13 考虑我们在 6.1 节给出的原问题与对偶问题的标准矩阵形式,用 y^* 表示对偶问

题的最优解。假设 b 被 \bar{b} 所代替,用 \bar{x} 表示新的原问题最优解。证明 $c\bar{x} \leq y * \bar{b}$ 。

6.1-14 对于任意一个标准形式的线性规划问题及其对偶问题,判断下列说法的正误,并证明。

- (a) 对于原问题与对偶问题来说,两个问题中约束方程的数量与变量的数量(扩大之前)之和相等。
- (b) 在每一步迭代中,单纯形法都分别计算出一个原问题与对偶问题的 CPF 解,所以这个过程中两个问题的目标函数值始终相等。
- (c) 如果原问题拥有无界解,那么对偶问题的最优解的目标函数值一定是 0。

6.2-1 考虑表 4.8 中给出的 Wyndor Glass 公司问题的单纯形表。对于每一个单纯形表,给出下列条目的经济解释:

- (a) 第 0 行中松弛变量(x_3, x_4, x_5)系数。
- (b) 第 0 行中决策变量(x_1, x_2)系数。
- (c) 最终作为结果而选择的变量。

6.3-1* 考虑下面的问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 6x_1 + 8x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- (a) 为这个原问题建立对偶问题。
- (b) 用图形法解原问题与对偶问题。找出这两个问题的 CPF 解,以及角点中的非可行解。计算这些解的目标函数值。
- (c) 利用(b)中得到的信息,绘制一张表格来计算这些互补的基本解(使用与表 6.9 相同的标题)。
- I(d) 利用单纯形法一步一步解这个问题。在每一步迭代之后找出这个问题的 BF 解以及对偶问题中互补的解。找出相应的角点。

6.3-2 考虑问题 4.1-5 中的那个含有两个约束方程和两个变量的模型。回答上一题中的全部问题。

6.3-3 考虑表 6.1 中给出的 Wyndor Glass 公司模型的原问题与对偶问题。利用表 5.5、表 5.6、表 6.8 和表 6.9 来绘制新的表格。在表格的第一列写出非基本变量,第二列写出对偶问题中相对应的变量,第三列写出对偶问题中互补的基本解中的非基变量。利用这张表格解释这个例子的互补松弛性。

6.3-4 假设原问题拥有一个退化的 BF 解(一个或者多个基变量等于 0)作为它的最优解。这个退化的最优解对于对偶问题说明什么?为什么?如果反过来说还正确吗?

6.3-5 考虑下面的问题:

$$\max \quad Z = 3x_1 - 8x_2$$

$$\text{s. t. } x_1 - 2x_2 \leq 10$$

$$\text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

- (a) 建立对偶问题,并通过观察找到最优解。
 (b) 利用互补松弛性以及对偶问题中的最优解找到原问题的最优解。
 (c) 假设原问题的目标函数中 x_1 的系数 c_1 可以取任意值。当 c_1 取什么值时对偶问题没有可行解? 对于这些值,按照对偶理论对原问题分别代表什么情况?

6.3-6 考虑下面的问题

$$\max Z = 2x_1 + 7x_2 + 4x_3$$

$$\text{s. t. } x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$$

$$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10$$

$$\text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

- (a) 建立这个原问题的对偶问题。
 (b) 利用对偶问题证明原问题中目标函数的值不能超过 25。
 (c) 已经可以推测出 x_2 和 x_3 会包含在原问题的最优解当中。直接利用高斯消元法转换出基本解。同时利用原问题中的等式(0)来转换并识别对偶问题中互补的基本解。分析这两个解是否分别是两个问题的最优解。
 I(d) 利用图形法解对偶问题。利用这个解找出原问题最优解中的基变量和非基变量,并利用高斯消元法转化出这个解。

6.3-7* 再次考虑问题 6.3-1(b):

- (a) 建立它的对偶问题。
 I(b) 用图形法解这个对偶问题。
 (c) 利用(b)中的信息找出原问题最优解中的非基变量以及基变量。
 (d) 利用(c)的结果并使用高斯消元法得到原问题的最优解。从系统的初始方程开始[包括等式(0)],建造单纯形表,并设非基变量为 0。
 (e) 利用(c)中的结果为这个原问题的最优 CPF 解写出定义方程(见 5.1 节),之后用这个方程来得到这个解。

6.3-8 考虑问题 5.3-10 中给出的模型:

- (a) 建立对偶问题。
 (b) 利用最优解中给出的基变量信息写出非基变量以及对偶问题最优解中的基变量。
 (c) 利用(b)中的结果为这个对偶问题的最优 CPF 解写出定义方程(见 5.1 节),之后用这个方程来得到这个解。
 I(d) 利用图形法解这个问题来证明你在(c)中的结论。

6.3-9 考虑问题 3.1-5 中给出的模型:

- (a) 建立原问题的对偶问题。
 (b) 利用 $(x_1, x_2) = (13, 5)$ 是原问题的最优解这一信息找出对偶问题最优的 BF 解中的基变量和非基变量。

- (c) 利用(b)中的信息通过转化方程(0)找到对偶问题的这个最优解。通过使用高斯消元法来转化这个方程。
- (d) 利用(b)中的结果为这个对偶问题的最优 CPF 解写出定义方程(见 5.1 节)。通过检查这个最优解是否满足方程来证明(c)中得到的这个解是不是最优解。

6.3-10 假设你在使用改进单纯形法(见 5.2 节)处理标准形式的原问题时,想同时得到对偶问题中的信息。

- (a) 如何识别对偶问题中的最优解?
- (b) 你在每一步迭代时都获得了一个 BF 解之后,如何得到对偶问题当中互补的基本解?

6.4-1 考虑下面的问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 5x_1 + 4x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 \geq 10 \\ & x_1 + 2x_2 = 20 \\ & \text{且 } x_2 \geq 0 \quad (x_1 \text{ 无约束}) \end{aligned}$$

- (a) 利用 SOB 方法建立对偶问题。
- (b) 利用表 6.12 将这个原问题从 6.1 节开头给出的形式转化成标准形式,建立相应的对偶问题。之后说明得到的对偶问题与从(a)中得到的对偶问题等价。

6.4-2 考虑原问题与对偶问题是以我们在 6.1 节开头介绍的标准的矩阵形式给出的。利用对偶问题的定义来证明下列结论。

- (a) 如果原问题中的约束方程 $Ax \leq b$ 变成 $Ax = b$, 对于对偶问题的唯一改变就是去掉非负的约束 $y \geq 0$ (提示: $Ax = b$ 等价于把约束方程变成 $Ax \leq b$ 并且 $Ax \geq b$)。
- (b) 如果原问题中的约束方程 $Ax \leq b$ 变成 $Ax \geq b$, 对于对偶问题的唯一改变就是去掉非负的约束 $y \geq 0$ 变成非正约束 $y \leq 0$ (提示: $Ax \geq b$ 等价于把约束方程变成 $-Ax \leq -b$)。
- (c) 如果把原问题中的非负约束 $x \geq 0$ 去掉, 对于对偶问题的唯一的改变就是将原问题中的约束方程 $yA \geq c$ 变成 $yA = c$ (提示: 对于变量没有约束可以用两个非负的变量表示)。

6.4-3* 为习题 4.6-3 中的线性规划模型建立对偶问题。

6.4-4 考虑下面的问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = 5x_1 + 10x_2 \\ \text{s. t.} \quad & -4x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ & 5x_1 - 10x_2 \geq 10 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- (a) 建立对偶问题。
- (b) 利用图形分析法处理对偶问题来判断原问题是否有可行解,如果有,目标函数

是否有界。

6.4-5 考虑表 6.15 和表 6.16 中给出的放射治疗例子的对偶问题的两个版本。回顾 6.4 节中的内容说明为什么这两个版本是完全等价的。然后从表 6.15 一步步地转化到表 6.16 来证明等价性。

6.4-6 对于下面的每一个线性规划问题,利用 SOB 方法建立对偶问题:

(a) 习题 4.6-7 中的模型。

(b) 习题 4.6-16 中的模型。

6.4-7 考虑习题 4.6-2 中给出的带等式约束的模型:

(a) 建立这个问题的对偶问题。

(b) 证明(a)中的结果是正确的(也就是说等式的约束方程在对偶问题中没有非负约束)。为此首先将原问题转化成标准形式(见表 6.12),然后建立对偶问题,接下来把这个对偶问题转化成(a)中得到的形式。

6.4-8* 考虑习题 4.6-14 中没有非负约束的模型:

(a) 建立这个问题的对偶问题。

(b) 证明(a)中的结果是正确的(也就是说在原问题中没有非负约束在对偶问题当中产生等式的约束方程)。为此首先将原问题转化成标准形式,然后建立对偶问题,接下来把这个对偶问题转化成(a)中得到的形式。

6.4-9 考虑表 6.1 中给出的 Wyndor Glass 公司问题的对偶问题。利用表 6.13 中给出的步骤对这个对偶问题进行转变,证明对偶问题的对偶是原问题。

6.4-10 考虑下面的问题:

$$\min Z = -5x_1 - 15x_2$$

$$\text{s. t. } 2x_1 - 4x_2 \leq 8$$

$$-3x_1 + 3x_2 \leq 24$$

$$\text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

I(a) 用图形法证明这个目标函数有无界解。

(b) 建立对偶问题。

I(c) 用图形法证明对偶问题没有可行解。

6.5-1 考虑习题 6.7-2 中的模型。直接利用对偶理论来判断,当下面的变化独立发生时最优解是否仍然保持最优性。

(a) 习题 6.7-2 中的(e)问题。

(b) 习题 6.7-2 中的(g)问题。

6.5-2 考虑习题 6.7-4 中的模型。直接利用对偶理论来判断,当下面的变化独立发生的时候最优解是否仍然保持最优性。

(a) 习题 6.7-4 中的(b)问题。

(b) 习题 6.7-4 中的(d)问题。

6.5-3 考虑习题 6.7-5 中的(d)问题。直接利用对偶理论来判断,当下面的变化独立发生的时候最优解是否仍然保持最优性。

6.6-1* 考虑下面的问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 3x_1 + x_2 + 4x_3 \\ \text{s. t.} \quad & 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 25 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 20 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

相应的最终方程产生的最优解如下:

$$(0) \quad Z + 2x_2 + \frac{1}{5}x_4 + \frac{3}{5}x_5 = 17$$

$$(1) \quad x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 = \frac{5}{3}$$

$$(2) \quad x_2 + x_3 - \frac{1}{5}x_4 + \frac{2}{5}x_5 = 3$$

(a) 从这些方程中找出最优解。

(b) 建立对偶问题。

(c) 从这些方程中找出对偶问题的最优解,通过图形法来证明这些解。

(d) 假设原模型被变成如下的形式:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{s. t.} \quad & 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 25 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 20 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

利用对偶理论分析原来的最优解是否仍然是最优的。

(e) 利用 5.1 节中介绍的知识计算经过(d)改变之后 x_2 在最终方程中的新系数。

(f) 现在假设,对于原模型的唯一改变是在模型中加入了一个新的变量 $x_{\text{新}}$,变化后结果如下

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_{\text{新}} \\ \text{s. t.} \quad & 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_{\text{新}} \leq 25 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_{\text{新}} \leq 20 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_{\text{新}} \geq 0 \end{aligned}$$

利用对偶理论分析原来的最优解加上 $x_{\text{新}} = 0$ 以后是否仍然是最优的。

(g) 利用 5.1 节中介绍的知识计算经过(f)改变之后非基变量 $x_{\text{新}}$ 在最终方程中的新系数。

D, I 6.6-2 再次考虑问题 6.6-1 中的模型,通过单独调查原模型中发生下列 6 个改变的每一个来进行灵敏度分析。对于每一种变化,利用灵敏度分析的过程,先对最终方程进行修订(以表格的形式),之后转化成适当的格式,最后检查解的最优性和可行性(不需要重新最优化)。

(a) 改变约束方程 1 的右端项变到 $b_1 = 10$ 。

- (b) 改变约束方程 2 的右端项变到 $b_2=10$ 。
 (c) 改变目标函数中 x_2 的系数变为 $c_2=3$ 。
 (d) 改变目标函数中 x_3 的系数变为 $c_3=2$ 。
 (e) 改变约束方程 2 中变量 x_2 的系数 $a_{22}=2$ 。
 (f) 改变约束方程 1 中变量 x_1 的系数 $a_{11}=8$ 。

D, I 6.6-3 考虑下面的问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & W = 5y_1 + 4y_2 \\ \text{s. t.} \quad & 4y_1 + 3y_2 \geq 4 \\ & 2y_1 + y_2 \geq 3 \\ & y_1 + 2y_2 \geq 1 \\ & y_1 + y_2 \geq 2 \\ & y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

由于这个原问题中约束方程的数量比变量的数量多,所以假设可以直接在对偶问题上应用单纯形法。如果让 x_5 和 x_6 代表对偶问题中的松弛变量,最终单纯形表如下:

基变量	方程	系数							右端项
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
Z	(0)	1	3	0	2	0	1	1	9
x_2	(1)	0	1	1	-1	0	1	-1	1
x_4	(2)	0	2	0	3	1	-1	2	3

对于下面每一种在原问题模型上的变化,通过直接调查对对偶问题的影响进行灵敏度分析,然后推测对原问题的互补影响。对于每一种变化,在对偶问题上应用 6.6 节中总结的过程(不需要重新最优化),然后判断当前基本解在原问题上是否保持可行性和最优性。之后通过在原问题上应用图形法来判断你的结论是否正确。

- (a) 将目标函数变为 $W = 3y_1 + 5y_2$ 。
 (b) 将约束方程的约束右端项分别变成 3、5、2 和 3。
 (c) 将第一个约束方程变成 $2y_1 + 4y_2 \geq 7$ 。
 (d) 将第二个约束方程变成 $5y_1 + 2y_2 \geq 10$ 。

6.7-1 阅读 6.7 节应用案例中概述并在其参考文献中充分描述的运筹学的研究。概要描述灵敏度分析在该研究中的应用,然后列出由该研究带来的财务与非财务的效益。

D, I 6.7-2* 考虑下面的问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = -5x_1 + 5x_2 + 13x_3 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 20 \\ & 12x_1 + 4x_2 + 10x_3 \leq 90 \\ & \text{且 } x_j \geq 0 \quad j=1,2,3 \end{aligned}$$

如果用 x_4 和 x_5 分别代表两个约束方程中的松弛变量,单纯形法产生如下的最

终方程组:

$$(0) Z + 2x_3 + 5x_4 = 100$$

$$(1) -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 20$$

$$(2) 16x_1 - 2x_3 - 4x_4 + x_5 = 10$$

现在,你需要对原模型中发生的下列9个变化分别独立发生时进行灵敏度分析。对于每一个变化,利用灵敏度分析的过程,先对最终方程进行修订(以表格的形式),之后转化成适当的格式,最后检查解的最优性和可行性(不需要重新最优化)。

(a) 将第一个约束方程的约束右端项变成 $b_1 = 30$ 。

(b) 将第二个约束方程的约束右端项变成 $b_2 = 70$ 。

(c) 将约束右端项变成 $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 100 \end{bmatrix}$

(d) 将目标函数中 x_3 的系数变为 $c_3 = 8$ 。

(e) 将 x_1 的系数变为 $\begin{bmatrix} c_1 \\ a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ 。

(f) 将 x_2 的系数变为 $\begin{bmatrix} c_2 \\ a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ 。

(g) 在模型中引入新变量 x_6 , 其系数为 $\begin{bmatrix} c_6 \\ a_{16} \\ a_{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ 。

(h) 在方程中引入新的约束方程 $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 50$ (用 x_6 代表它的松弛变量)。

(i) 将第二个约束方程变为 $10x_1 + 5x_2 + 10x_3 \leq 100$ 。

6.7-3* 再次考虑 6.7-2 中的模型。假设现在我们对这个问题应用参数线性规划分析。我们将两个约束方程的约束右端项变化如下

$$20 + 2\theta \quad (\text{对于第一个约束方程})$$

$$90 - \theta \quad (\text{对于第二个约束方程})$$

这个 θ 是任意一个正数或者负数。

将最优解以及 Z 表示成含有 θ 的形式。找出保持解的可行性的 θ 的上界和下界。

D, I 6.7-4 考虑下面的问题

$$\max Z = 2x_1 + 7x_2 - 3x_3$$

$$\text{s. t. } x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 30$$

$$x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 10$$

$$\text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

利用 x_4 和 x_5 表示两个约束方程的松弛变量。应用单纯形法产生的最终方程组如下

$$(0) Z + x_2 + x_3 + 2x_5 = 20$$

$$(1) \quad -x_2 + 5x_3 + x_4 - x_5 = 20$$

$$(2) \quad x_1 + 4x_2 - x_3 + x_5 = 10$$

现在,你需要对发生在原模型中的下列变化分别独立发生时进行灵敏度分析。对于每一个变化,利用灵敏度分析的过程,先对最终方程进行修订(以表格的形式),之后转化成适当的格式,最后检查解的最优性和可行性。如果不满足,请重新最优化。

(a) 将约束右端项变为 $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix}$ 。

(b) 将 x_3 的系数变为 $\begin{bmatrix} c_3 \\ a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ 。

(c) 将 x_1 的系数变为 $\begin{bmatrix} c_1 \\ a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ 。

(d) 模型中引入新变量 x_6 , 并伴随如下系数 $\begin{bmatrix} c_6 \\ a_{16} \\ a_{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 。

(e) 将目标函数变为 $Z = x_1 + 5x_2 - 2x_3$ 。

(f) 在方程中引入新的约束方程 $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 25$ 。

(g) 将第二个约束方程变为 $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 35$ 。

6.7-5 再次考虑问题 6.7-4 中的模型。假设现在我们对这个问题应用参数线性规划分析。我们将两个约束方程的约束右端项变化如下

$$30 + 3\theta \quad (\text{对于第一个约束方程})$$

$$10 - \theta \quad (\text{对于第二个约束方程})$$

这个 θ 是任意一个正数或者负数。

将最优解以及 Z 表示成含有 θ 的形式。找出保持解的可行性的 θ 的上界和下界。

D. I 6.7-6 考虑下面的问题:

$$\max \quad Z = 2x_1 - x_2 + x_3$$

$$\text{s. t.} \quad 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 15$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \leq 4$$

$$\text{且} \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

利用 x_4 、 x_5 和 x_6 表示三个约束方程的松弛变量。应用单纯形法产生的最终方程组如下

$$(0) \quad Z + 2x_3 + x_4 + x_5 = 18$$

$$(1) \quad x_2 + 5x_3 + x_4 + 3x_5 = 24$$

$$(2) \quad 2x_3 + x_5 + x_6 = 7$$

$$(3) \quad x_1 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 21$$

现在,你需要通过分别调查在原模型中发生的下列8个变化来进行灵敏度分析。对于每一个变化,利用灵敏度分析的过程,先对最终方程进行修订(以表格的形式),之后转化成适当的格式,最后检查解的最优性和可行性。如果不满足,请重新最优化。

(a) 将约束右端项变为 $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ 。

(b) 将目标函数中 x_3 的系数变为 $c_3 = 2$ 。

(c) 将目标函数中 x_1 的系数变为 $c_1 = 3$ 。

(d) 将 x_3 的系数变为 $\begin{bmatrix} c_3 \\ a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。

(e) 将 x_1 和 x_2 的系数变为 $\begin{bmatrix} c_1 \\ a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} c_2 \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ 。

(f) 将目标函数变为 $Z = 5x_1 + x_2 + 3x_3$ 。

(g) 将第一个约束方程变为 $2x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 12$ 。

(h) 在方程中引入新的约束方程 $2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 60$ 。

C6.7-7 考虑 3.4 节中介绍并在图 3.13 中展示的 Distribution Unlimited 公司的问题。

虽然图 3.13 中给出了各种航线的单位运输成本,但是实际上对于这些成本还有很多不确定之处。因此,在采用 3.4 节给出的最优解之前,管理层需要关于单位成本不精确可能带来的影响的更多信息。

利用计算机中的软件对下面的问题进行灵敏度分析:

(a) 在不影响 3.4 节中给出的最优解的情况下,图 3.13 中哪个拥有最小的边际运输成本? 估计单位运输成本的最大效果在哪里?

(b) 单位运输成本的保持最优性的允许变动范围是多少?

(c) 这些允许变动范围应该如何向经理进行解释?

(d) 如果多于一个的单位运输成本发生了变化,你应该如何利用灵敏度分析提供的信息做出决策?

6.7-8 考虑下面的问题:

$$\max Z = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$\text{s. t. } 2x_1 - x_2 \leq b_1$$

$$x_1 - x_2 \leq b_2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

用 x_3 和 x_4 来表示约束方程中的松弛变量。当 $c_1 = 3, c_2 = -2, b_1 = 30$ 以及 $b_2 = 10$ 的时候,利用单纯形法产生的最终单纯形表如下:

基变量	方程	系 数					右端项
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	
Z	(0)	1	0	0	1	1	40
x_2	(1)	0	0	1	1	-2	10
x_1	(2)	0	1	0	1	-1	20

I(a) 利用图形分析法来确定保持最优性时 c_1 和 c_2 的允许变动范围。

(b) 利用代数的方法证明(a)中的结论。

I(c) 利用图形分析的方法来确定保持最优性的 b_1 和 b_2 的允许变动范围。

(d) 利用代数的方法证明(c)中的结论。

C(e) 利用单纯形法软件包找出这些允许变动范围。

16.7-9 考虑 Wyndor Glass 公司问题的模型(见表 6.24 和图 6.6),其中表 6.21 中给出了参数的变化是 $\bar{c}_2 = 3$ 、 $\bar{a}_{22} = 3$ 以及 $\bar{a}_{32} = 4$ 。利用公式 $\mathbf{b}^* = \mathbf{S}^* \bar{\mathbf{b}}$ 来找到每一个 b_i 的保持最优性的允许变动范围。之后用图形方法对这些允许变动范围进行解释。

16.7-10 考虑 Wyndor Glass 公司问题的模型(见表 6.24 和图 6.6),其中表 6.21 中给出了参数的变化是 $\bar{c}_2 = 3$ 、 $\bar{a}_{22} = 3$ 以及 $\bar{a}_{32} = 4$ 。利用图形法和代数法证明 c_1 保持最优性的允许变动范围是 $c_1 \geq \frac{9}{4}$ 。

6.7-11 对于表 6.21 中给出的问题,找到 c_2 的保持最优性的允许变动范围。利用表 6.21 中给出的单纯形表,用代数的方式写出你的结果。之后像图 6.3 那样利用图形方法证明你的结论。

6.7-12* 对于 Wyndor Glass 公司问题的原模型,利用表 4.8 中给出的最后一张单纯形表做如下的工作:

(a) 找到每一个 b_i 的保持最优性的允许变动范围。

(b) 找到每一个 c_1 和 c_2 的保持最优性的允许变动范围。

C(c) 利用单纯形法软件包找出这些允许变动范围。

6.7-13 对于 6.7 节中 Wyndor Glass 公司问题的第 6 个变化版本的模型,利用表 6.25 中的最后一张单纯形表做如下工作:

(a) 找到每一个 b_i 的保持最优性的允许变动范围。

(b) 找到每一个 c_1 和 c_2 的保持最优性的允许变动范围。

C(c) 利用单纯形法软件包找出这些允许变动范围。

6.7-14 考虑 6.7 节中 Wyndor Glass 公司问题的第 5 个变化版本的模型,其中表 6.21 中给出了参数的变化是 $\bar{c}_2 = 3$ 、 $\bar{a}_{22} = 3$ 以及 $\bar{a}_{32} = 4$ 。从表 6.24 底部给出的单纯形表开始,构建一个如表 6.26 所示的表格来进行参数线性规划分析,其中 $c_1 = 3 + \theta$, $c_2 = 3 + 2\theta$ 。请问,当保持最优解最优性的时候 θ 最多可以从 0 增加到多少?

6.7-15 再次考虑问题 6.7-6 中给出的模型。假设你现在可以用第一种产品产生的利润来等量交换第二种产品产生的利润。也就是说可以通过减少目标函数中 x_2 的系数,同时等量地增加 x_1 的系数。因此,可以把目标函数表示如下

$$Z(\theta) = (2 + \theta)x_1 - (1 + \theta)x_2 + x_3$$

这里 θ 表示任意的非负值。构建一个如表 6.26 所示的表格来进行参数线性规划分析。确定保持最优解最优性时 θ 的上界。之后决定最佳的 θ 值。

6.7-16 考虑下边这个参数线性规划问题：

$$\max Z(\theta) = (10 - 4\theta)x_1 + (4 - \theta)x_2 + (7 + \theta)x_3$$

$$\text{s. t. } 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 7 \text{ (第一种资源)}$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 5 \text{ (第二种资源)}$$

$$\text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

这里 θ 是任意的正数或者负数值。用 x_4 和 x_5 表示两个约束方程中的松弛变量。当 $\theta=0$ 时,我们得到的最终单纯形表如下:

基变量	方程	系数						右端项
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Z	(0)	1	0	0	3	2	2	24
x_1	(1)	0	1	0	-1	1	-1	2
x_2	(2)	0	0	1	5	-2	3	1

- 确定保持最优解最优性时 θ 的允许变动范围,之后确定最好的 θ 值。
- 给定一个在允许变动范围内的 θ 值,确定 b_1 (第一种资源的可用数量)和 b_2 (第二种资源的可用数量)的允许变动范围。
- 给定一个在允许变动范围内的 θ 值,确定两种资源的影子价格(用 θ 的函数表示)。利用这一信息判断,如果第一种资源减少了一个单位同时第二种资源增加了一个单位,目标函数的最优值是如何变化的。
- 建立这个参数线性规划问题的对偶问题。令 $\theta=0$,利用图形法解这个对偶问题,确定这两种资源在原问题中相应的影子价格。之后通过解这个以 θ 的函数形式给出的对偶问题,用 θ 的函数形式表示这两个影子价格(θ 的值在 a 中求出的允许变动范围之内)。

6.7-17 考虑下面的参数线性规划问题：

$$\max Z(\theta) = 2x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

$$\text{s. t. } x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 5 + \theta$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 6 + 2\theta$$

$$\text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

这里 θ 是任意的正数或者负数值。用 x_4 和 x_5 表示两个约束方程中的松弛变量。当 $\theta=0$ 时,我们得到的最终单纯形表如下:

基变量	方程	系数						右端项
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Z	(0)	0	0	1	0	1	1	11
x_1	(1)	1	1	5	0	3	-2	3
x_3	(2)	2	0	-1	1	-1	1	1

- (a) 用 θ 的函数表示 Z 以及 BF 解。决定保持 BF 解可行的 θ 的变动上界和变动下界。之后确定在这个范围内最好的 θ 的值。
- (b) 在(a)中求出的 θ 的变动范围之内,确定保持最优性的 c_1 (目标函数中 x_1 的系数)的允许变动范围。

6.7-18 考虑下面的问题:

$$\max Z = 10x_1 + 4x_2$$

$$\text{s. t. } 3x_1 + x_2 \leq 30$$

$$2x_1 + x_2 \leq 25$$

$$\text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

用 x_3 和 x_4 表示两个约束方程中的松弛变量。应用单纯形法,我们得到的最终单纯形表如下:

基变量	方程	系 数					右端项
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	
Z	(0)	1	0	0	2	2	110
x_2	(1)	0	0	1	-2	3	15
x_1	(2)	0	1	0	1	-1	5

假设下列变化在原模型中同时发生:

1. 第一个约束方程变成 $4x_1 + x_2 \leq 40$
2. 利用参数规划表示目标函数如下

$$Z(\theta) = (10 - 2\theta)x_1 + (4 + \theta)x_2$$

这里 θ 是一个非负值。

- (a) 构建修订后的最终单纯形表(用 θ 的函数形式表示),之后将这张单纯形表转化成适当的形式,并用这张单纯形表找到当 $\theta=0$ 或者 θ 值显著小时新的最优解。
- (b) 保持最优解最优性的 θ 的上界是多少?
- (c) 在 0 到 b 中求出的 θ 的上界这个范围内, θ 取多少可以使目标函数有最大值?

6.7-19 考虑下面的问题:

$$\max Z = 9x_1 + 8x_2 + 5x_3$$

$$\text{s. t. } 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 4$$

$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 11$$

$$\text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

用 x_4 和 x_5 表示两个约束方程中的松弛变量。通过使用单纯形法,我们得到的最终单纯形表如下:

基变量	方程	系 数					右端项	
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4		x_5
Z	(0)	1	0	2	0	2	1	19
x_1	(1)	0	1	5	0	3	-1	1
x_3	(2)	0	0	-7	1	-5	2	2

D, I(a) 假设现在可以使用一种新的技术来生产第一种产品。如果新技术被采用,并且取代旧的技术,那么模型中 x_1 的系数变化如下:

$$\text{从 } \begin{bmatrix} c_1 \\ a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ 变到 } \begin{bmatrix} c_1 \\ a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

利用灵敏度分析来研究这项新技术产生的效果,以及是否应该采用这种新技术。如果假设这项新技术被采用,那么构造修订后的最终单纯形表,然后将这个最终单纯形表转化成适当的形式,并重新最优化来找到新的最优解。

(b) 现在假设你可以混合使用新旧两种技术来生产第一种产品。用 θ 表示生产中使用新技术的比例,所以有 $0 \leq \theta \leq 1$ 。对于给定的 θ , x_1 在模型中的系数

$$\text{是 } \begin{bmatrix} c_1 \\ a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9+9\theta \\ 2+\theta \\ 5+\theta \end{bmatrix}。 \text{ 构建修订后的最终单纯形表(用 } \theta \text{ 的函数形式表示),}$$

之后将这张单纯形表转化成适当的形式。利用这张单纯形表找出以 θ 函数形式表示的当前基本解。在 $0 \leq \theta \leq 1$ 范围内,给出能同时保持解的最优性和可行性的 θ 的范围。在这个范围内,最好的 θ 值是哪个?

6.7-20 考虑下面的问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \\ \text{s. t.} \quad & -2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5 \\ & 3x_1 + x_2 - x_3 \leq 10 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

用 x_4 和 x_5 表示两个约束方程中的松弛变量。通过使用单纯形法,我们得到的最终单纯形表如下:

基变量	方程	系 数						右端项
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Z	(0)	1	0	20	0	9	7	115
x_1	(1)	0	1	3	0	1	1	15
x_3	(2)	0	0	8	1	3	2	35

同时对约束右端项和目标函数应用参数线性规划。新的模型如下:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z(\theta) = (3+2\theta)x_1 + (5+\theta)x_2 + (2-\theta)x_3 \\ \text{s. t.} \quad & -2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5+6\theta \\ & 3x_1 + x_2 - x_3 \leq 10-8\theta \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

构建修订后的最终单纯形表(用 θ 的函数形式表示),之后利用高斯消元法将这张单纯形表转化成适当的形式。利用这张单纯形表找出以 θ 函数形式表示的当前基本解。对于 $\theta \geq 0$,给出能同时保持解的最优性和可行性的 θ 的范围。在这个范围内,最佳的 θ 值是哪个?

6.7-21 考虑 3.1 节中给出的 Wyndor Glass 公司问题。假设,除了考虑增加两种新产品外,经理还想改变原来一种老产品的生产产量,见表 3.1。生产每一单位这种老产品,每周所需要花费的生产小时数在车间 1、车间 2 和车间 3 中分别是 1、4 和 3。因此,如果我们用 θ 表示这种老产品产量的改变(可以是正的也可以是负的),3.1 节中的三个约束方程的约束右端项变成 $4-\theta$, $12-4\theta$ 和 $18-3\theta$ 。因此,选择一个负的 θ 值可以释放生产能力来生产更多的两种新产品。选择正值则会起到相反的效果。

- (a) 使用参数线性规划方程来决定选择不同的 θ 值会对表 4.8 中给出的两种新产品的最优组合产生什么样的影响。特别地,我们假设 θ 非常接近 0,所以对于给定的 θ 值,不会影响当前解的最优性和可行性,利用 5.3 节中介绍的知识找出 Z 以及基变量 x_1 、 x_2 和 x_3 ,利用 θ 给出的表达式。
- (b) 下面考虑对于 θ 的选择以及两种新产品的混合问题。当老产品的单位利润低于多少的时候,应该减少老产品的生产? 当老产品的单位利润高于多少的时候应该增加老产品的生产?
- (c) 当老产品应该增加生产的时候,产量最多可以增加多少才能保证最终的 BF 解是可行的?
- (d) 如果老产品的产量应该减少,那么产量最多可以减少多少(假设原来的产量比这个减少量要大)才能保证最终的 BF 解是可行的?

6.7-22 考虑下面的问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 1 \\ & 2x_2 + x_3 \leq 2 \\ \text{且} \quad & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

假设我们使用大 M (见第 4.6 节)法来获得最初的(人工的)BF 解。用 \bar{x}_4 表示人工松弛变量, x_5 是第二个约束方程的剩余变量, \bar{x}_6 是第二个约束方程的人工变量, x_7 是第三个约束方程的松弛变量。相应的产生最优解的最终方程组如下

$$\begin{aligned} (0) \quad & Z + 5x_2 + (M+2)\bar{x}_4 + M\bar{x}_6 + x_7 = 8 \\ (1) \quad & x_1 - x_2 + \bar{x}_4 - x_7 = 1 \\ (2) \quad & 2x_2 + x_3 + x_7 = 2 \\ (3) \quad & 3x_2 + \bar{x}_4 + x_5 - \bar{x}_6 = 2 \end{aligned}$$

假设目标函数被变成 $Z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$, 而第三个约束方程被变成 $2x_1 + x_3 \leq 1$ 。使用灵敏度分析来修订这个方程组(在最终单纯形表中),之后将其转换成适当的形式并找到基本解。之后检验可行性与最优性(不需要重新最优化)。

6.8-1 考虑下面的问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 2x_1 + 5x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 10 \text{ (第一种资源)} \end{aligned}$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 12 \text{ (第二种资源)}$$

$$\text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

这里 Z 以美元的形式来衡量两种产品的利润。

在进行灵敏度分析时,你知道单位利润在估计值上下 50% 浮动。也就是说,对于第一种产品其实际利润可能在 1 美元到 3 美元之间,而对于第二种产品的利润,其实际值可能在 2.50~7.50 美元之间。

E* (a) 为原始问题在电子表格上建立模型。之后使用 Solver 找到最优解以及灵敏度报告。

E* (b) 利用电子表格和 Solver 检验当第一种产品的利润从 2 美元变到 1 美元,以及从 2 美元变到 3 美元的时候最优解是否仍然保持最优性。

E* (c) 利用电子表格和 Solver 检验当第一种产品的利润保持 2 美元不变,而第二种产品的利润从 5 美元变到 2.5 美元,以及从 5 美元变到 7.5 美元的时候最优解是否仍然保持最优性。

E* (d) 当第一种产品的利润从 2 美元上升到 3 美元的时候(第一种产品利润不变),利用 Solver 表格系统化生成最优解和总利润。之后,保持第一种产品的利润不变,当第二种产品的利润从 2.5 美元上升到 7.5 美元的时候,利用 Solver 表格系统化生成最优解和总利润。

I(e) 使用 IOR Tutorial 中的图形方法与灵敏度分析程序分析每一种产品的单位利润在保持解最优性时的允许变动范围。

E* (f) 使用 Excel Solver 中提供的灵敏度报告分析每一个产品的单位利润在保持解最优性时的允许变动范围。之后用这个范围来检查(b)到(e)的结果。

E* (g) 利用 Solver 表格对两种产品的单位利润进行系统化的双端变化分析。变化情况为(d)中提到的两种产品的单位利润同时发生变化。

I(h) 使用 IOR Tutorial 中的图形方法与灵敏度分析程序对(g)中的结论进行解释。

E* 6.8-2 再一次考虑问题 6.8-1 中的模型。在进行灵敏度分析的时候,你发现原模型中的约束右端项的真实值可以在其估计值上下 50% 之内。也就是说,对于第一个约束右端项的可能变化范围是 5 到 15,对于第二个约束右端项的可能变化范围是 6 到 18。

(a) 完成对原始的电子表格模型处理之后,对于第一个约束方程的约束右端项加 1,再次进行处理,找到其对应的影子价格。

(b) 利用 Solver 表格分析第一个约束方程的约束右端项从 5 增加到 15,每次加 1 时最优解和总利润的情况。利用这个表格估计该约束右端项的允许变化范围,也就是它在什么范围内变化时(a)中得到的影子价格仍然是可用的。

(c) 对于第二个约束方程重复(a)过程。

(d) 对于第二个约束方程重复(b)过程。其中约束右端项从 6 增加到 18,每次加 1。

(e) 使用 Solver 的灵敏度报告找出每个约束方程对应的影子价格以及没有约束方程的约束右端项的允许变化范围。

6.8-3 考虑下面的问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + 3x_2 \leq 8 \text{ (第一种资源)} \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \text{ (第二种资源)} \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

这里 Z 表示两种产品带来的以美元计量的利润, 约束右端项表示各种可用资源的总量。

I(a) 利用图形方法来解决这个模型。

I(b) 对每种可用资源增加 1 单位, 之后使用图形方法再次进行处理, 找到每种资源的影子价格。

E* (c) 利用电子表格和 Solver 重复进行(a)和(b)中的工作。

E* (d) 对每一种资源进行分析。使用 Solver 表格系统化地生成最优解和总利润。其中, 第一种资源从 4 变到 14, 第二种资源从 0 变到 6。之后利用这个结果对每种资源的允许变动范围进行分析。

(e) 使用 Solver 的灵敏度报告找出每个约束方程对应的影子价格, 并找出保持影子价格可用时的各种资源总量的允许变动范围。

(f) 请解释为什么当管理层可以改变各种可用资源的总量时, 影子价格非常有用。

6.8-4* G. A. Tanner 公司生产的一种产品是某种玩具, 预计每一个玩具可以带来 3 美元的利润。由于这种玩具的需求量很大, 因此管理层希望可以在当前的每天生产 1 000 件产品的基础上增加产量。但是, 由于从供应商那里获得部件(A 和 B)的数量有限, 所以很难提高产量。每一个玩具需要两个 A 部件, 但是, 供应商对于这种部件的供应数量只能从每天 2 000 个增加到每天 3 000 个。每一个玩具只需要一个部件 B, 但是这种部件的供应商没有办法提高该部件的供应量, 所以供应量仍然是每天 1 000 个。由于目前没有办法找到其他提供这两种部件的供应商, 所以管理层决定自己生产这两种部件来满足需求。但是生产时由于某种原因 A 和 B 必须等产量同时生产。按照估计, 如果公司自己生产这两种部件, 因为 A 和 B 同时生产, 那么每生产一组 A 和 B 所花费的总成本与从供应商那里购买花费的总成本相比, 都会高出 2.5 美元。因此, 管理层想要知道玩具和两种部件各自的产量分别是多少, 才能使利润实现最大化。

下面这张表格总结了这个问题中的数据。

资源	单位产品所消耗的资源		可用资源总数
	生产玩具	生产部件	
部件 A	2	-1	3 000
部件 B	1	-1	1 000
单位利润	3 美元	-2.5 美元	

E* (a) 建立这个问题的电子表格模型, 并进行处理。

- E* (b) 由于这两种部件的单位利润是估计出来的,所以管理层想要知道,当最优解保持不变的时候这个估计值可以有多大的变动范围。在生产第一种产品时(生产玩具)请使用电子表格和 Solver 来生成一张表格,在这张表格中给出当这种产品的单位利润在上下 50% 的范围内变动,也就是从 2 美元到 4 美元这个范围内变动时的最优解和总利润。从这个结果中分析该玩具的单位利润在保持解的最优性不变时的允许变动范围。
- E* (c) 对第二种产品重复(b)中的过程。请使用电子表格和 Solver 生成一张表格,在这张表格中给出当这种产品的单位利润在上下 50% 的范围内变动,也就是从 -3.5 美元到 -1.5 美元这个范围内变动时的最优解和总利润(在这个过程中,玩具的单位利润固定在 3 美元不变)。
- E* (d) 利用 Solver 表格对(b)、(c)总的问题进行系统化的分析,只是浮动范围为 25%,并利用这个结果来精确(b)、(c)中的结论。
- I(e) 使用 IOR Tutorial 中提供的图形方法与灵敏度分析程序来决定每种产品的单位利润,在保持最优解不变的前提下,向两个方向可以变化多大。利用这个信息决定每种产品单位利润在保持解的最优性时的允许变动范围。
- E* (f) 利用 Excel 的灵敏度报告来分析每种产品单位利润在保持解的最优性时的允许变动范围。
- E* (g) 利用 Solver 表格的双端变化分析,系统化地生成当(b)、(c)中描述的两种产品的单位利润同时发生变化时的最优解。
- (h) 利用 Excel 的灵敏度报告说明当保持最优解不变,两种产品的单位利润同时发生变化时,可以变化多少。
- E* 6.8-5 再次考虑问题 6.8-4。经过与两个供应商的进一步谈判,G. A. Tanner 公司的管理层从供应商那里知道,如果本公司愿意为额外的产量支付一笔金额不是很高的溢价,那么这两个公司都将愿意在现在所能提供的水平上(每天 3 000 的 A 和每天 1 000 的 B)增加产量。但是每种部件所需支付的溢价还有待谈判。由于对玩具的需求量特别大,所以可以保证在供应充足的条件下,每天生产 2 500 件玩具全部卖出。假设在问题 6.8-4 中给出的玩具的单位利润是准确的。
- (a) 在部件最大供应量没有发生变化时,加入玩具产量每天不能超过 2 500 件的新的约束条件。对加入新的约束条件的原始问题建立数学模型和电子表格模型。
- (b) 在不考虑奖金的情况下,利用电子表格和 Solver 确定,当部件 A 在目前最大供应量的基础上增加一个单位,它的影子价格是多少。利用这个影子价格确定本公司对于这种部件愿意支付的最高溢价是多少。
- (c) 对于部件 B 重复(b)过程。
- (d) 假设对于 A 部件的最大供应量从 3 000 增加到 4 000,利用 Solver 表格生成最优解和总利润,利用结果估计在保持(b)中求出的 A 部件的影子价格仍然可用的前提下,A 部件的最大供应量能增加多少。
- (e) 对于 B 部件,当最大供应量从 1 000 增加到 2 000 时,重复(d)中的过程。
- (f) 使用 Solver 中的灵敏度报告确定每一种部件的影子价格以及约束右端项的允许

变动范围。

E* 6.8-6* 考虑 3.4 节中的 Union Airways 问题以及在表 3.19 中给出的数据。第 3 章中的 Excel 文件包含了一张电子表格,它给出了这个问题的公式以及最优解。利用这张电子表格以及 Excel Solver 来处理下面的问题(a)~(g)。

公司的管理层将要同代表客户服务代理商的协会谈判一个新的合同。谈判的结果可能导致表 3.19 中给出的对于每个代理商的日成本发生微小的变化。下面列出了几种可能的变化。这些变化将会被分别考虑。对于每一种变化,管理层都需要考虑,这个变化会不会导致电子表格中已经求出来的最优解发生变化。通过直接使用电子表格和 Solver 来处理问题(a)~(e)。如果最优解发生了变化,找出新的最优解。

(a) 对于 shift2 中的每个代理商的日成本从 160 美元变为 165 美元。

(b) 对于 shift4 中的每个代理商的日成本从 180 美元变为 170 美元。

(c) (a)、(b)中的变化同时发生。

(d) 对于 shift2, shift4, shift5 每个代理商的日成本增加 4 美元,而对于 shift1, shift3 中的每个代理商的日成本降低 5 美元。

(e) 对于每个 shift,每个代理商的日成本增加 2%。

(f) 使用 Solver 生成这个问题的灵敏度报告。假设上述改变将推迟考虑,目前还没有可用的计算机电子表格。对于每一种情况,说明如何利用灵敏度报告来分析原最优解是否仍然一定最优。

(g) 对于这 5 个 shift,利用 Solver 表格系统化地生成最优解和总利润。所发生的变化是,对于每一个 shift 中的每个代理商的日成本从比当前成本少 15 美元增加到比当前成本多 15 美元,每次增加 3 美元。

E* 6.8-7 再次考虑 Union Airways 问题以及在问题 6.8-6 中处理过的电子表格。

管理层现在考虑通过对表 3.19 中的最右端列增加一个单位或者多个单位,来提高对客户的服务水平。为了帮助它们做出决定,它们希望知道这些变化会对总成本产生什么样的影响。

使用 Excel Solver 生成灵敏度报告,并解释下列问题。

(a) 表 3.19 中的哪个最右端列的数值可以增加(其他数值不变)而不会导致总利润的增加?

(b) 对于其他会导致总成本增加的数值,每增加 1 将会导致总成本增加多少? 对于每一个答案,在答案不再成立之前最多可以增加多少?

(c) 如果(b)中考虑的所有数值都增加 1,那么(b)的答案仍然成立么?

(d) 如果所有的 10 个数值都增加 1,那么(b)的答案仍然成立么?

(e) 在(b)的答案不再成立之前,所有的 10 个数值都增加相同的量,那么最多这个量可以是多少?

6.8-8 David、LaDeana 和 Lydia 都是一家生产钟表的公司的工人,三个人合作生产钟表。David 和 LaDeana 每周最多可以工作 40 个小时,而 Lydia 每周最多可以工作 20 个小时。

这家公司生产两种不同的钟表：老爷钟和挂钟。David 负责对钟表的内部零件进行组装；LaDeana 负责给钟表安装一个木制的外壳；Lydia 负责整理和运走完工的钟表。每一项工作所需要的时间如下：

工作	需要时间	
	老爷钟/小时	挂钟/小时
装配	6	4
加壳	8	4
搬运	3	3

每一个老爷钟可以产生 300 美元的利润，而每一个挂钟可以产生 200 美元的利润。为了获得最大的总利润，需要决定每周各生产两种钟多少个。

(a) 为这个问题建立线性规划模型。

I(b) 使用 IOR Tutorial 中提供的图形方法与灵敏度分析程序求解这个模型。接着利用这个程序来分析，如果老爷钟的利润从 300 美元增加到 375 美元，而其他条件不发生变化时，最优解是否发生变化。接着分析，当老爷钟的单位利润为 375 美元，而挂钟的利润从 200 美元减少到 175 美元时，最优解是否发生变化。

E* (c) 利用电子表格求解这个问题。

E* (d) 利用电子表格来检验(b)中的变化。

E* (e) 当老爷钟的利润从 150 美元变化到 450 美元，每次增加 20 美元，而挂钟的利润不发生变化时，利用 Solver 表格系统化地生成最优解和总利润。之后，在老爷钟利润不发生变化，而挂钟的利润从 50 美元增加到 350 美元，每次增加 20 美元时，利用 Solver 表格系统化地生成最优解和总利润。利用得到的结果分析两种钟的单位利润在保持解的最优性不变的情况下的允许变动范围。

E* (f) 当两种钟的单位利润仍像在(e)中一样同时发生变化，只是每次增加 50 美元而不是 20 美元时，利用 Solver 表格的双端分析生成最优解。

E* (g) 利用 Excel Solver 分析这三个人分别独立的将自己每周的最多工作时间增加 5 小时后，对最优解以及总利润的影响。

E* (h) 利用 Solver 表格系统化地生成最优解和总利润。变化是 David 的每周最大工作时间分别取 35 小时、37 小时、39 小时、41 小时、43 小时和 45 小时。之后用同样的方法对 LaDeana 进行分析，每周最大工作时间分别取 35 小时、37 小时、39 小时、41 小时、43 小时和 45 小时。然后用同样的方法对 Lydia 进行分析，每周最大工作时间分别取 15 小时、17 小时、19 小时、21 小时、23 小时和 25 小时。

E* (i) 产生灵敏度报告，分析每种产品单位利润在保持最优解不变的时候的允许变动范围。之后分析每人最大工作时间在保持最优解不变时候的允许变动范围。

(j) 为了增加总利润，三个人决定他们当中有一个人需要增加最大工作时间。为了选出哪个人来增加工作时间，需要判断谁增加工作时间可以带来最多的总利润。利用灵敏度报告来做决定。这里假设原模型中产品的单位利润没有发生变化。

- (k) 解释为什么有一个影子价格等于 0。
- (l) 如果 Lydia 将她的每周最大工作时间从 20 小时增加到 25 小时, 灵敏度报告中的影子价格是否可以用来解释产生的效果? 如果可以, 那么总利润增加了多少?
- (m) Lydia 将她的每周最大工作时间从 20 小时增加到了 25 小时后, David 的每周最大工作时间从 40 变成 35, 再次进行(l)中的分析。
- (n) 利用图形分析方法证明(m)中的结论。



案例 控制空气污染

回忆 3.4 节中的 Nori & Leets 公司问题。当运筹小组得到了一个最优解之后, 我们提到, 这个小组接下来要进行灵敏度分析。下面先提供一些背景材料, 让你回忆起运筹小组所采取的步骤, 然后再继续我们的故事。

原模型中各参数的值见表 3.12、表 3.13 和表 3.14。由于该公司以前没有消除污染的经验, 所以表 3.14 中对成本的估计非常不准确, 每一个数字都可以上下浮动 10%。对表 3.13 中参数的估计也是很很不准确的, 但是不像表 3.14 中那样严重。相反, 表 3.12 中的数字是政策标准, 所以是固定的。

但是, 对于将各种污染物要求减少的排放量的政策标准设定在哪里仍然存在争议。表 3.12 中给出的数字实际上是在明确满足这些标准所产生的成本之间商定的临时性的初步的值。政府与公司都同意, 有关政策标准的决策最终将取决于成本与利润的转化。按照这个理念, 政府得出结论, 政策标准在当前值(表 3.12 中的全部数字)每提高 10 个百分点, 对这个城市将产生 350 万美元的价值。因此, 政府决定每降低 10 个百分点的政策标准(直到 50%), 就给公司减少 350 万美元的税。

最终, 仍然存在关于三种污染物政策标准相关数值的争论。如表 3.12 所示, 对于粉尘的要求减少量比氧化物或者碳氢化合物的要求减少量的一半还要少。有些人要求减少这些不平等。其他人则认为, 由于氧化物和碳氢化合物的危害更大, 所以需要更大的不平等。大家都同意等得到关于哪一种标准可用的信息之后再重新考虑这个问题。

(a) 使用任何一种线性规划软件来处理 3.4 节中给出的关于这个问题的模型。除了最优解, 获取用于优化后分析(即 Excel 的灵敏度报告)的进一步的输出。利用这个分析结果为下面的步骤做准备。

(b) 忽略对参数值没有确定影响的约束(即 $x_j \leq 1, j=1, 2, \dots, 6$), 找到这个模型中的灵敏参数(提示: 参考 4.7 节的“灵敏度分析”小节)。判断在可能的情况下, 哪些参数应该变更自己的估计。

(c) 分析表 3.14 中的每一个成本参数如果估计不精确可能带来的影响。如果真实值比估计值少 10%, 是否会改变最优解? 如果真实值比估计值高 10%, 是否会改变最优解? 请指出哪个参数需要更仔细的估计。

(d) 考虑这样的问题: 在使用单纯形法之前, 将你的模型被转换成求最大值的形式。利用表 6.14 求出这个问题的对偶问题。对原问题使用单纯形法, 利用输出结果找到对偶问题的最优解。如果原问题采用求最小值的形式, 那么会如何影响对偶问题的形式, 如何

影响对偶问题最优解中变量的符号?

(e) 对于每一种污染物,利用(d)中的结果来决定排放量,在这一排放量下,实际的排放量如有微小的变动就会使得最优解中的总成本发生变化。确定这个排放量在不影响总成本的变化速度的时候可以变化多少。

(f) 对于表 3.12 中政策标准的每一单位粉尘的变化,求出保持总最优解中总成本不变时氧化物应该反方向变化多少。同样,求出保持总最优解中总成本不变时碳氢化合物应该反方向变化多少。如果两者同时等量地变化,那么应该变化多少。

(g) 利用 θ 表示表 3.12 中政策标准的变化百分比,将这个问题作为一个参数线性规划问题考虑,来分析政策标准增加带来的影响。使用你从(e)中得出的结果判断什么时候 θ 只要有微小的增加,最优解中的总利润就会发生变化。

(h) 利用单纯形法来找出,当 $\theta=10, 20, 30, 40, 50$ 时,(g)中这个参数线性规划问题的最优解。考虑城市提供的税收鼓励政策,利用这些结果来考虑 θ 值,这个 θ 值使公司的成本以及税负的总和最小。

(i) 对于(h)中得到的 θ 值,重新进行(e)和(f)的工作,以便决策者可以决定三种污染物的最终的政策标准的相关值。

线性规划的其他算法

线性规划之所以非常广泛地被应用,关键原因是它拥有特别有效的算法——单纯形法。单纯形法能按部就班地解决实践中产生的大型线性规划问题。然而,单纯形法只是线性规划实践工作者常用的算法宝库的一部分。现在让我们来关注线性规划问题的其他算法。

本章首先介绍三种算法,这三种算法实际上是单纯形法的变体。接下来的三节内容将介绍对偶单纯形法(一种对灵敏度分析特别有用的单纯形法的变体)、参数线性规划(灵敏度分析体系的一种延伸)和上界法(单纯形法的最新进展,处理具有上界变量问题的方法)。我们对这些算法的介绍不会像在第 4 章和第 5 章介绍单纯形法那样深入。目标只是简要介绍这些算法的主要思想。

4.9 节介绍了线性规划的另一种算法,那是一种在可行域内部移动的算法。我们将在 7.4 节更深入地讨论这种内点算法。

与线性规划问题不同,线性目标规划不是只拥有一个单独的目标(最大化或最小化)。相反,它拥有多个目标,要求我们必须努力地同时实现这些目标。一些规范化技术使得一个线性目标规划问题得以转化回到线性规划问题,因此仍然可以使用基于单纯形法的求解过程。



7.1 对偶单纯形法

对偶单纯形法基于第 6 章 6.1 节提出的对偶理论。要阐述该算法背后所隐含的基本思想,使用 6.3 节中表 6.10 和表 6.11 介绍的一些术语来描述任意一对原问题和对偶问题的互补性基解是有帮助的。特别地,让我们回顾一下,当原问题基解可行时,这两个互补的基解被称为原问题可行解;反之,当互补的对偶基解对于对偶问题可行时则称它们是对偶可行解。让我们再回顾一下,一个互补的基解仅当它既是原问题可行解也是对偶可行解时,它才是对应于它的问题的最优解(正如表 6.11 右侧所说明的)。

对偶单纯形法可以被视为单纯形法的影像。单纯形法直接处理原问题的基本解,这些基本解对原问题是可行的,但不是对偶可行。然后单纯形法通过力图达到对偶也可行

(单纯形法中的最优检验数)而且移向一个最优解。与此相反,对偶单纯形法在原问题中直接处理的基本解对于对偶问题是可行的而对原问题是不可行的。然后,对偶单纯形法通过力图达到原问题也可行而且移向一个最优解。

不仅如此,对偶单纯形法在解决问题时仿佛单纯形法也正被同时应用于它的对偶问题。如果我们让它们的初始基本解互补,在这两种方法进行的全过程中,每一次迭代都会获得互补基本解。

对偶单纯形法在一些特殊情况下非常有用。通常而言,获得原问题的初始 BF 解比获得对偶初始 BF 解更容易。然而,有时我们必须引入一些人工变量以构建初始 BF 解。在这种情况下,我们可能更容易以一个对偶 BF 解开始并使用对偶单纯形法。不仅如此,我们可能需要的迭代更少,因为没有必要使那些人工变量为 0。

当一个问题的初始基解(不包括人工变量)既非原问题可行也非对偶问题可行时,也可以通过把单纯形法和对偶单纯形法结合成“原-对偶”算法,这一算法的目的是达到原可行和对偶同时可行。

正如在第 6 章和 4.7 节几次提到的,对偶单纯形法的另一个重要且主要的应用是与灵敏度分析结合起来。假定已经通过单纯形法获得了一个最优解,但这时模型需要(或出于你对灵敏度分析的兴趣)做小的变化。如果先前的最优解已经不再是原问题可行的(但仍满足最优检验),你可以马上从这个对偶 BF 解开始并应用对偶单纯形法。比起用单纯形法从头开始求解这个新问题,以这种方式使用对偶单纯形法常常可以更快地获得新的最优解。

对偶单纯形法也可以从一开始就用于解决大型线性规划问题,因为它是一种相当有效的算法。使用 CPLEX 的最强版本的计算经验表明,对偶单纯形法在求解实践中表明,对特别大型的问题它经常比单纯形法更有效率。

对偶单纯形法的运算规则与单纯形法的运算规则类似。事实上,一旦方法开始,唯一不同的就是选择入基变量和出基变量以及停止计算的标准。

(对一个最大化问题)要开始对偶单纯形法,我们必须使所有方程(0)中的系数为非负(因此这个基本解是对偶可行的)。这个基本解是不可行的(最后一个基本解除外)只是因为有些变量是负的。该算法逐步减小目标函数的值,并总是保持方程(0)中的系数为非负,直到所有变量是非负的。这样得到的基本解是可行的(它满足所有等式),并且,根据单纯形法的方程(0)系数非负准则,它是最优的。

下面总结对偶单纯形法的详细过程。

对偶单纯形法的总结

1. 初始化: 在把所有“ \geq ”形式的函数约束转化为“ \leq ”形式后(通过两边同乘以-1),按需要引入剩余变量以建立描述问题的一组方程。寻找一个基本解,使得基变量方程(0)的系数是 0,且基变量的方程(0)系数为非负(因此如果这个解是可行的,它就是最优的),然后进行可行性检验。

2. 可行性检验: 检查所有的基变量是否都是非负的。如果是,那么这个解是可行的,因而也是最优的,算法停止;否则,进行迭代。

3. 迭代

步骤 1: 确定出基变量。选择值为负且拥有最大绝对值的基变量。

步骤 2: 确定入基变量: 将含有出基变量方程的某一倍数加到(0)行方程上, 该行方程系数首先达到 0 的非基变量作为入基变量。这个选择是通过检查方程(含有出基变量的方程)系数为负的非基变量, 并以方程(0)系数与该方程系数比值中的最小绝对值所对应的非基变量作为入基变量。

步骤 3: 确定新的基本解。从当前的方程组出发, 按照高斯消元法求解基本量。当令非基变量等于 0 时, 每个基变量(和 Z)等于出现该变量(系数为 +1)的一个方程新的右端项的值。返回到可行性检验。

要完全理解对偶单纯形法, 你必须意识到该算法的运行与单纯形法被运用于对偶问题中的互补的基本解一样(事实上, 这一解释正是构建对偶单纯形法的动机)。迭代过程的步骤 1, 选择出基变量等同于确定绝对值最大的变量对应于对偶问题中方程(0)的值为负且绝对值最大的变量(见表 6.3)。步骤 2, 确定入基变量等同于确定对偶问题中的出基变量。方程(0)中最先达到 0 的系数对应于对偶问题中最先达到 0 的变量。这两个算法终止的准则也是互补的。

一个例子

我们现在通过应用对偶单纯形法求解 Wyndor Glass 公司的对偶问题(见表 6.1)来说明这一算法。通常情况下, 这个方法直接应用于我们所关心的问题(原问题)。但是, 我们选择这个问题是因为你已经在表 4.8 中看到了单纯形法应用于它的对偶问题(即原问题^①), 因此你可以对这两种方法进行比较。为了比较方便, 我们继续用 y_i 而不是 x_i 来表示问题中待求解的决策变量。

在最大化形式下, 待求解问题是

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = -4y_1 - 12y_2 - 18y_3 \\ \text{s. t.} \quad & y_1 + 3y_3 \geq 3 \\ & 2y_2 + 2y_3 \geq 5 \\ \text{且} \quad & y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

既然右端项的值允许为负值, 我们没有必要引入人工变量作为初始基变量。取而代之, 我们简单地把函数约束转化为“ \leq ”形式并引入松弛变量充当初始基变量。这样, 初始方程组即如表 7.1 第 0 次迭代所示。注意到所有方程(0)的系数都是非负的, 因此如果解是可行的, 那么就是最优的。

初始的基本解是 $y_1=0, y_2=0, y_3=0, y_4=-3, y_5=-5$, 从而 $Z=0$, 这个解不是可行解, 因为存在负值。出基变量是 y_5 ($5 > 3$), 入基变量是 y_2 ($12/2 < 18/2$), 得到第 2 组方程, 在表 7.1 中以迭代 1 标记。对应的基本解是 $y_1=0, y_2=5/2, y_3=0, y_4=-3, y_5=0$, 且 $Z=-30$, 不是可行解。

^① 回顾 6.1 节中的对称性质指出对偶问题的对偶即是最初的原问题。

表 7.1 对偶单纯形法应用于 Wyndor Glass 公司的对偶问题

迭代	基变量	方程	系数					右端项	
			Z	y_1	y_2	y_3	y_4		y_5
0	Z	(0)	1	4	12	18	0	0	0
	y_4	(1)	0	-1	0	-3	1	0	-3
	y_5	(2)	0	0	-2	-2	0	1	-5
1	Z	(0)	1	4	0	6	0	6	-30
	y_4	(1)	0	-1	0	-3	1	0	-3
	y_2	(2)	0	0	1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
2	Z	(0)	1	2	0	0	2	6	-36
	y_3	(1)	0	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	1
	y_2	(2)	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

下一个出基变量是 y_4 , 入基变量是 y_3 ($6/3 < 4/1$), 得到表 7.1 的最后一组方程。对应的基本解是 $y_1 = 0, y_2 = 3/2, y_3 = 1, y_4 = 0, y_5 = 0$, 且 $Z = -36$, 它是可行解, 因此是最优解。

正如我们在表 4.8 中通过单纯形法得到的, 这个问题的对偶问题^①的最优解是: $x_1^* = 2, x_2^* = 6, x_3^* = 2, x_4^* = 0, x_5^* = 0$ 。我们建议你同时回溯表 7.1 和表 4.8, 并对比这两个互为镜像方法的互补的步骤。

如前所述, 对偶单纯形法的一个重要应用为: 当灵敏度分析的结果在初始模型中出现很小变化时, 它常被用于很快重新求解一个问题。特别是当原问题的基本解为非可行解时(一个或多个右端项为负值), 但仍满足最优性测试(在第(0)行没有负的系数), 你可以立即从该对偶可行解出发应用对偶单纯形法求解。例如当一个违背原最优解的新的约束被加入初始模型时会出现上述情形。假定表 7.1 求解的问题开始时不包含它的第一个约束 ($y_1 + 3y_3 \geq 3$)。在删去第 1 行后, 表 7.1 中第一次迭代的表表明最优解为 $y_1 = 0, y_2 = 5/2, y_5 = 0, Z = -30$ 。现假定灵敏度分析用于增加原来省去的约束 $y_1 + 3y_3 \geq 3$, 这个约束违反了原来的最优解(因为 $y_1 = 0$ 和 $y_3 = 0$), 这个约束(包括它的松弛变量 y_4)将作为第 1 行增加到表 7.1 中间的那个表中。不管这个表是应用单纯形法还是对偶单纯形法得到的初始最优解(可能经过多次迭代), 对这个表应用对偶单纯形法将导致再一次迭代后得到新的最优解。

假如你希望了解应用对偶单纯形法的其他例子, 可参阅本书网站的工作例子部分。



7.2 参数线性规划

在 6.7 节的最后我们讲述了参数线性规划及其在系统地进行灵敏度分析方面的应用, 这种分析是通过逐渐地改变各种模型参数进行的。我们现在给出运算过程, 首先是 c_j 参数改变的情况, 然后是 b_i 参数改变的情况。

^① 6.3 节提出的最优基解互补性质表明了怎样从原问题最终单纯形表的第 0 行读取对偶问题的最优解。不管最终表是利用单纯形法还是对偶单纯形法获得的, 这个相似的结论都成立。

c_j 参数的系统改变

在 c_j 参数改变的情况下, 通常的线性规划模型的目标函数

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

替换为

$$Z(\theta) = \sum_{j=1}^n (c_j + \alpha_j \theta) x_j$$

其中 α_j 是给定的输入常数, 代表系数改变的相对比率。因此, θ 从 0 逐渐增加时, 系数以这些相对比率改变。

α_j 的赋值可能代表进行系统的灵敏度分析时 c_j 同时发生的变化, 由这些变化幅度增加所引起的效果。它们也可能基于由 θ 所度量的一些因素的变化而导致一些系数(例如, 单位利润)会同时发生的变化。这个因素可能是无法控制的, 比如, 经济形势。然而, 它也可能是受决策者控制的, 例如, 从一些活动转换到另一些活动时用到的设备数量和员工数量。

对任意给定的 θ 值, 对应的线性规划问题的最优解可以通过单纯形法获得。这个解也许已经通过解 $\theta=0$ 时的最初问题而得到。然而, 我们的目标是找到改变了的线性规划问题(最大化函数 $Z(\theta)$, 约束于最初的约束)的最优解。这个最优解是 θ 的函数, 因此, 在求解时你需要能够确定当 θ 从 0 增加到任意确定正数的过程中, 最优解什么时候变化以及怎样变化(如果它确实发生变化)。

图 7.1 说明当 θ 增加时, 最优解(给定 θ)的目标函数值 $Z^*(\theta)$ 是怎样变化的。事实上 $Z^*(\theta)$ 总是拥有这种分段线性且是凸状的形式(参见习题 7.2-7)。对应的最优解只在函数 $Z^*(\theta)$ 斜率改变的 θ 值处(当 θ 在增加时)发生变化。因此, 图 7.1 描述了一个问题, 这个问题对于不同的 θ 值有三个不同的解是最优的。第一个对应于 $0 \leq \theta \leq \theta_1$, 第二个对应于 $0 \leq \theta \leq \theta_2$, 第三个对应于 $\theta \geq \theta_2$, 因为每个 x_j 的值在这些 θ 的区间上都保持不变, $Z^*(\theta)$ 的值随着 θ 变化只是由于 x_j 的系数作为 θ 的线性函数而变化。这一求解过程直接基于灵敏度分析过程, 研究 c_j 参数引起的变化(6.7 节例 2a 和例 3)。正如 6.7 节的最后一小节所提到的, 参数线性规划唯一的基本差别是表达变化的方式是以 θ 而不是特定的数字来表示。

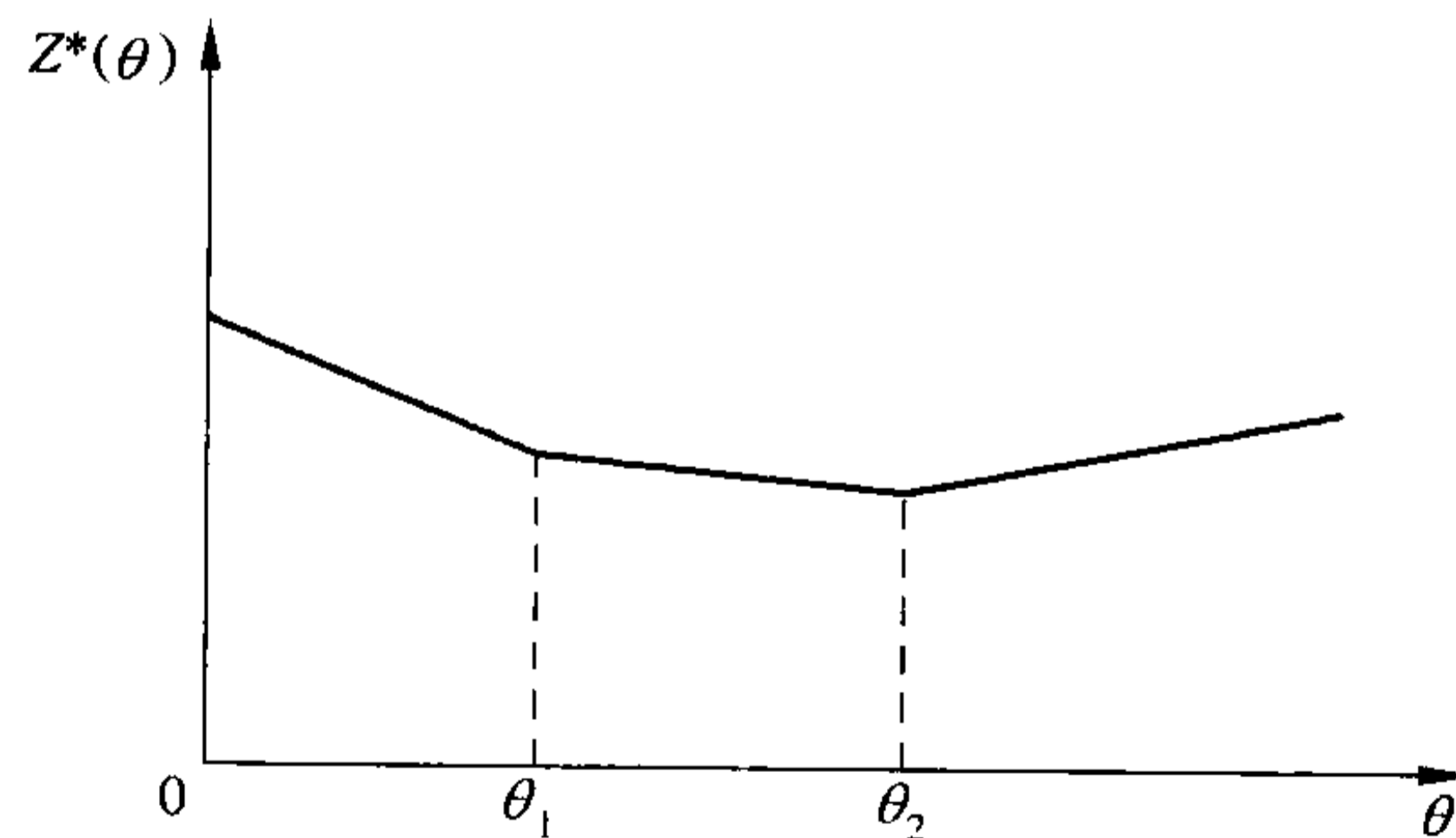


图 7.1 c_j 参数线性规划随 θ 参数系统变化时的目标函数值

例 为了说明求解过程, 假定 3.1 节提出的最初的 Wyndor Glass 公司问题中 $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -1$, 因而

$$Z(\theta) = (3 + 2\theta)x_1 + (5 - \theta)x_2$$

从 $\theta=0$ 时的最终单纯形表(表 4.8)开始求解,我们看到它的方程(0)

$$(0) \quad Z + \frac{3}{2}x_4 + x_5 = 36$$

会首先由最初($\theta=0$)系数发生的这些变化加到方程的左边:

$$(0) \quad Z - 2\theta x_1 + \theta x_2 + \frac{3}{2}x_4 + x_5 = 36$$

因为 x_1 和 x_2 都是基变量(分别出现在方程(3)和(2)中),所以它们都需要从方程(0)中代数消去:

$$\begin{array}{r} Z - 2\theta x_1 + \theta x_2 + \frac{3}{2}x_4 + x_5 = 36 \\ + 2\theta \times \text{方程(3)} \\ - \theta \times \text{方程(2)} \\ \hline (0) \quad Z + \left(\frac{3}{2} - \frac{7}{6}\theta\right)x_4 + \left(1 + \frac{2}{3}\theta\right)x_5 = 36 - 2\theta \end{array}$$

最优性检验告诉我们只要非基变量的系数仍然非负,当前的基本可行解将维持最优:

$$\frac{3}{2} - \frac{7}{6}\theta \geq 0, \quad \text{对 } 0 \leq \theta \leq \frac{9}{7} \text{ 成立}$$

$$1 + \frac{2}{3}\theta \geq 0, \quad \text{对所有 } \theta \geq 0 \text{ 成立}$$

因而,在 θ 增加到超过 $\theta = \frac{9}{7}$ 时, x_4 需要作为入基变量来进行单纯形法的另一步迭代去寻找新的最优解。然后, θ 将继续增加直到另一系数变为负数,如此循环直到 θ 增加到希望的值。现在我们总结一下整个过程,并在表 7.2 中完成了这个例子。

表 7.2 c_j 的参数线性规划应用于 Wyndor Glass 公司的例子

θ 的范围	基变量	方程	系 数					右端项	最优解	
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4			x_5
$0 \leq \theta \leq \frac{9}{7}$	$Z(\theta)$	(0)	1	0	0	0	$\frac{9-7\theta}{6}$	$\frac{3+2\theta}{3}$	$36-2\theta$	$x_4=0$ $x_5=0$
	x_3	(1)	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2	$x_3=2$	
	x_2	(2)	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	6	$x_2=6$	
	x_1	(3)	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2	$x_1=2$
$\frac{9}{7} \leq \theta \leq 5$	$Z(\theta)$	(0)	1	0	0	$\frac{-9+7\theta}{2}$	0	$\frac{5-\theta}{2}$	$27+5\theta$	$x_3=0$ $x_5=0$
	x_4	(1)	0	0	0	3	1	-1	6	$x_4=6$
	x_2	(2)	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3	$x_2=3$
	x_1	(3)	0	1	0	1	0	0	4	$x_1=4$

续表

θ 的范围	基变量	方程	系 数					右端项	最优解	
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4			x_5
$\theta \geq 5$	$Z(\theta)$	(0)	1	0	$-5+\theta$	$3+2\theta$	0	0	$12+8\theta$	$x_2=0$
	x_4	(1)	0	0	2	0	1	0	12	$x_3=0$
	x_5	(2)	0	0	2	-3	0	1	6	$x_4=12$
	x_1	(3)	0	1	0	1	0	0	4	$x_5=6$
									4	$x_1=4$

参数 c_j 系统变化时参数线性规划过程的总结

1. 令 $\theta=0$, 用单纯形法求解该问题。
2. 使用灵敏度分析过程(参见 6.7 节情形 2a 和情形 3)将 $\Delta c_j = \alpha_j \theta$ 引入方程(0)。
3. 增加 θ 至有一个非基变量在方程(0)的系数成为负数(或者直到 θ 增加到希望的值)。
4. 以该变量作为入基变量做单纯形法的一步迭代来寻找新的最优解。返回第 3 步。

参数 b_i 的系统变化

对于 b_i 参数的系统变化的情况, 原线性规划模型的一个改动是 b_i 由 $b_i + \alpha_i \theta$ 取代, ($i=1, 2, \dots, m$), 其中 α_i 是给定输入常数, 这样, 问题变为

$$\begin{aligned} \max \quad & Z(\theta) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i + \alpha_i \theta \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ & x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

目的是确定 θ 的函数的最优解。

在这个公式中, 对应的最优函数值 $Z^*(\theta)$ 总是具有如图 7.2 所示的分段线性且具有凹状的形式。最优解中的基变量组仍然只在 $Z(\theta)$ 斜率改变处发生变化。然而, 与前面情况不同的是, 当 θ 增加时, 这些变量的值现在在斜率改变处之间随着 θ 的函数(线性)而变化。原因是增加 θ 的值改变了初始方程组右端项的值, 进而引起最终方程组右端项的值的改变, 也就是说, 引起最终基变量值的改变。图 7.2 描绘了对应于不同 θ 值有三组最优基变量的问题。第一组 $0 \leq \theta \leq \theta_1$, 第二组 $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, 第三组 $\theta \geq \theta_2$ 。在 θ 的每个这样的区间里, 尽管 c_j 固定, 然而因为 x_j 的值在改变, $Z^*(\theta)$ 的值随着 θ 变化而变化。

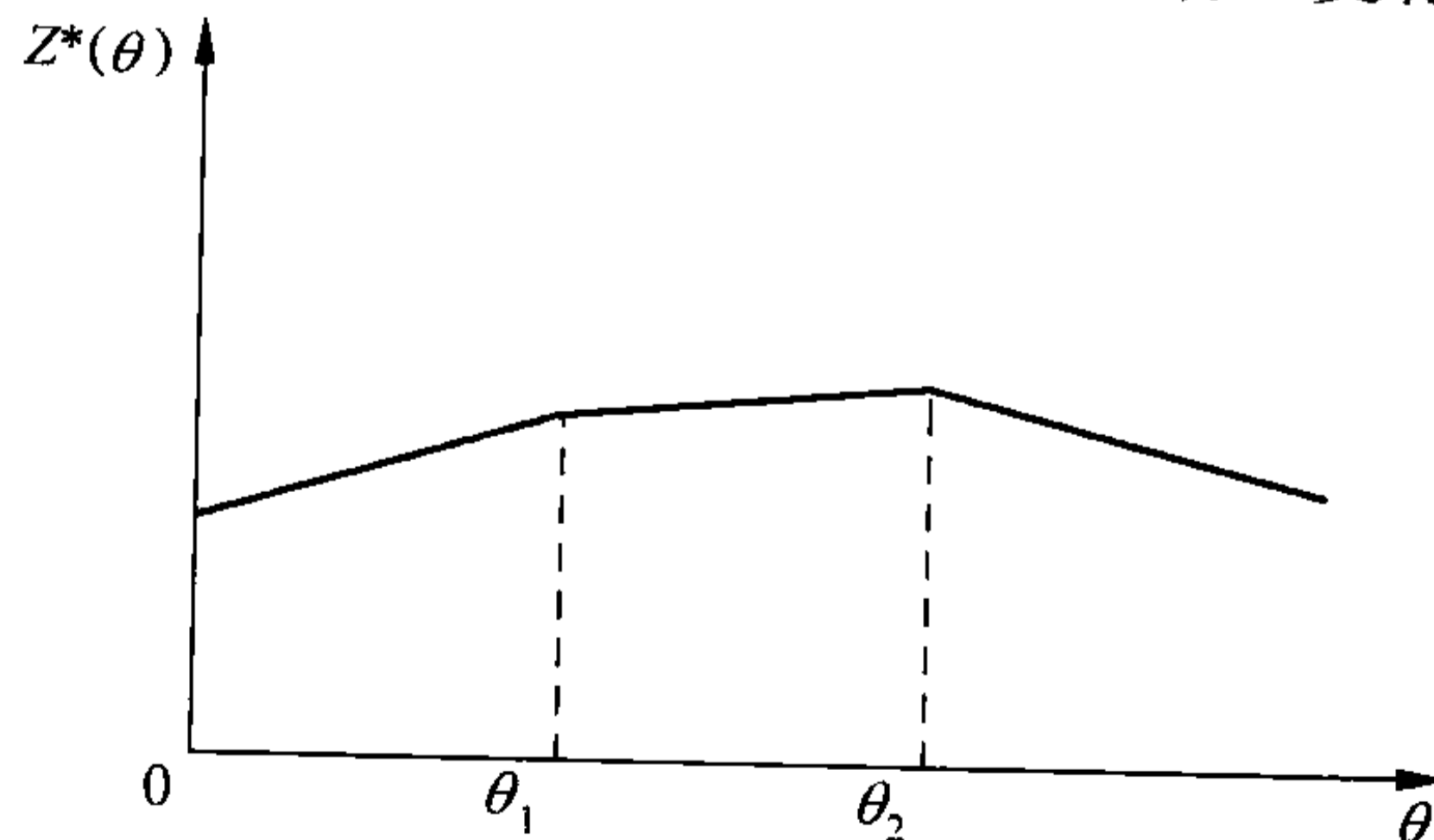


图 7.2 b_i 参数线性规划随 θ 参数系统变化的目标函数值

下面的求解过程总结与刚才提出的参数 c_j 系统变化的求解过程很相似。原因是改变 b_i 的值等同于改变对偶问题目标函数的系数。因而,对原问题执行这一过程正好与同时对对偶问题应用参数 c_j 系统变化的参数线性规划过程互补。因此,对偶单纯形法(参见 7.1 节)被用于获得每一个新的最优解,并且适用的灵敏度分析情况(参见 6.7 节)是情况 1,但这些不同是仅有的主要差异。

参数 b_i 的系统变化的参数线性规划的总结

1. 令 $\theta=0$ 运用单纯形法求解的问题。
2. 运用灵敏度分析过程(6.7 节情况 1)把改变量 $\Delta b_i = a_i \theta$ 引入右侧一列。
3. 增加 θ 值直到基变量对应的右侧一列的值为负(或直到 θ 增加到希望的值)。
4. 以该变量作为出基变量进行对偶单纯形法的一步迭代以寻找新的最优解,然后返回第 3 步。

例 为了在一定程度上说明这个过程,并在过程中揭示与参数 c_j 系统变化过程的对偶关系,我们现在把它应用到 Wyndor Glass 公司的对偶问题(参见表 6.1)。特别地,假定 $\alpha_1=2$ 且 $\alpha_2=-1$,那么函数约束成为

$$\begin{aligned} y_1 + 3y_3 &\geq 3 + 2\theta & \text{或} & & -y_1 - 3y_3 &\leq -3 - 2\theta \\ 2y_2 + 2y_3 &\geq 5 - \theta & \text{或} & & -2y_2 - 2y_3 &\leq -5 + \theta \end{aligned}$$

这样,这个问题的对偶问题就正好是表 7.2 中考虑的示例。

在表 7.1 中, $\theta=0$ 时此问题已经得到解决,因此从该节得到的最终单纯形表出发。应用针对 6.7 节的情况 1 的灵敏度分析过程,我们发现表中右侧一列的值如下:

$$\begin{aligned} Z^* = \mathbf{y}^* \bar{\mathbf{b}} &= [2, 6] \begin{bmatrix} -3 - 2\theta \\ -5 + \theta \end{bmatrix} = -36 + 2\theta \\ \mathbf{b}^* = \mathbf{S}^* \bar{\mathbf{b}} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 - 2\theta \\ -5 + \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{2\theta}{3} \\ \frac{3}{2} - \frac{7\theta}{6} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因此,该表中的两个基变量

$$y_3 = \frac{3 + 2\theta}{3} \quad \text{和} \quad y_2 = \frac{9 - 7\theta}{6}$$

在 $0 \leq \theta \leq \frac{9}{7}$ 之内仍然保持非负。增加 θ 到超过 $\theta = \frac{9}{7}$ 时,要求使 y_2 成为出基变量,用对偶单纯形法进行下一步迭代,照此分析。表 7.3 对此过程进行了总结。

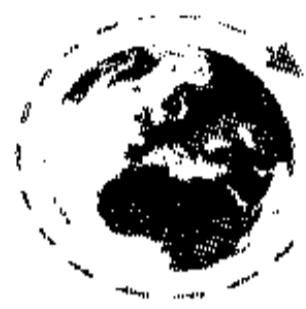
我们建议你同时追溯表 7.2 和表 7.3 以观察这两个过程的对偶关系。

表 7.3 应用于 Wyndor Glass 公司例子对偶问题的 b_i 参数线性规划

θ 的范围	基变量	方程	系 数					右端项	最优解	
			Z	y_1	y_2	y_3	y_4			y_5
$0 \leq \theta \leq \frac{9}{7}$	$Z(\theta)$	(0)	1	2	0	0	2	6	$-36 + 2\theta$	$y_1 = y_4 = y_5 = 0$
	y_3	(1)	0	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{3 + 2\theta}{3}$	$y_3 = \frac{3 + 2\theta}{3}$
	y_2	(2)	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{9 - 7\theta}{6}$	$y_2 = \frac{9 - 7\theta}{6}$

续表

θ 的范围	基变量	方程	系 数					右端项	最优解	
			Z	y_1	y_2	y_3	y_4			y_5
$\frac{9}{7} \leq \theta \leq 5$	$Z(\theta)$	(0)	1	0	6	0	4	3	$-27-5\theta$	$y_2 = y_4 = y_5 = 0$
	y_3	(1)	0	0	1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5-\theta}{2}$	$y_3 = \frac{5-\theta}{2}$
	y_1	(2)	0	1	-3	0	-1	$\frac{3}{2}$	$\frac{-9+7\theta}{2}$	$y_1 = \frac{-9+7\theta}{2}$
$\theta \geq 5$	$Z(\theta)$	(0)	1	0	12	6	4	0	$-12-8\theta$	$y_2 = y_3 = y_4 = 0$
	y_5	(1)	0	0	-2	-2	0	1	$-5+\theta$	$y_5 = -5+\theta$
	y_1	(2)	0	1	0	3	-1	0	$3+2\theta$	$y_1 = 3+2\theta$



7.3 上界法

在线性规划问题中,一些或者全部的变量 x_j 拥有上界约束 $x_j \leq u_j$ 是十分常见的。

这里 u_j 是代表 x_j 的最大可行值的正常数。我们在 4.8 节指出决定单纯形法计算时间长短的最重要因素是函数约束的数量,而非负约束的数量则相对不重要。因此,函数约束中含有大量的上界约束极大地增加了所需的计算量。

上界法通过从函数约束中移除上界约束并把它们视为类似非负约束个别处理,避免了增加的计算量。^① 用这种方法移除上界约束只要没有变量增加到超过它的上界就不会有问题。单纯形法唯一一次增加一些变量的值是当入基变量的值增加以获得一个新的 BF 解。因此,上界法简单地以通常的方式把单纯形法应用于该问题的剩余部分(即无上界约束),但是有一个附加限制,就是每个新 BF 解必须满足除普通的下界(非负性)约束之外的上界约束。

为实现这个想法,注意到具有一个上界约束 $x_j \leq u_j$ 的决策变量总可以替换为

$$x_j = u_j - y_j$$

这里, y_j 就作为决策变量。换句话说,你可以选择以大于 0 的量(x_j)作为决策变量或以小于 u_j ($y_j = u_j - x_j$) 的量作为决策变量(我们将把 x_j 和 y_j 称作互补的决策变量)。因为

$$0 \leq x_j \leq u_j$$

同时有

$$0 \leq y_j \leq u_j$$

这样,在单纯形法的任意点上,你既可以

1. 使用 $x_j, 0 \leq x_j \leq u_j$;
2. 也可以用 $u_j - y_j$ 替换 $x_j, 0 \leq y_j \leq u_j$ 。

上界法使用以下准则做出选择:

^① 上界法假定变量除了上界约束外还有通常的非负性约束。如果一个变量有不同于 0 的下界如 $x_j \geq L_j$, 那么可以通过 $x'_j = x_j - L_j$ 把这个约束转化为一个非负性约束。

准则：从选项 1 开始。

任何时候只要 $x_j = 0$, 使用选项 1, 那么 x_j 是非基变量。

任何时候只要 $x_j = u_j$, 使用选项 2, 那么 $y_j = 0$ 是非基变量。

只在 x_j 达到另一个极限值时改变选择。

因此, 只要一个基变量达到它的上界, 就要改变选择并使用它的互补决策变量作为新的非基变量(出基变量)来定义新的 BF 解。这样, 在单纯形法基础上所做的实质的修改就在于选择出基变量的准则。

让我们回顾一下, 单纯形法选择的是随入基变量的值增加时最先成为负数从而不可行的那个变量作为出基变量。现在所做的修改是当入基变量值增加时, 选择替换那个以任何方式——要么变为负数要么超过它的上界——最先成为不可行的变量(注意, 存在一种可能, 即入基变量可能因超过它的上界从而最先成为不可行, 因此, 它的互补的决策变量成为出基变量)。如果出基变量达到 0, 那么视作一般问题用单纯形法继续进行。然而反过来, 如果达到它的上界, 那么改变选择并使它的互补决策变量成为出基变量。

一个例子

为了说明上界法, 考虑如下问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 2x_1 + x_2 + 2x_3 \\ \text{s. t.} \quad & 4x_1 + x_2 = 12 \\ & -2x_1 + x_3 = 4 \end{aligned}$$

$$\text{且} \quad 0 \leq x_1 \leq 4, \quad 0 \leq x_2 \leq 15, \quad 0 \leq x_3 \leq 6$$

这样, 所有三个变量都有上界约束 ($u_1 = 4, u_2 = 15, u_3 = 6$)。

对确定初始 BF 解 ($x_1 = 0, x_2 = 12, x_3 = 4$), 两个等式约束已符合高斯消元法形式, 并且在这个解中没有一个变量超过它的上界, 因此 x_2 和 x_3 可以作为初始基变量而不必引入人工变量。不过, 为获得方程(0), 我们需要从目标函数中以代数方法消去这些变量, 如下所述:

$$\begin{array}{r} Z \quad \quad \quad -2x_1 \quad -x_2 \quad -2x_3 = 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad + (4x_1 \quad +x_2 \quad \quad \quad = 12) \\ \quad \quad \quad \quad \quad + 2(-2x_1 \quad \quad \quad +x_3 = 4) \\ \hline (0) \quad Z \quad \quad \quad -2x_1 \quad \quad \quad \quad \quad = 20 \end{array}$$

初始方程(0)表明初始的入基变量为 x_1 , 开始第一步迭代。既然没有包括上界约束, 那么初始的方程组和选择出基变量的相应计算列于表 7.4。第二列表示在一些基变量(包括 x_1)成为不可行之前, 入基变量可以从 0 增加到多少。与方程(0)相邻的最大值正是 x_1 的上界约束。对方程(1), 因为 x_1 的系数为正数, x_1 增加到 3 使该方程的基变量 (x_2) 从 12 减少到它的下界值 0。对方程(2), 因为 x_1 的系数为负值, x_1 增加到 1 使该方程的基变量 (x_3) 从 4 增加到它的上界 6。

表 7.4 上界法例子中初始出基变量的方程与计算

初始方程组	x_1 最大可行值
(0) $Z - 2x_1 = 20$	$x_1 \leq 4$ (由于 $u_1 = 4$)
(1) $4x_1 + x_2 = 12$	$x_1 \leq \frac{12}{4} = 3$
(2) $-2x_1 + x_3 = 4$	$x_1 \leq \frac{6-4}{2} = 1 \leftarrow$ 最小 (因为 $u_3 = 6$)

因为表 7.4 中方程(2)拥有 x_1 的最小的最大可行值,所以该方程中的基变量(x_3)成为出基变量。但是,因为 x_3 达到它的上界,于是用 $6 - y_3$ 取代 x_3 。所以 $y_3 = 0$ 成为下一个 BF 解的非基变量,而 x_1 成为方程(2)中的新的基变量。这一替代将导致方程的下述改变

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & -2x_1 + x_3 = 4 \\
 & \rightarrow -2x_1 + 6 - y_3 = 4 \\
 & \rightarrow -2x_1 - y_3 = -2 \\
 & \rightarrow x_1 + \frac{1}{2}y_3 = 1
 \end{aligned}$$

因此,从其他方程中用代数方法消去 x_1 后,第二个完整的方程组为

$$\begin{aligned}
 (0) \quad & Z + y_3 = 22 \\
 (1) \quad & x_2 - 2y_3 = 8 \\
 (2) \quad & x_1 + \frac{1}{2}y_3 = 1
 \end{aligned}$$

相应的 BF 解是 $x_1 = 1, x_2 = 8, y_3 = 0$ 。通过进行最优性检验,确定这也是一个最优解,所以 $x_1 = 1, x_2 = 8, x_3 = 6 - y_3 = 6$ 是初始问题要求的解。



7.4 内点算法

在 4.9 节,我们讨论了 1984 年在线性规划领域的惊人发展,也就是 AT&T 贝尔实验室的 Narendra Karmarkar 发明的一种与单纯形法有很大不同的算法。这是一种解决大型线性规划问题的强有力算法。我们现在通过描述他的算法^①的一个相对基本的变异方法(“仿射”或“仿射—缩放”变异方法)来介绍 Karmarkar 算法的性质(IOR Tutorial 在 Solve Automatically by the Interior-Point Algorithm 题目下包括这一变异方法)。

本节我们将在一个直观层面讨论 Karmarkar 的主要思想,避开数学细节。特别地,我们将绕过一定的细节,这些细节对算法的完整实施是必需的(比如,怎样找一个初始可行的试验解),但是对基本概念性理解来说并非关键。所描述的这个思想可以总结如下。

^① 在 Karmarkar 的著作出现后不久,一些研究人员包括 E. R. Barnes, T. M. Cavalier 和 A. L. Soyster 重新发现,这个变异的基本方法实际上是由一名俄罗斯数学家 I. I. Dikin 于 1967 年提出。还可以参阅: R. J. Vanderbei, M. S. Meketon, and B. A. Freedman, “A Modification of Karmarkar’s Linear Programming Algorithm,” *Algorithmica*, 1(4) (Special Issue on New Approaches to Linear Programming): 395–407, 1986.

概念 1: 穿透可行域内部指向一个最优解。

概念 2: 沿着以最快可能速度增加目标函数值的方向移动。

概念 3: 变换可行域,使当前试验解位于可行域的中心附近,因而在概念 2 实现的基础上获得一个大的改进。

为了说明贯穿整节的思想,我们使用下面的例子。

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

在图 7.3 中用图示方式描述了这个例子,由图中可以看出最优解是 $(x_1, x_2) = (0, 8)$, 且 $Z=16$ 。

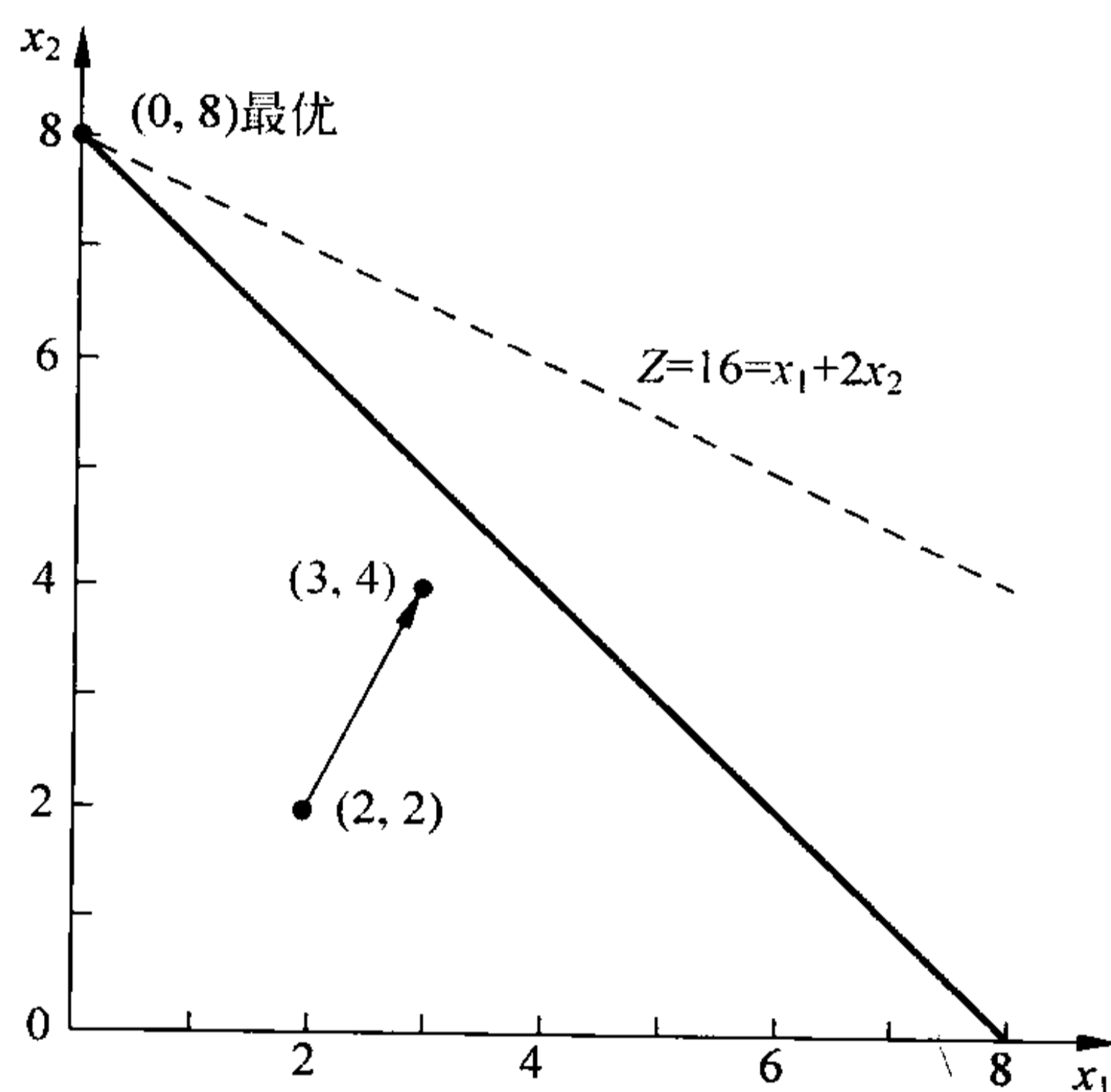


图 7.3 内点算法示例

你会看到使用内点算法解决这个小型例子时需要大量的工作。原因是这个算法是针对有效解决大型问题而设计的,而对小型问题这个算法的效率比单纯形法(或在这个问题上的图解法)要差很多。然而,只有两个变量的例子使我们能以图形描述这个算法在做什么。

概念 1 和概念 2 梯度的相关性

本算法开始于一个内部试验解,这个解(与所有后续试验解相似)位于可行域的内部,也就是在可行域的边界以内。因此,该解一定不在三条直线($x_1=0, x_2=0, x_1+x_2=8$)中的任意一条上,这三条线是图 7.3 中可行域的边界(不能用位于边界上的试验解是因为这将导致在算法中的某一点上出现未定义被 0 除的数学运算)。我们任选一点 $(x_1, x_2) = (2, 2)$ 作为初始的试验解。

下面开始实施概念 1 和概念 2,注意到图 7.3 中,从 $(2, 2)$ 开始移动,最快可能增加 Z 的方向是垂直(并指向)目标函数线 $Z=16=x_1+2x_2$ 。我们已经通过从 $(2, 2)$ 到 $(3, 4)$ 的箭头显示了这个方向。利用向量加法,我们有

$$(3,4) = (2,2) + (1,2)$$

其中,向量(1,2)是目标函数的梯度(gradient)(我们将在 12.5 节更广泛的非线性规划内容背景下进一步讨论梯度,这部分内容中与 Karmarkar 算法相似的算法早已经被使用)。(1,2)的分量正好是目标函数中的系数。这样,在随后的修改中,梯度(1,2)定义了移动的理想方向,其移动的距离问题将在后面讨论。

线性规划问题以扩展形式改写后,该算法实际上就可用于求解线性规划问题。以 x_3 作为例子中函数约束的松弛变量。我们看到的形式是

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

以矩阵表示时(与第 5 章有稍许不同,因为现在松弛变量已被并入符号中),扩展形式一般可写为

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \text{且} \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

本例中,有

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = [1, 1, 1], \quad \mathbf{b} = [8], \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

注意,现在 $\mathbf{c}^T = [1, 2, 0]$ 是目标函数的梯度。

图 7.4 描述了本例的扩展形式。可行域现在由向量(8,0,0)、(0,8,0)和(0,0,8)组成三角形。这个可行域的内部点是满足 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ 的点。这三个 $x_j > 0$ 条件的每一个都有迫使 (x_1, x_2) 脱离图 7.3 中构成可行域边界的三条直线之一的作用。

使用投影梯度以实现概念 1 和概念 2

在扩展形式中,本例的初始试验解是 $(x_1, x_2, x_3) = (2, 2, 4)$, 加上梯度(1,2,0)得到

$$(3,4,4) = (2,2,4) + (1,2,0)$$

然而现在有个棘手的问题。算法不能从(2,2,4)移动到(3,3,4),因为(3,4,4)是不可行的。当 $x_1 = 3$, 且 $x_2 = 4$ 时, $x_3 = 8 - x_1 - x_2 = 1$ 而不是 4。点(3,4,4)位于三角形可行域下侧,如图 7.4 所示。因此,为了保证解仍然可行,算法通过作垂直于这个三角形的直线而把点(3,4,4)投影(间接地)到可行的三角形区域。

因为从(0,0,0)到(1,1,1)的向量垂直于这个三角形,所以通过(3,4,4)的垂线可由方程

$$(x_1, x_2, x_3) = (3,4,4) - \theta(1,1,1)$$

给出,其中 θ 是一个标量。由于三角形满足方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 8$, 因此这条直线与三角形交于点(2,3,3)。因为有

$$(2,3,3) = (3,4,4) - (1,1,1)$$

所以,目标函数的投影梯度(projected gradient)(即投影于可行域上的梯度)是 $(0, 1, -1)$ 。正是这个投影梯度为算法定义了移动的方向,如图 7.4 中的箭头所示。

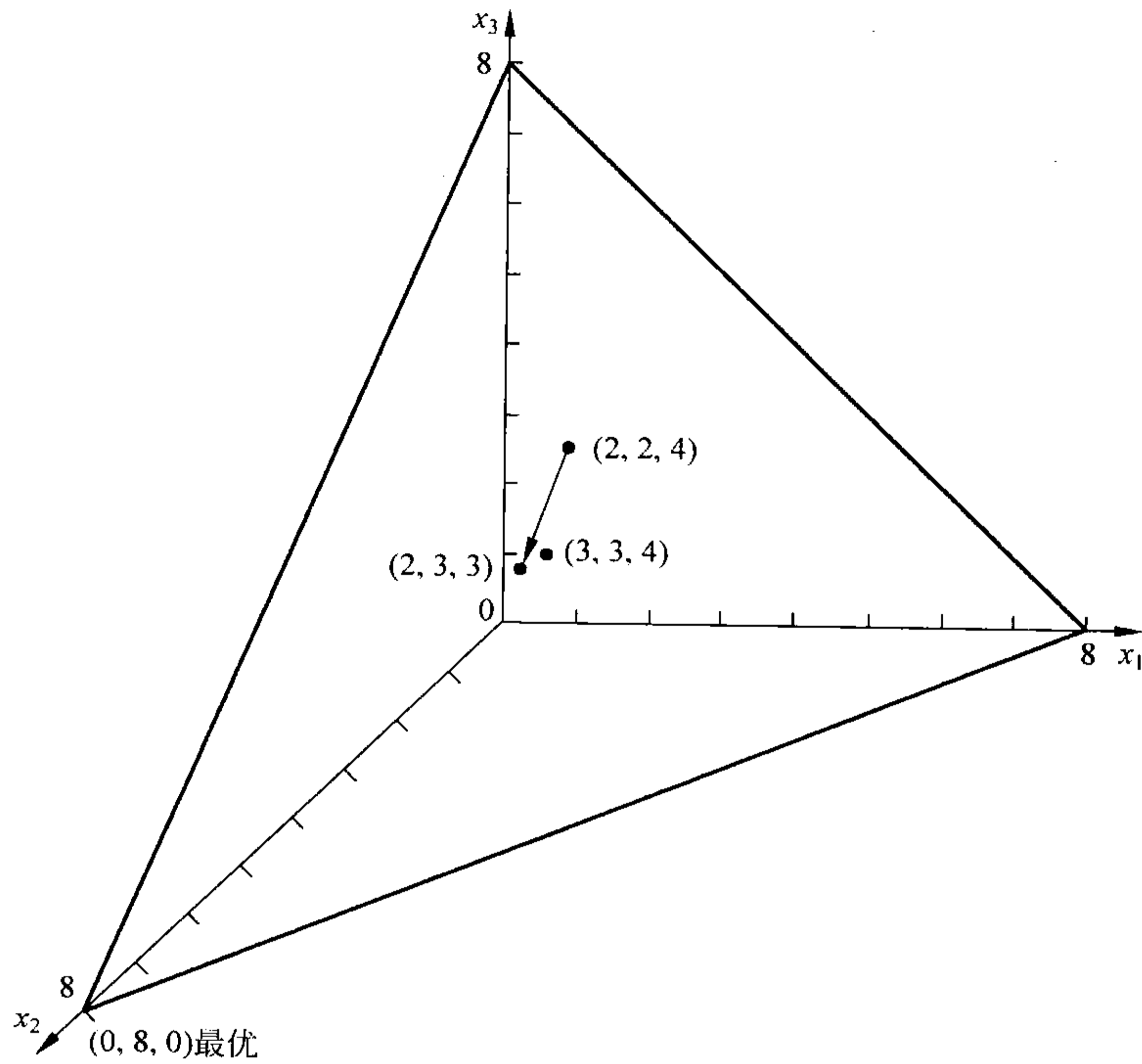


图 7.4 扩展形下的内点算法示例

有一个公式可以用于直接计算投影梯度。通过定义投影矩阵 \mathbf{P} 为

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}$$

投影梯度是

$$\mathbf{c}_p = \mathbf{P}\mathbf{c}$$

例如

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因此

$$c_p = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

从(2,2,4)沿着投影梯度(0,1,-1)方向的移动,按下面公式从0开始增加 α 来进行:

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + 4\alpha \quad c_p = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + 4\alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

其中,使用系数4只是为了给 α 赋予一个上界1以维持可行性(所有 $x_j \geq 0$)。注意到增加 α 到 $\alpha=1$ 将导致 x_3 减少到 $x_3=4+4(1)(-1)=0$,当 $\alpha>1$ 时就得到 $x_3<0$ 。因此, α 表示离开可行域之前可移动距离的比例。

为了移动到下一个试验解, α 应增加多少?因为 Z 的增加值与 α 成比例,所以在当前迭代点上,赋予接近上界1的某个值有利于以一个相对大的步长逼近最优。但是,赋予太接近1的值带来的问题是:下一个试验解将遭遇约束边界的阻碍而难以在下一步迭代中形成大的改进。因此,试验解位于可行域中心附近(或至少邻近最优解附近那一部分可行域的中心),以及不能太接近任何约束边界,这是很有帮助的。基于这种考虑,Karmarkar提出 $\alpha=0.25$ 对他的算法将是“安全”的。在实践中,有时也会用到很大的值(例如, $\alpha=0.9$)。针对本例(和本章末尾的问题)的计算,我们选定 $\alpha=0.5$ (IOR Tutorial中使用 $\alpha=0.5$ 作为默认值,但 $\alpha=0.9$ 也是可行的)。

实现概念3的中心化方案

现在我们只剩下一步就完成算法描述了,即一个特殊的方案用于转换可行域以使当前试验解位于中心附近。我们刚刚阐述了试验解位于中心附近的好处,但这一中心化方案的另一个重要好处是随着算法向最优解收敛时,它使投影梯度的方向保持指向更接近最优解的位置。

中心化方案的基本思想是简单易懂的——简单改变每个变量的尺度(单位)因而试验解在新的坐标系里与每条约束边界等距(Karmarkar的最初算法应用了一种更复杂的中心化方案)。

例如,图7.3有3个约束边界,每一个对应扩展形式的问题中三个变量的其中之一取0值,即 $x_1=0$, $x_2=0$ 和 $x_3=0$,图7.4显示了这三个约束边界与 $Ax=b(x_1+x_2+x_3=8)$ 平面相交形成可行域的边界。初始试验解是 $(x_1, x_2, x_3)=(2, 2, 4)$,因此当各变量的长度单位被使用时,这个解距离约束边界 $x_1=0$ 和 $x_2=0$ 均为2单位,距离边界 $x_3=0$ 为4单位。然而,不管在何种情况下,这些长度单位都是任意的而且能够被转化为希望的值而不改变问题本身。因此,为了使当前试验解 $(x_1, x_2, x_3)=(2, 2, 4)$ 化为

$$\tilde{x}_1 = \frac{x_1}{2}, \tilde{x}_2 = \frac{x_2}{2}, \tilde{x}_3 = \frac{x_3}{4}$$

$$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = (1, 1, 1)$$

我们重新调节变量尺度如下

在这个新的坐标下(以 $2\tilde{x}_1$ 替换 x_1 , $2\tilde{x}_2$ 替换 x_2 , $4\tilde{x}_3$ 替换 x_3), 问题变为

max
s. t.

$$Z = 2\tilde{x}_1 + 4\tilde{x}_2,$$

$$2\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 + 4\tilde{x}_3 = 8$$

$$\tilde{x}_1 \geq 0, \tilde{x}_2 \geq 0, \tilde{x}_3 \geq 0$$

图 7.5 以图形描绘了这个问题。

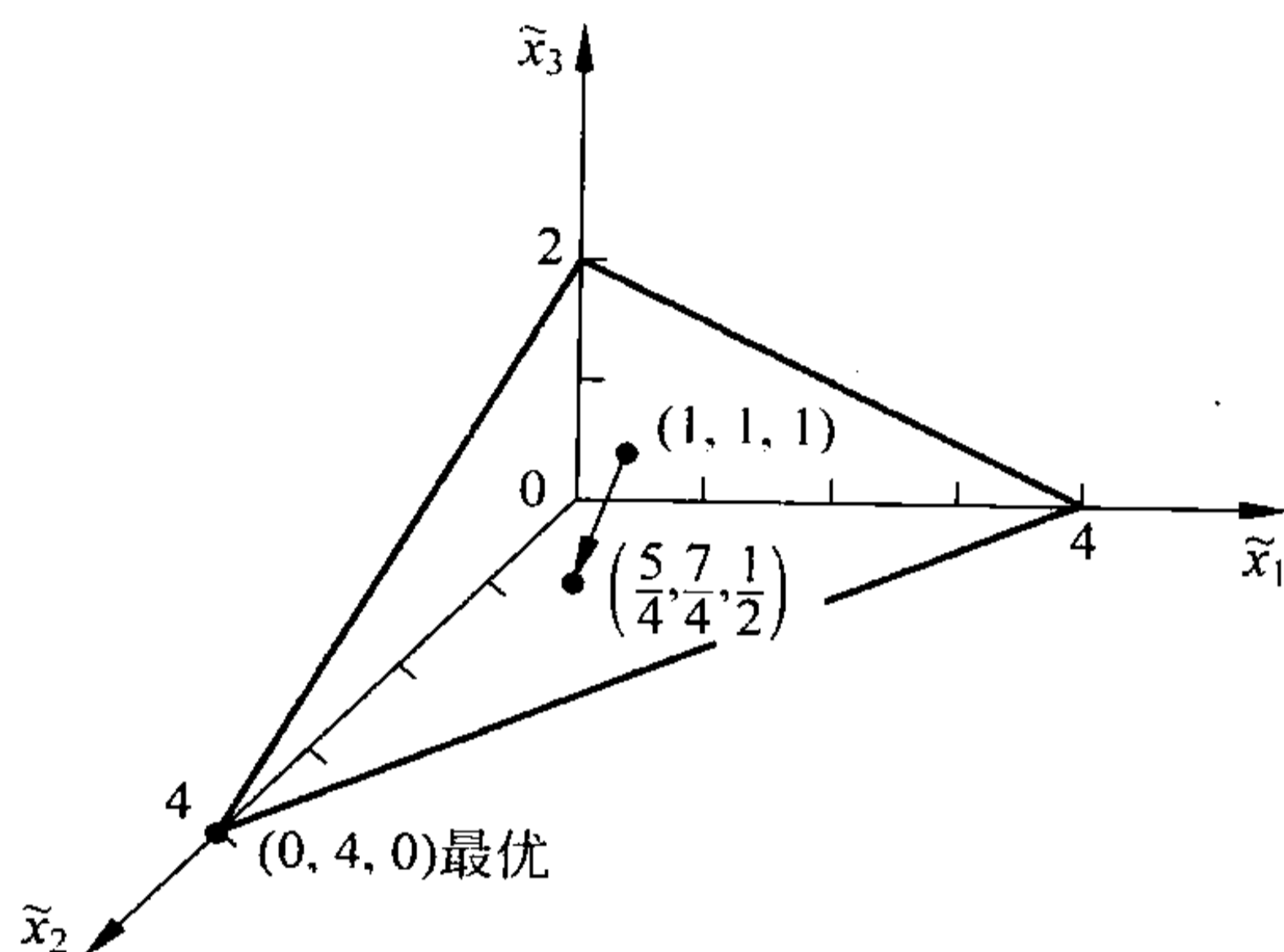


图 7.5 迭代 1 调整尺度后示例

注意到图 7.5 中的试验解 $(1, 1, 1)$ 与三条约束边界 $\tilde{x}_1 = 0$, $\tilde{x}_2 = 0$, $\tilde{x}_3 = 0$ 是等距的。对于随后的每一次迭代也一样, 问题被再次调整尺度以获得与之相同的性质, 因此当前试验解在当前坐标下总是 $(1, 1, 1)$ 。

本算法的总结与说明

现在让我们总结并说明这个算法。我们将详细完成例子中的第一步迭代, 然后给出一般过程的一个总结, 最后将这个总结应用于第二步迭代。

迭代 1

给定的初始试验解 $(x_1, x_2, x_3) = (2, 2, 4)$, 让 D 成为相应的对角矩阵, 从而有 $x = D\tilde{x}$, 因此

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

那么调整尺度的变量就是下式的分量

$$\tilde{x} = D^{-1}x = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{2} \\ \frac{x_2}{2} \\ \frac{x_3}{4} \end{bmatrix}$$

在这些新坐标下, A 和 c 成为

$$\tilde{A} = AD = [1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = [2 \ 2 \ 4]$$

$$\tilde{c} = Dc = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

因此, 投影矩阵是

$$P = I - \tilde{A}^T (\tilde{A} \tilde{A}^T)^{-1} \tilde{A}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \left([2 \ 2 \ 4] \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right)^{-1} [2 \ 2 \ 4]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 8 \\ 4 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

因此, 投影梯度是

$$c_p = P\tilde{c} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

定义 v 为含有最大绝对值的向量 c_p 的负分量的绝对值, 所以本例中 $v = |-2| = 2$ 。结果, 在当前坐标下, 现在算法从当前试验解 $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = (1, 1, 1)$ 移动到下一个试验解。

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\alpha}{v} c_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{0.5}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{7}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

如图 7.5 所示(选择 v 的这个定义, 对下一试验解中本方程 $\alpha=1$ 时, 将使得 \tilde{x} 的最小分量等于 0)。在原坐标系下, 这个解是

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = D\tilde{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{7}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$

这就完成了这次迭代,这个新的解将用于开始下一步迭代。

对于任何迭代,这些步骤可以总结如下。

内点算法总结

1. 给定当前试验解 (x_1, x_2, \dots, x_n) , 令

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

2. 计算 $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\mathbf{D}$ 和 $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{D}\mathbf{c}$ 。

3. 计算 $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}^T (\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{A}}^T)^{-1} \tilde{\mathbf{A}}$ 和 $\mathbf{c}_p = \mathbf{P}\tilde{\mathbf{c}}$ 。

4. 找出 \mathbf{c}_p 拥有最大绝对值的负分量, 并令 v 等于这个绝对值。然后计算

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\alpha}{v} \mathbf{c}_p$$

其中, α 是 $0 \sim 1$ 之间的一个可选常数(例如, $\alpha = 0.5$)。

5. 计算 $\mathbf{x} = \mathbf{D}\tilde{\mathbf{x}}$ 作为下一步迭代(步骤 1)的试验解(如果这一试验解与前一个试验解相比无实质上的改变, 那么算法实际上已经收敛于一个最优解, 因此算法停止)。

现在让我们把这一总结应用于本例的迭代 2。

迭代 2

步骤 1

给定当前试验解 $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, 2\right)$, 令

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(注意调整尺度的变量是

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}x_1 \\ \frac{2}{7}x_2 \\ \frac{1}{2}x_3 \end{bmatrix}$$

所以, 在这些新的坐标下, BF 解是

$$\tilde{x} = \mathbf{D}^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{5} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{x} = \mathbf{D}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{16}{7} \\ 0 \end{bmatrix}$$

和

$$\tilde{x} = \mathbf{D}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \text{如图 7.6 所示}$$

步骤 2

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{AD} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & 2 \end{bmatrix} \quad \text{且} \quad \tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{Dc} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

步骤 3

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{13}{18} & -\frac{7}{18} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{7}{18} & \frac{41}{90} & -\frac{14}{45} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{14}{45} & \frac{37}{45} \end{bmatrix} \quad \text{且} \quad \mathbf{c}_p = \begin{bmatrix} -\frac{11}{12} \\ \frac{133}{60} \\ -\frac{41}{15} \end{bmatrix}$$

步骤 4

$$\left| -\frac{41}{15} \right| > \left| -\frac{11}{12} \right|, \text{所以 } v = \frac{41}{15}, \text{ 且}$$

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{0.5}{\frac{41}{15}} \begin{bmatrix} -\frac{11}{12} \\ \frac{133}{60} \\ -\frac{41}{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{273}{328} \\ \frac{461}{328} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.83 \\ 1.40 \\ 0.50 \end{bmatrix}$$

步骤 5

$$\mathbf{x} = \mathbf{D}\tilde{x} = \begin{bmatrix} 1 & 365 \\ & 656 \\ 3 & 227 \\ & 656 \\ & & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2.08 \\ 4.92 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

是迭代 3 的试验解。

因为其余的迭代重复这些计算,对于学习来说并没有新的东西,因此我们就到此为止。不过,在迭代 3 刚获得的试验解的基础上调整尺度之后形成的新的可行域我们在图 7.7 中描述了。同以前一样,调整尺度总是把试验解设置为 $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = (1, 1, 1)$, 与约束边界 $\tilde{x}_1 = 0, \tilde{x}_2 = 0, \tilde{x}_3 = 0$ 的距离相等。注意在图 7.5~图 7.7 中,迭代序列和尺度调整把最优解向 $(1, 1, 1)$ 移动,同时其余 BF 解远离该点。最后,经过足够的迭代,调整尺度

后,最优解将非常接近 $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = (0, 1, 0)$,而其余两个 BF 解将在 \tilde{x}_1 和 \tilde{x}_3 轴上远离初始位置。接着该迭代的步骤 5 将产生一个解,该解在原始坐标系中非常靠近最优解 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 8, 0)$ 。

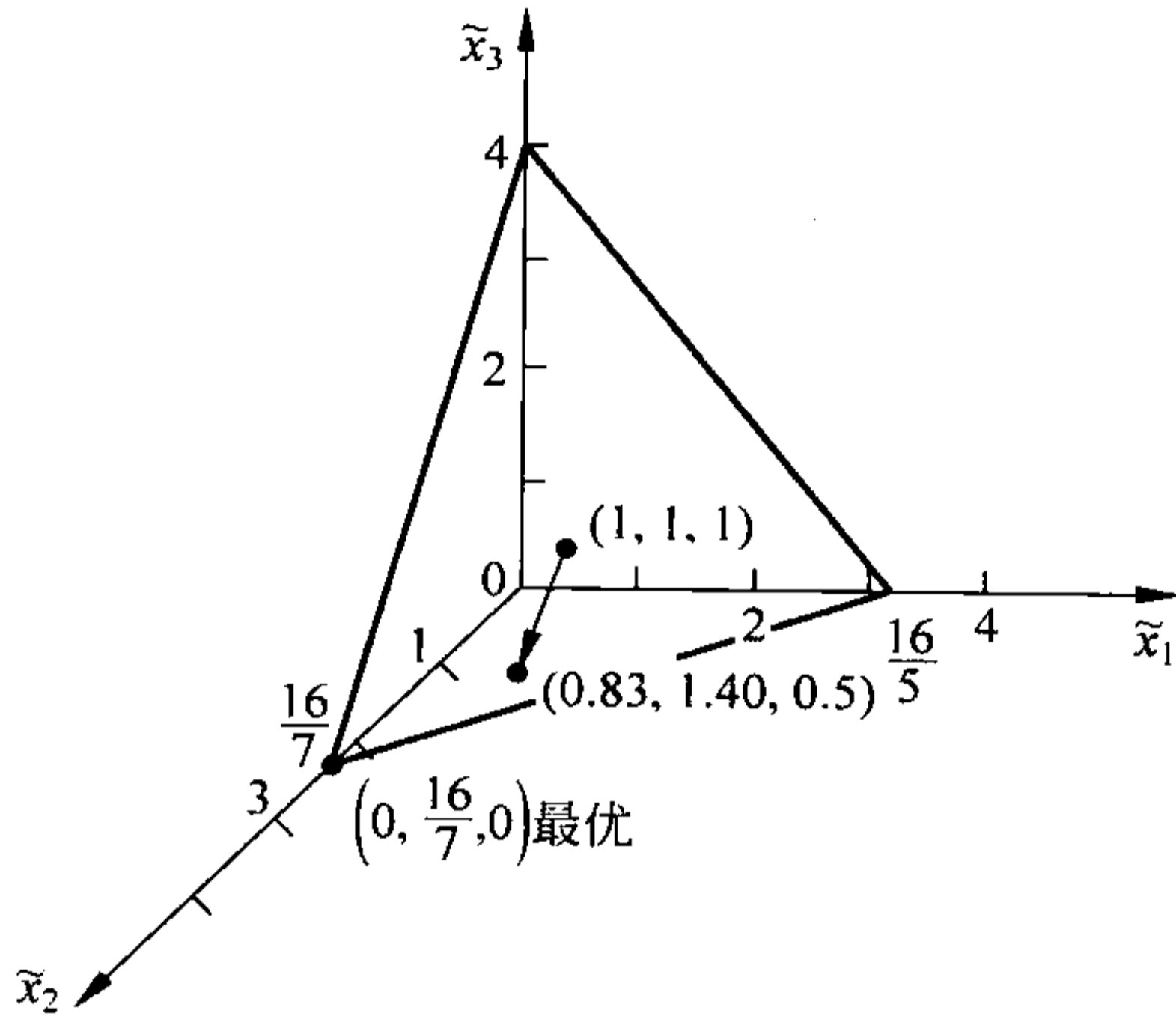


图 7.6 迭代 2 调整尺度后示例

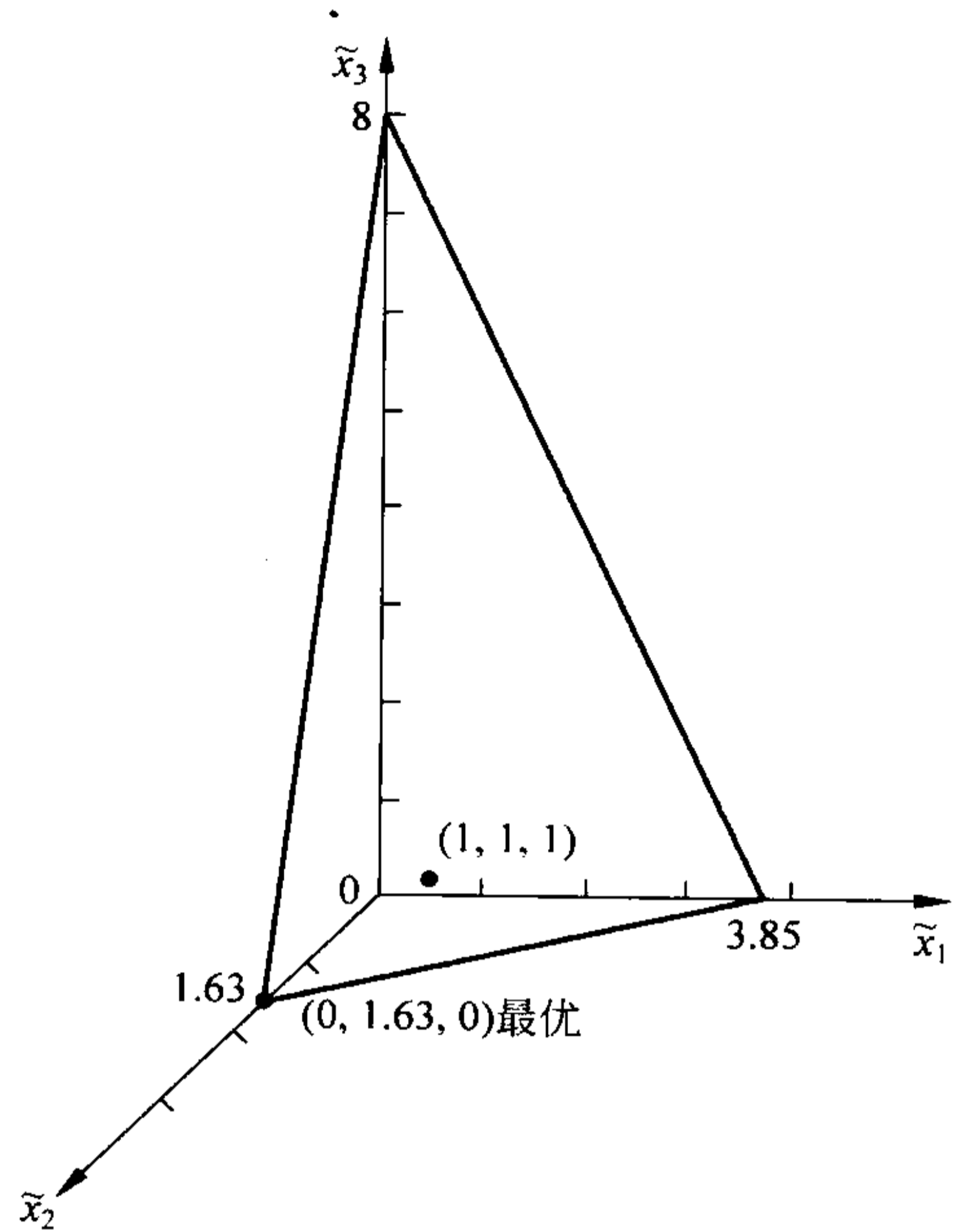


图 7.7 迭代 3 调整尺度后示例

图 7.8 显示了问题没有扩展之前在原 $x_1 = x_2$ 的坐标系中的算法进行过程。三个点 $(x_1, x_2) = (2, 2), (2.5, 3.5)$ 和 $(2.08, 4.92)$ 分别是迭代 1、迭代 2 和迭代 3 的试验解。然后,我们作了一条通过这些点并超出一段距离的平滑曲线来展示算法在逼近 $(x_1, x_2) = (0, 8)$ 过程中后续迭代的轨迹。

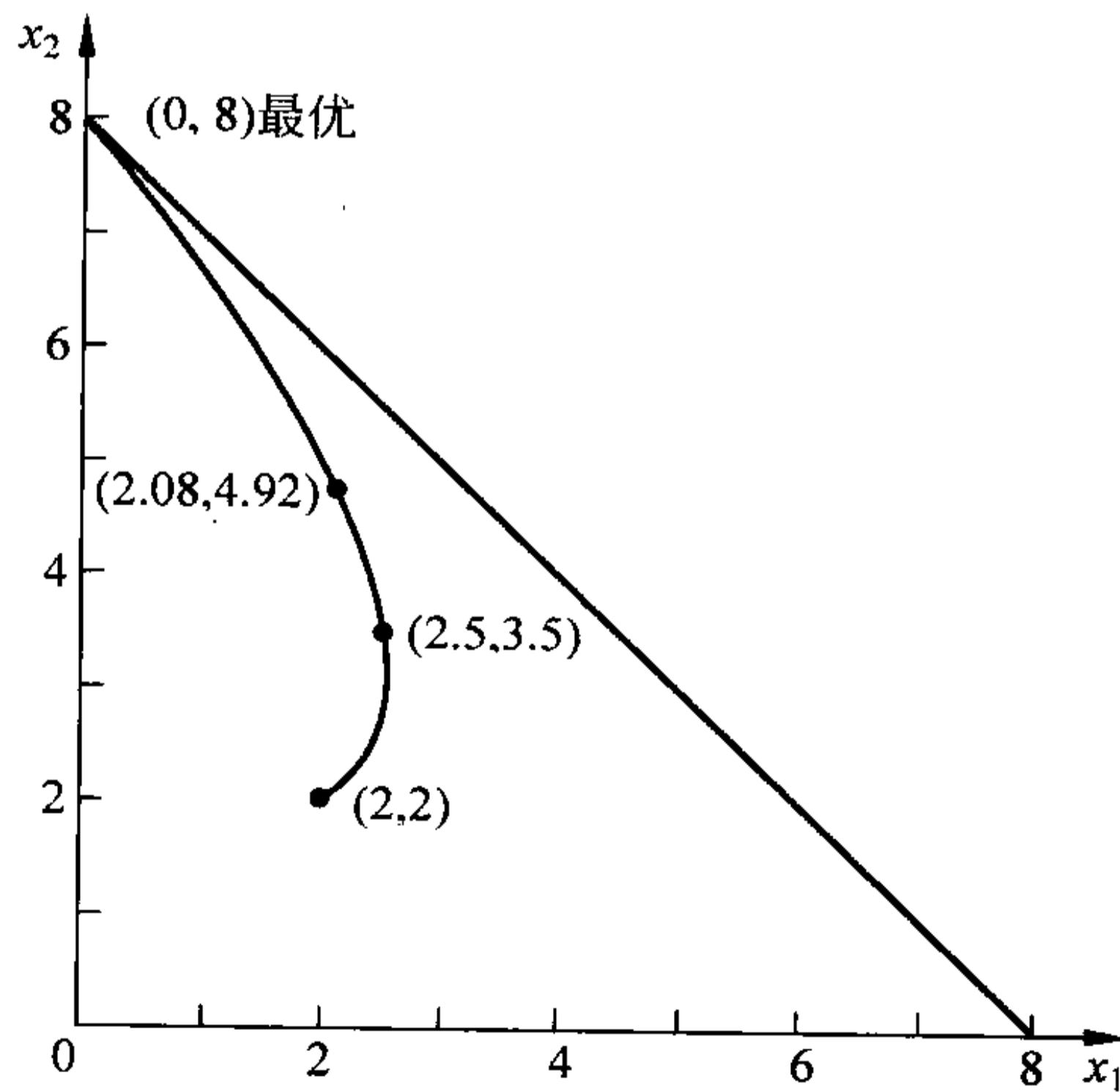


图 7.8 本例在原 $x_1 - x_2$ 坐标系中内点算法的轨迹

对这个特定的例子,函数约束正好是非等式约束。不过,对这个算法而言,等式约束也不会产生任何困难,因为由算法处理这些约束只是在任何需要转化为等式的扩展形式($Ax=b$)完成之后进行的,而不论以何种方式取得扩展形式。为了说明这个问题,假定本例中的唯一改变是把约束 $x_1+x_2 \leq 8$ 改为 $x_1+x_2=8$ 。这样图 7.3 中的可行域刚好变为点(8,0)和点(0,8)之间的线段。给定该线段内部的一个初始可行试验解——如 $(x_1, x_2)=(4, 4)$ ——该算法就可以按照提出的恰好有两个变量时的五步总结所述进行,这里 $A=[1, 1]$ 。对每步迭代,投影梯度沿这条线段指向(0,8)的方向。取 $\alpha = \frac{1}{2}$,迭代 1 从点(4,4)移动到(2,6),迭代 2 从(2,6)移动到(1,7)等(习题 7.4-3 要求你验证这些结果)。

尽管本例的任一个版本都只有一个函数约束,然而正如已经说明了的,拥有多于一个约束只导致计算过程的一个改变(不是更大范围的计算)。例子中有一个单独的函数约束意味着 A 只拥有单独的一行,因此步骤 3 的 $(\tilde{A}\tilde{A}^T)^{-1}$ 项就是向量乘积 $\tilde{A}\tilde{A}^T$ 所得到数值的倒数。多个函数约束意味着 A 有多行,因而 $(\tilde{A}\tilde{A}^T)^{-1}$ 项是由矩阵乘积 $\tilde{A}\tilde{A}^T$ 得到的矩阵的逆阵。

结束前,我们需要加上一个注释以更完整地理解算法。对于特别小型的例子,该算法要求相对大量的计算并经多次迭代后,获得仅是最优解的一个近似值。而 3.1 节的图解法在图 3.1 中立刻找到了最优解,而且单纯形法只要求一步快速地迭代。然而,不要被这一对比蒙骗而小看了内点算法的有效性。这个算法是为解决拥有成百上千条函数约束的大型问题而设计的。对于这样的问题,单纯形法通常需要数千步迭代。通过“穿过”可行域内部,内点算法只要求少得多的迭代次数(尽管每步迭代要做更多的工作)。这使内点算法有时能有效地解决大型线性规划问题,这些问题可能在单纯形法和对其对偶单纯形法的解决范围之外。因此,与这里提出的算法类似的一些内点算法将在线性规划中发挥重要作用。

4.9 节介绍了内点算法与单纯形法的对比,还讨论了内点算法与单纯形法的互补作用,包括它们怎样被组合进一个混合的算法中。

最后,我们必须强调一点,通过描述 Karmarkar 1984 年提出的开创性算法的一个初等变异方法,本节只是提供一个对内点算法应用于线性规划的概念性介绍。1984 年以来,许多顶尖的研究人员已经对内点算法做了许多关键性的改进。这仍将成为一个重要的研究领域,对这个高级专题的更深入介绍超出了本书的范围。感兴趣的读者可以从本章末尾所列参考文献中找到很多详细内容。



7.5 结论

对于优化后分析,对偶单纯形法和参数线性规划特别有价值,在其他背景下它们也可能非常有用。

通常情况下一些变量或全部变量有明显的上界。上界法为这些情况下简化单纯形法提供了一种方法,它可以极大地减少大型问题的计算量。

数学规划计算机软件包通常包括所有这三种程序,并且这三种程序被广泛地使用。因为它们的基本结构在很大程度上基于第 4 章中提出的单纯形法,所以它们对于 4.8 节

描述的非常大型的问题不具备计算的有效性。

现在已经提出了很多其他专用算法以利用特殊类型的线性规划问题的特殊结构(如第8章和第9章将讨论到的)。目前,在这一领域已有非常多的研究。

Karmarkar的内点算法开创了研究如何解决线性规划问题的另一关键路线。现在,这个算法的变异方法为高效地解决某些非常大型的问题提供了强有力的方法。

参考文献

1. Hooker, J. N.: "Karmarkar's Linear Programming Algorithm," *Interfaces*, **16**: 75-90, July-August 1986.
2. Luenberger, D., and Y. Ye: *Linear and Nonlinear Programming*, 3rd ed., Springer, New York, 2008.
3. Marsten, R., R. Subramanian, M. Saltzman, I. Lustig, and D. Shanno: "Interior-Point Methods for Linear Programming: Just Call Newton, Lagrange, and Fiacco and McCormick!," *Interfaces*, **20**: 105-116, July-August 1990.
4. Vanderbei, R. J.: "Affine-Scaling for Linear Programs with Free Variables," *Mathematical Programming*, **43**: 31-44, 1989.
5. Vanderbei, R. J.: *Linear Programming: Foundations and Extensions*, 3rd ed., Springer, New York, 2008.
6. Ye, Y.: *Interior-Point Algorithms: Theory and Analysis*, Wiley, New York, 1997.

习题

一些问题(或问题的部分)左侧的符号意义如下:

I: 我们建议你使用 IOR Tutorial(输出记录了你的工作)中的上述程序之一。对参数线性规划而言,这些程序只应用于 $\theta=0$, 在这之后你应该手工继续计算。

C: 通过使用 IOR Tutorial 中内点算法的自动程序解决问题。

习题号上有一个星号表示书后至少给出了该题的一部分答案。

7.1-1 考虑如下问题。

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 40 \\ & x_2 \geq 15 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 10 \end{aligned}$$

$$\text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

I(a) 用图解法求解此题。

(b) 用对偶单纯形法手工求解此题。

(c) 在图上描绘对偶单纯形法执行的路径。

7.1-2* 应用对偶单纯形法手工解决以下问题。

$$\min \quad Z = 5x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$\begin{aligned} \text{s. t. } & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4 \\ & 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 10 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

7.1-3 应用对偶单纯形法手工解决以下问题。

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 \\ \text{s. t. } & 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + x_4 \geq 5 \\ & 8x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 \geq 8 \\ & 3x_1 + 8x_2 + x_3 + 4x_4 \geq 4 \\ & \text{且 } x_j \geq 0, (j=1,2,3,4) \end{aligned}$$

7.1-4 考虑以下问题。

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 5x_1 + 10x_2 \\ \text{s. t. } & 3x_1 + x_2 \leq 40 \\ & x_1 + x_2 \leq 20 \\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 90 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

I(a) 用原始单纯形法(表格形式)求解此题,找出每步迭代得到的对偶问题的互补基解。

(b) 用对偶单纯形法手工求解此问题的对偶问题,将得到的一系列基解与(a)中得到的互补基解作比较。

7.1-5 考虑 6.7 节中灵敏度分析情形 1 的例子。在该例中,表 4.8 中的初始单纯形表发生了改变, b_2 从 12 变为 24,因而最终单纯形表右侧一列的数字分别变为 54、6、12 和 -2。从这个修改过的最终单纯形表开始,用对偶单纯形法求解如表 6.21 所示的新的最优解。列出你的求解步骤。

7.1-6* 考虑习题 6.7-1(a)部分。从修改后的最终表出发,使用对偶单纯形法由手工重新优化。

7.2-1* 考虑以下问题。

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 8x_1 + 24x_2 \\ \text{s. t. } & x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

假定 Z 代表利润并且两个业务活动的员工的适当轮换将可能或多或少地改变目标函数。特别地,假定活动 1 的单位利润可增加到超过 8(最大值 18),而同时付出的代价是活动 2 的单位利润从 24 减少该数量的 2 倍。这样, Z 实际上可以表示为

$$Z(\theta) = (8 + \theta)x_1 + (24 - 2\theta)x_2$$

这里 θ 也是一个决策变量, 满足 $0 \leq \theta \leq 10$ 。

I(a) 用图解法求最初问题的解。然后, 用扩展图解法的过程来求解该问题的参数扩展形式, 即寻找关于 θ 函数的最优解和最优值 $Z(\theta)$, θ 满足 $0 \leq \theta \leq 10$ 。

I(b) 用单纯形法求解最初问题的最优解, 然后用参数线性规划求 θ 函数最优解和最优值 $Z(\theta)$, θ 满足 $0 \leq \theta \leq 10$ 。绘出 $Z(\theta)$ 的图形。

(c) 确定最优的 θ 值, 然后说明如何通过只求解两个通常的线性规划问题而直接确定该最优值(提示: 凸函数在某一个端点获得最大值)。

17.2-2 应用参数线性规划寻找下述问题的 θ 函数的最优解, $0 \leq \theta \leq 20$ 。

$$\begin{aligned} \max \quad & Z(\theta) = (20 + 4\theta)x_1 + (30 - 3\theta)x_2 + 5x_3 \\ \text{s. t.} \quad & 3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 10 \\ & 8x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 25 \\ & 6x_1 + x_2 + x_3 \leq 15 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

17.2-3 考虑以下问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z(\theta) = (10 - \theta)x_1 + (12 + \theta)x_2 + (7 + 2\theta)x_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 20 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(a) 应用参数线性规划为这个问题寻找作为 θ 的函数的最优解, $\theta \geq 0$ 。

(b) 为这个问题构建对偶模型。然后, 应用 7.2 节后面一部分所描述的方法为这个对偶问题寻找作为 θ 的函数的最优解, $\theta \geq 0$ 。图解说明这一代数过程在做些什么, 把所获得的基本解与(a)部分得到的互补的基本解做对比。

17.2-4* 应用针对参数 b_i 系统变化的参数线性规划程序寻找以下问题的 θ 函数的最优解, $0 \leq \theta \leq 25$ 。

$$\begin{aligned} \max \quad & Z(\theta) = 2x_1 + x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 \leq 10 + 2\theta \\ & x_1 + x_2 \leq 25 - \theta \\ & x_2 \leq 10 + 2\theta \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

图解说明这个代数过程是怎样进行的。

17.2-5 应用参数线性规划为以下问题的 θ 函数寻找一个最优解, $0 \leq \theta \leq 30$ 。

$$\begin{aligned} \max \quad & Z(\theta) = 5x_1 + 42x_2 + 28x_3 + 49x_4 \\ \text{s. t.} \quad & 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 135 - 2\theta \\ & 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 78 - \theta \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 30 + \theta \\ & \text{且 } x_j \geq 0, \quad (j=1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

然后, 找出使最优值 $Z(\theta)$ 达到最大值的 θ 值。

7.2-6 考虑问题 6.7-3。应用参数线性规划寻找作为 θ 的函数的最优解, $-20 \leq \theta \leq 0$ (提示: 用 $-\theta'$ 替换 θ , 然后从 0 开始增加 θ')。

7.2-7 考虑如图 7.1 所示的参数 c_j 系统地改变时的参数线性规划的函数 $Z^*(\theta)$ 。

(a) 解释为什么这个函数是分段线性的。

(b) 说明这个函数必须为凸。

7.2-8 考虑如图 7.2 所示的参数 b_i 系统改变时参数线性规划的函数 $Z^*(\theta)$ 。

(a) 解释为什么这个函数是分段线性的。

(b) 说明这个函数必定是凹的。

7.2-9 令

$$Z^* = \max \left\{ \sum_{j=1}^n c_j x_j \right\}$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$\text{且 } x_j \geq 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

(这里 a_{ij} 、 b_i 和 c_j 是固定的常数) 且令 $(y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ 为对应的最优对偶解。然后令

$$Z^{**} = \max \left\{ \sum_{j=1}^n c_j x_j \right\}$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i + k_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$\text{且 } x_j \geq 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

其中, k_1, k_2, \dots, k_m 是给定的常数。说明下式成立

$$Z^{**} \leq Z^* + \sum_{i=1}^m k_i y_i^*$$

7.3-1 考虑以下问题。

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s. t.} \quad 3x_1 - 9x_2 \leq 20$$

$$3x_1 \leq 40$$

$$9x_2 \leq 40$$

$$\text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

I(a) 图解法求解这个问题。

(b) 应用上界法手工求解这个问题。

(c) 在图上描绘出上界法的路径。

7.3-2* 应用上界法手工求解以下问题。

$$\max Z = x_1 + 3x_2 - 2x_3$$

$$\text{s. t.} \quad x_2 - 2x_3 \leq 1$$

$$\begin{aligned}
 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 8 \\
 x_1 &\leq 1 \\
 x_2 &\leq 3 \\
 x_3 &\leq 2 \\
 \text{且 } x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

7.3-3 应用上界法手工求解以下问题。

$$\begin{aligned}
 \max \quad Z &= 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 \\
 \text{s. t.} \quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &\leq 5 \\
 x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &\leq 5 \\
 \text{且 } 0 &\leq x_j \leq 1, \quad (j=1, 2, 3, 4)
 \end{aligned}$$

7.3-4 应用上界法手工求解以下问题。

$$\begin{aligned}
 \max \quad Z &= 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 \\
 \text{s. t.} \quad x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 &\leq 6 \\
 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + x_5 &\leq 15 \\
 \text{且 } 0 &\leq x_j \leq 1, \quad (j=1, 2, 3, 4, 5)
 \end{aligned}$$

7.3-5 同时应用上界法和单纯形法手工求解以下问题。

$$\begin{aligned}
 \min \quad Z &= 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\
 \text{s. t.} \quad x_1 + x_2 + x_3 &\geq 15 \\
 x_2 + x_3 &\geq 10 \\
 \text{且 } 0 &\leq x_1 \leq 25, \quad 0 \leq x_2 \leq 5, \quad 0 \leq x_3 \leq 15
 \end{aligned}$$

C7.4-1 重新考虑 7.4 节中用来说明内点算法的例子。假定初始可行试验解换成 $(x_1, x_2) = (1, 3)$ 。从这个解出发, 手工进行两步迭代。然后, 使用 IOR Tutorial 中的自动程序来检验你的运算。

7.4-2 考虑以下问题。

$$\begin{aligned}
 \max \quad Z &= 3x_1 + x_2 \\
 \text{s. t.} \quad x_1 + x_2 &\leq 4 \\
 \text{且 } x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

I (a) 图解法求解这个问题, 并找出所有 CPF 解。

C (b) 从初始试验解 $(x_1, x_2) = (1, 1)$ 出发, 手工进行 7.4 节提出的内点算法的四步迭代。然后使用 IOR Tutorial 中的自动程序检验你的运算。

(c) 针对本问题, 画出与图 7.4~图 7.8 相应的图形。在每个图形中, 找出当前坐标系下的基本(或角点)可行解。(试验解可以用于决定投影梯度。)

7.4-3 考虑以下问题:

$$\begin{aligned}
 \max \quad Z &= x_1 + 2x_2 \\
 \text{s. t.} \quad x_1 + x_2 &= 8 \\
 \text{且 } x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

- C(a) 在 7.4 节的末尾,我们讨论了从 $(x_1, x_2) = (4, 4)$ 出发,使用内点算法如何解决这个问题。通过手工进行两步迭代验证那时得出的结果。然后,使用 IOR Tutorial 中的自动程序来检验你的运算。
- (b) 使用这些结果预测在进行一次迭代时下一个的试验解会是多少。
- (c) 在这个应用问题中,假定算法采用的停止运算的判断准则是当两个连续的试验解在任何分量中相差不多于 0.01 时,停止运算。使用你在 (b) 中得到的预测来估计最终试验解和达到这个最终试验解所需的迭代步骤总数。这个解距离最优解 $(x_1, x_2) = (0, 8)$ 有多近?

7.4-4 考虑以下问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 3x_1 + x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 3x_1 + 2x_2 \leq 45 \\ & 6x_1 + x_2 \leq 45 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

I(a) 图解法求解此题。

(b) 找出在原始 $x_1 - x_2$ 坐标系中目标函数的梯度。如果你从最初开始并沿着梯度的方向移动到可行域的边界,相对于最优解你最终停止在哪个位置?

C(c) 从初始试验解 $(x_1, x_2) = (1, 1)$ 出发,使用 IOR Tutorial 进行 7.4 节提出的内点算法的 10 步迭代。

C(d) 令 $\alpha = 0.9$,重做(c)。

7.4-5 考虑以下问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

I(a) 画出可行域。

(b) 找到目标函数的梯度,然后寻找可行域上的投影梯度。

(c) 从初始试验解 $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$ 出发,由手工进行 7.4 节提出的内点算法的 2 步迭代。

C(d) 从这个相同的初始试验解出发,使用 IOR Tutorial 进行这个算法的 10 步迭代。

C7.4-6 从初始试验解 $(x_1, x_2) = (2, 2)$ 出发,使用 IOR Tutorial 对 3.1 节提出的 Wyndor Glass 公司问题执行 7.4 节所示内点算法的 1~5 步迭代,画出类似图 7.8 的图形以显示该算法在原 $x_1 - x_2$ 坐标系下的轨迹。

运输和指派问题

第 3 章强调了线性规划具有广泛的应用,在本章中我们将着重讨论两类重要的线性规划问题。第一类问题称为运输问题。之所以称其为运输问题,是因为这类问题的很多应用是为了解决运输的最优化。不过也有一些重要的应用与运输无关,如生产计划问题等。第二类问题称为指派问题,它的应用是指派对象去完成任务。尽管其应用看起来与运输问题有很大区别,不过我们将会看到指派问题实际上可以被看做运输问题的一种特殊形式。

下一章将要介绍线性规划问题的另外一种特殊形式——网络优化问题,其中一类问题是最小费用流问题(见 9.6 节)。届时我们将会看到运输问题和指派问题实际上都是最小费用流问题的特殊实例。在本章我们将给出运输问题和指派问题的网络图表示形式。

运输和指派问题的应用一般需要大量的约束条件和变量,因此直接应用单纯形法的计算机程序解决这两类问题需要大量的计算。幸运的是,这两类问题的一个主要特点是约束条件里大多数系数 a_{ij} 都为零,并且系数不为零的部分又呈现出明显的结构。因此,我们利用这类问题的特殊结构设计一种特殊的改进算法,来节省计算的工作量。因此我们必须非常熟悉这类问题,当它们出现时我们能够正确地识别,并应用适当的方法来解决它。

为了描述它的特殊结构,我们先介绍一下约束条件式里的系数表格(矩阵),如表 8.1 所示。 a_{ij} 表示第 i 个约束条件中第 j 个变量的系数。在以后的部分中,系数为零的地方将留为空白,系数不为零的地方标为阴影。

表 8.1 线性规划约束条件的系数表格

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

在讲述一个运输问题案例之后,我们将用模型总结这类问题的特殊结构并给出它的一些其他应用。在 8.2 节中,我们将给出运输问题的单纯形法,一种解决运输问题的单纯形法改进版本(读者将会在 9.7 节中看到,这种算法是基于网络单纯形法的一种高效解决最小费用流问题的单纯形法改进版本,也适用于运输和指派问题)。8.3 节将重点讲述指派问题。8.4 节将介绍一种特殊的算法,称为匈牙利算法,这种算法只能用来解决指派问题。



8.1 运输问题

范例

P&T 公司的一个主要产品是罐装豌豆。豌豆的产地有 3 个地方(华盛顿州的贝林厄姆附近、俄勒冈州的尤金、明尼苏达州的埃伯特利),然后由卡车运到美国西部的 4 个仓库(加利福尼亚州的萨克拉门多、犹他州的盐湖城、南达科塔州的来比特市、新墨西哥州的阿尔伯克基),如图 8.1 所示。由于运输费用是主要的花费,管理层要研究出一种方案以尽可能地减少运输费用。下一个季度每个豌豆产地的产量已经估计出来了,并且每个仓库也被分配了一定的豌豆存储数量。货车负载和每货车豌豆的运费如表 8.2 所示。可知共有 300 货车的豌豆等待运输,现在的问题是怎样安排运输使总的运输费用最低。



图 8.1 P&T 公司工厂和仓库的位置图

应用案例

宝洁公司(P & G)在世界范围内生产和销售超过 300 种品牌的消费产品。公司的历史可以追溯到 19 世纪 30 年代,其后,宝洁一直飞速发展。为了保持和加速这种增长,该公司进行了一项重要的运筹学研究以增强宝洁的全球竞争力。在研究之前,公司的供应链包括成百上千的供应商,公司跨越 50 种产品类型,有 60 多个工厂、15 个配送中心,并且有 1 000 多个大消费区。然而,随着公司向国际品牌的发展,管理者意识到有必要对工厂进行合并以减少生产制造成本、加快市场供应及减少资本投入。因此,该项研究着眼于重新设计公司北美地区的生产和配送系统。结果削减了近 20% 的北美工厂,由此每年的税前成本节约超过 2 亿美元。

这项研究的主要部分包括对每个产品类别建模并求解其交通问题。首先是决定工厂是否关闭,之后,对于确定生产的工厂,对该工厂生产的产品求解其交通问题,决定将产品运送到配送中心及消费区的配送成本。

资料来源: J. D. Camm, T. E. Chorman, F. A. Dill, J. R. Evans, D. J. Sweeney, and G. W. Wegryn: "Blending OR/MS, Judgment, and GIS: Restructuring P & G's Supply Chain," *Interfaces*, 27(1): 128-142, Jan.-Feb. 1997. (以下网址提供本文的链接: www.mhhe.com/hillier.)

表 8.2 P&T 公司的运输数据

		每卡车的运输成本/美元				产出
		仓 库				
		1	2	3	4	
罐头厂	1	464	513	654	867	75
	2	352	416	690	791	125
	3	995	682	388	685	100
分配		80	65	70	85	

如果忽略罐装厂和仓库的地理位置分布,我们可以给出这个问题的网络图表示。如图 8.2 所示,左侧是豌豆的 3 个产地,右侧是豌豆即将运往的 4 个仓库。箭头代表货车的可能运送路线,每个箭头旁边的数字代表每车货物在这个路线上运送所需的成本。豌豆产地和仓库旁边括号中的数字代表计划从这里运出多少货车的豌豆(由于仓库接收货物,因此仓库旁边的数字是负的)。

图 8.2 描述的问题实际上是运输问题形式的线性规划问题。为了构建模型描述这一问题,我们用 Z 代表总的运输费用,用 x_{ij} ($i=1,2,3; j=1,2,3,4$) 表示从 i 产地到 j 仓库运输的豌豆数量。因此,我们的目标就是选择这 12 个决策变量(x_{ij}) 的值,使得 Z 值最小。

$$\begin{aligned} \min Z = & 464x_{11} + 513x_{12} + 654x_{13} + 867x_{14} + 352x_{21} + 416x_{22} \\ & + 690x_{23} + 791x_{24} + 995x_{31} + 682x_{32} + 388x_{33} + 685x_{34} \end{aligned}$$

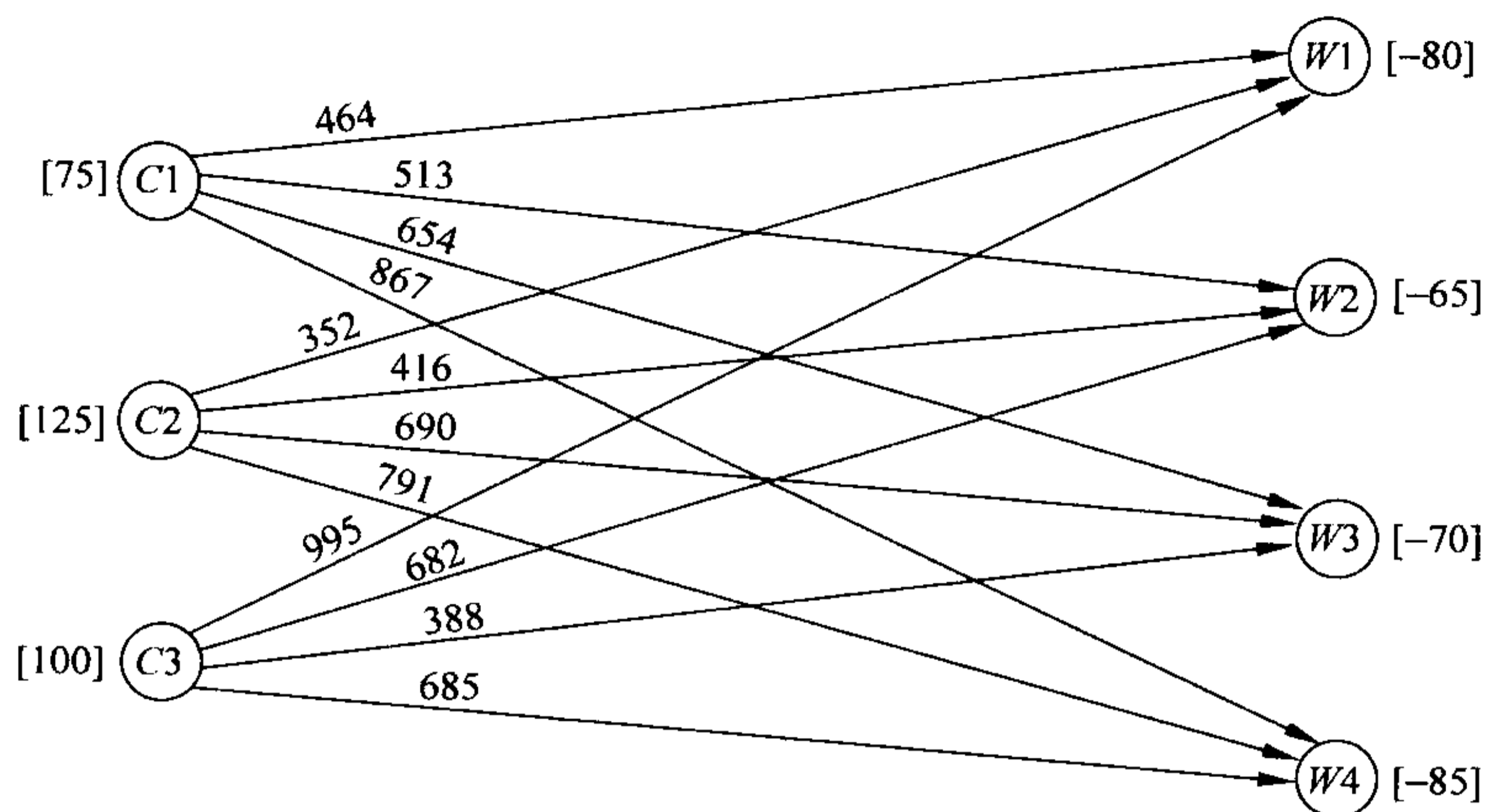


图 8.2 P&T 公司问题的网络表示

$$\begin{aligned}
 \text{s. t. } & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} & = & 75 \\
 & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} & = & 125 \\
 & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} & = & 100 \\
 & x_{11} + x_{21} + x_{31} & = & 80 \\
 & x_{12} + x_{22} + x_{32} & = & 65 \\
 & x_{13} + x_{23} + x_{33} & = & 70 \\
 & x_{14} + x_{24} + x_{34} & = & 85
 \end{aligned}$$

且 $x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4)$

表 8.3 列出了约束系数。正如本节后面部分所描述的那样，它是一种特殊的结构，正是因为这种特殊的结构才把这类问题称为运输问题。我们首先将描述运输问题模型区别于其他模型的特征。

表 8.3 P&T 公司的约束系数

		系数												
		x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	
$A =$	[1 1 1 1				1 1 1 1				1 1 1 1				} 罐头约束
		1				1				1				
		1				1				1				
		1				1				1				

运输问题的模型

为了给出运输问题的一般模型，我们需要用一些通用术语，而不像案例中的术语那么特殊。实际上，一般的运输问题关注如何把任何物品从任何生产地(称为产地)运到任何仓库(称为销地)，并使运输费用最小。案例和一般模型之间的术语的对应关系如表 8.4 所示。

表 8.4 运输问题的术语

典型案例	一般问题
罐装豌豆的卡车数	货物单位
3 个罐头厂	m 个产地
4 个仓库	n 个销地
第 i 个罐头厂的输出	从第 i 个产地提供的货物 s_i
第 j 个仓库分配的货物	第 j 个销地的需求量 d_j
从第 i 个罐头厂运送一货车产品到第 j 个仓库的运输费用	从第 i 个产地到第 j 个销地的单位分销成本 c_{ij}

从表 8.4 中的第 4 行和第 5 行,我们可以看出,每一个产地都有一些单位的产品需要运出,每一个销地都有一些单位的产品需要接收。运输问题的模型对供给和需求做出如下假设。

需求假设: 每一个产地都提供一个固定数量的产品,所有的产品都需要运往销地(我们用 s_i 代表第 i 个产地供应的产品数量, $i=1,2,\dots,m$)。同样,每一个销地都只能接收一个固定数量的产品,所有销地接收的产品都是从产地运来的(我们用 d_j 代表第 j 个销地接收的产品数, $j=1,2,\dots,n$)。

这个假设适用于 P&T 公司,因为它的每个罐装厂(产地)都有一个固定的产出,并且每个仓库(销地)都有一个固定的需求量。

这个假设意味着供给和需求之间需要存在一个平衡,也就是所有产地的供给总和应该等于所有销地的需求总和。

可行解的特性: 一个运输问题有可行解的充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^m s_i = \sum_{j=1}^n d_j$$

由于如表 8.2 所示,供给(产出)数目达 300 车次且与需求相等,所以非常幸运,对于 P&T 公司问题,供给量和需求量相等。

在诸多实际问题中,供给事实上代表需要分发的最大数目(而非固定数目)。类似的,其他情况则是需求地需要接收的最大数目(而非固定数目)。由于违背了需求假设条件,因此,此类问题一般不完全适用运输问题模型。不过我们可以通过引入虚销地或虚产地以填补实际数目对最大数目的空缺,这种重新定义的问题可以适应该模型。我们将在本节末举两个例子来说明如何处理这类问题。

表 8.4 末行列出了所分配的每一单位的成本。对单位成本的参考意味着下面的基本假设适用于任何运输问题。

成本假设: 任何特定产地至特定销地的运输费用与所需分配单位集合的数目成正比。因此,价格将是分配单位集合数目与单位分配价格的倍数(我们用 c_{ij} 表示产地 i 至销地 j 的单位成本)。

P&T 公司问题也符合这个假设,因为从任何罐头厂到任何仓库的运输费用均与运输量成正比。

对于运输问题模型,所需数据有供给量、需求量和单位成本。这些数据便是模型的参数,可以很方便地在如表 8.5 所示的参数表中总结出来。

模型：任何问题(无论是否含有运输环节)均适用该运输问题模型,只要其能通过表 8.5 中的参数完全表述,符合需求假设和成本假设,且目标是最小化分配集合所需费用。该模型所需参数如表 8.5 所示。

		每单位分销成本				供给
		销 地				
		1	2	...	n	
产地	1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	s_1
	2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	s_2
	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
	m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	s_m
需求		d_1	d_2	...	d_n	

这样定义一个问题只需填写一个类似表 8.5 的表格(如 P&T 公司问题中的表 8.2),也可以采用如图 8.3 所示的网络图来表示这些信息(如 P&T 公司问题中的图 8.2)。一些与运输问题无关的问题也可以采用其中任一方式加以表示。

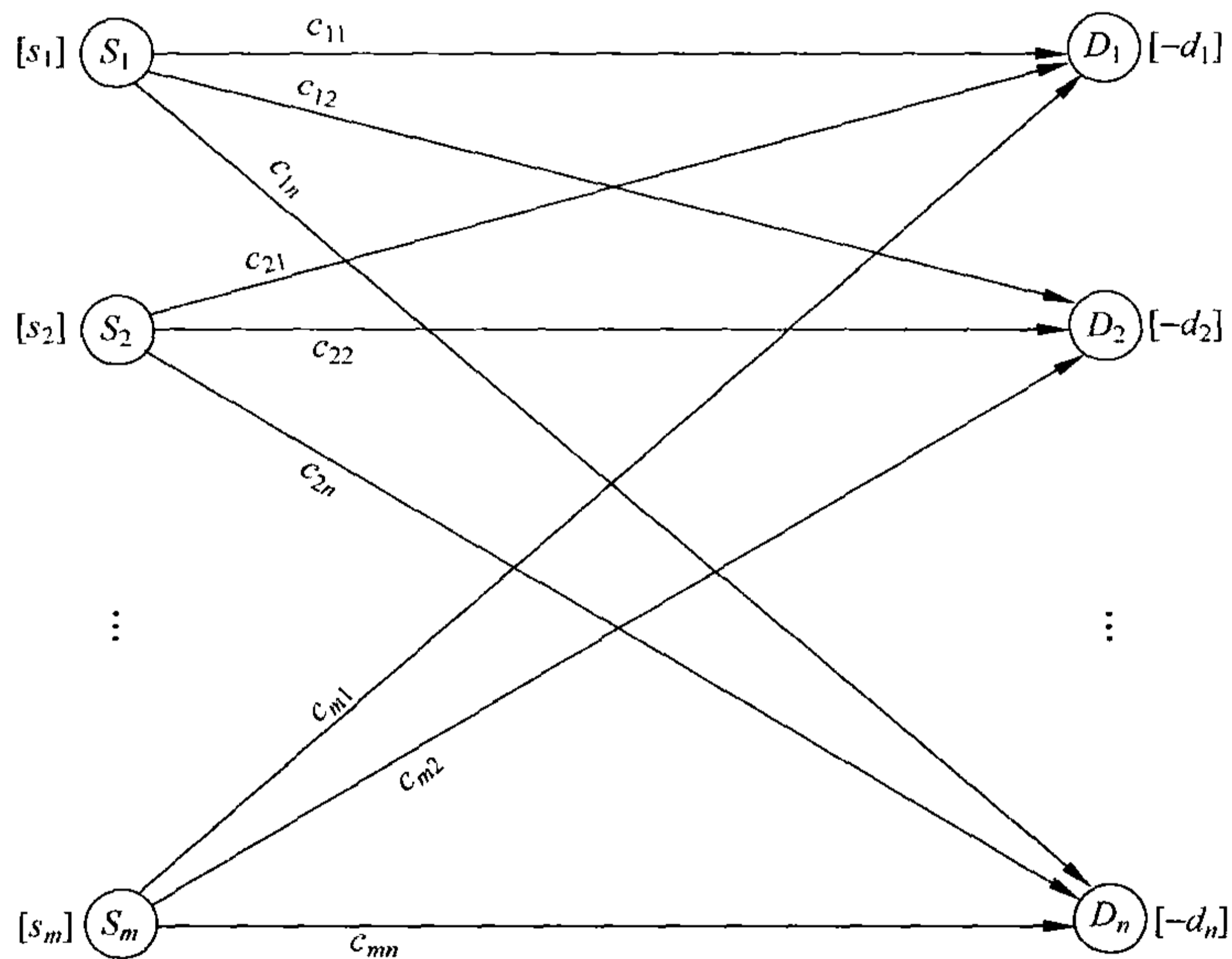


图 8.3 运输问题的网络

由于运输问题可以通过参数表格和画网络图的形式简单表示,所以不必对该问题写出正规的数学公式模型。不过我们还将继续介绍一般运输问题的模型来证实运输问题实际上是一种特殊类型的线性规划问题。

设 Z 为总的分销成本,且 x_{ij} ($i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n$) 是从产地 i 至销地 j 所分配集合的数量,该线性规划公式是

$$\begin{aligned} \min \quad Z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{s. t.} \quad &\sum_{j=1}^n x_{ij} = s_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ &\sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

并且对任意 i 和 j , $x_{ij} \geq 0$

注意到有约束系数的结果呈现特殊的结构,如表 8.6 所示。任何符合这种特殊形式的线性规划问题均是运输问题而不用考虑其具体内容。我们稍后将举例说明(8.3 节所述的指派问题就是一个例子)。这是运输问题被视为一种重要类型的线性规划问题的原因之一。

表 8.6 运输问题的约束系数

		系 数												
		x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	...	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mn}
$A =$	}													
		} 供应约束												
	} 需求约束													

在很多应用中,模型中供给和需求数量(s_i, d_j)都有整数解。此外我们要求其分销数量也为整数。由于有如表 8.6 所示的特殊结构,所有问题均有如下性质。

整数解性质: 运输问题中的任一 s_i 和 d_j 必须是整数,所有基本可行解中(包括最优解)的变量也必须是整数。

8.2 节所述求解程序只处理基本可行解,因此其将自动获得一个整数最优解(读者将明白为什么在求解完之后,还要证明基本解具有整数解性质。习题 8.2-20 可以帮助读者理解这个问题)。因此,没有必要在模型中增加一个 x_{ij} 必须为整数的约束。

与其他线性规划问题一样,一些常用的软件如 Excel, LING/LIDO 和 MPL/CPLEX 都能够用来建立和解决运输问题(及指派问题),然而这里的 Excel 方法与通常看到的有所区别,以下将详细介绍。

用 Excel 建立和求解运输问题

如 3.6 节所述,采用电子数据表建立线性规划模型的过程开始时需要回答三个问题:决策是什么?对决策的约束是什么?这些决策的整体效果衡量是什么?由于运输问题是特殊类型的线性规划问题,所以也需要首先解决这几个问题。电子数据表的设计已经考虑到如何采用逻辑方式表示信息和相关数据。

以 P&T 公司问题为例,该问题是要解决从每个罐头厂到仓库所需的运载量。这些决策的约束是从罐头厂运输的总数目必须等于其产量(供给),且每个仓库接收数目为其分配数目(需求)。该计算结果的总值为运输的总费用,目标是使运输的总费用最小。

这些信息导入电子数据表如图 8.4 所示,所有数据来自表 8.2,显示在如下数据单元组中:单位成本(D5 : G7),供给量(J12 : J14),需求量(D17 : G17)。运输数量决策采用变动单元格,有运输数量(D12 : G14)。总运输量(H12 : H14)和总接收数(D15 : G15)的总量函数如图 8.4 底部所示。约束条件是:运输量(H12 : H14)=(J12 : J14),且总接收数(D15 : G15)=需求(D17 : G17),已经在电子数据表格中加以分类,且键入 Solver 对话框中。目标单元是总价格(J17),其中它的总产量函数如图 8.4 中的右下角所示。Solver 对话框中给出了目标就是最小化目标单元格。其中被选项之一(假设是非负)约定所有运输数目必须为非负数。另一个(假设线性模型)表明运输问题也是线性规划问题的一种。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	P&T公司的配送问题									
2										
3		单位成本		目的地(仓库)						
4				Sacramento	Salt Lake City	Rapid City	Albuquerque			
5		发送地	Bellingham	\$464	\$513	\$654	\$867			
6		(罐头厂)	Eugene	\$352	\$416	\$690	\$791			
7			Albert Lea	\$995	\$682	\$388	\$685			
8										
9										
10		运送量		目的地(仓库)						
11		(装车数)		Sacramento	Salt Lake City	Rapid City	Albuquerque	总运送量		可供应量
12		发送地	Bellingham	0	20	0	55	75	=	75
13		(罐头厂)	Eugene	80	45	0	0	125	=	125
14			Albert Lea	0	0	70	30	100	=	100
15			总收到量	80	65	70	85			
16				=	=	=	=			总成本
17			需求量	80	65	70	85			\$ 152,535

Solver参数

设置目标单元格:

目标等于: Max Min

通过变换单元格:

满足下列约束:

Solver选择

假设线性模型

假设非负

	H
11	总运送量
12	=总和(D12:G12)
13	=总和(D13:G13)
14	=总和(D14:G14)

	C	D	E	F	G
15	总收到量	=总和(D12:D4)	=总和(E12:E14)	=总和(F12:F14)	=总和(G12:G14)

列中名称	单元格
需求量	D17:G17
运送量	D12:G14
可供应量	J12:J14
总成本	J17
总收到量	D15:G15
总运送量	H12:H14
单位成本	D5:G7

	J
16	总成本
17	=产量(单位成本, 运送量)总和

图 8.4 将 P&T 公司问题作为运输问题考虑时的电子表格,包括目标单元格总成本(J17)、其他输出单元格总运输量(H12 : H14)和总接收数(D15 : G15),以及建立模型所需要的说明,变更单元格运输数量(D12 : G15)表明了通过这种算法获得的最优运输计划

开始求解问题时,可以在每个可变单元格中键入任意值(如 0),点击 Solver 按钮之后,Solver 将用单纯形法求解运输问题且决定每个决策变量的最优值。最佳结果将显示在图 8.4 的运输量单元格中(D12 : G14),计算结果 152 535 美元则显示在目标单元格总费用(J17)中。

注意, Solver 只是采用一般单纯形法来求解运输问题, 而不是采用专门用来高效求解运输问题的精简版, 例如下一节将介绍的运输单纯形法。因此, 包含这类精简版的软件包在求解大型运输问题时要比 Excel Solver 快得多。

我们曾经在前面提到有些问题由于违反了条件假设, 因此并不符合运输问题的模式, 但是仍然可以添加虚销地和虚产地来重构这类问题。采用 Excel Solver 时则不必进行这种重构, 这是因为对于以供给约束为形式或者以需求约束为形式的原始模型, 单纯形法可以直接求解。然而, 问题的规模越大, 就越值得进行重构并采用运输单纯形法(或其他类似的方法), 而不是使用另一种软件包。

以下两例说明如何对问题进行重构。

一个关于虚销地的例子

北方飞机公司为全球多家航空公司制造商用飞机。生产过程的最后阶段是生产喷气发动机, 且把它们安装在飞机机身内。公司目前正在多个合同下展开生产, 将在近期发送大量的飞机, 且喷气发动机的生产必须安排在接下来的 4 个月内。

为了完成合同, 公司每个月必须提供的要安装的发动机的数量如表 8.7 中的第二列所示。可知在 1 月、2 月、3 月和 4 月底公司分别至少提供的发动机数量为 10 台、25 台、50 台和 70 台。

生产发动机可得到的设备数量因该阶段内其他产品、维修、革新等情况不同而异, 结果每个月能够生产的最大数量和生产单位产品的成本(以百万美元计)如表 8.7 中的第三列和第四列所示。

因为每月生产成本不同, 所以有必要规划每月生产产品的数量以减少生产费用, 而这就导致了存储费用的产生。每个月存储单位产品的成本为 15 000 美元^①, 如表 8.7 中的最右列所示。

生产经理要制订一个方案, 确定每月生产的发动机数, 以使生产和存储费用最低。

表 8.7 北方航空公司的生产安排数据

月 份	计划安装机器数	最大产量 /百万美元	生产的单位成本 /百万美元	存储的单位成本 /百万美元
1	10	25	1.08	0.015
2	15	35	1.11	0.015
3	25	30	1.10	0.015
4	20	10	1.13	

建模: 一种方法是对问题建立数学模型, 设 x_j 为 j 月生产的发动机数目, 其中 $j=1, 2, 3, 4$ 。采用 4 个决策变量, 该问题即可表示为线性规划问题而非运输问题。

另一方面, 我们可以将这个问题描述成更为简便的运输问题。这种观点将采用产地和销地来描述问题, 且需要区分以下符号: x_{ij}, c_{ij}, s_i, d_j 。

由于分发单元是喷气式发动机, 每个都在特定月份生产和特定月份安装, 则有产地 $i=$ 在第 i 月份生产的发动机 ($i=1, 2, 3, 4$)

^① 为了建模的需要, 假设要留到下个月安装的发动机的存储成本在每个月的月末发生。因此, 假设在某一给定月份安装生产且在同一月份安装的发动机不产生库存成本。

销地 j = 在第 j 月份安装的发动机 ($j=1, 2, 3, 4$)

x_{ij} = 在第 i 月份生产、第 j 月份安装的发动机数量

c_{ij} = 与每单位 x_{ij} 相关的成本

$$= \begin{cases} \text{每单位产品的成本和储存成本} & \text{若 } i \leq j \\ ? & \text{若 } i > j \end{cases}$$

$s_i = ?$

d_j = 第 j 月安装的数量

相应参数表如表 8.8 所示。

		每单位的分销成本/百万美元				供给量
		销 地				
		1	2	3	4	
产地	1	1.080	1.095	1.110	1.125	?
	2	?	1.110	1.125	1.140	?
	3	?	?	1.100	1.115	?
	4	?	?	?	1.130	?
需求量		10	15	25	20	

既然不能提前一个月为设备生产发动机,如果 $i > j$, x_{ij} 就必须为 0, 即这样的 x_{ij} 没有生产费用。为了能应用运输模型解决 8.2 节中的问题, 必须为这些不可识别的变量赋值, 4.6 节中介绍的大 M 方法便是赋值的一个方法, 因此为表 8.8 中不可识别的费用变量设定一个足够大的值(方便起见, 用 M 表示), 使相应 x_{ij} 值在最终解中均为 0。

表 8.8 中需要插入的列变量并不明确, 因为每月的生产值并不确定, 事实上, 解决此类问题的目的是求得生产数量的满意解。这需要为表格每一个变量设置初值, 包括供给列, 来构成一个运输问题模型。尽管在一般形式中供给约束并不存在, 但在数量上绝对不能超出总供给上界的约束是必然的。形式如下

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 25$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 35$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 30$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} \leq 10$$

与标准运输模型的区别仅仅在于约束等式变为不等式。

为了与运输问题模型匹配, 我们运用 4.2 节中介绍的松弛变量来转化不等式。本节将松弛变量填充虚拟的单元格, 代表每月没有使用的生产能力, 这种转变允许运输问题的供给等于生产能力, 然而, 由于虚拟单元格代表完全没有使用的生产能力, 这个需求值为

$$(25 + 35 + 30 + 10) - (10 + 15 + 25 + 20) = 30$$

包含这个需求之后, 总的生产能力就与需求相等了, 这就是可行解空间为寻求可行解提供的条件。

由于没有费用发生, 虚拟单元格的值应该为 0 (M 不适用于本列, 因为并不强制相应的 x_{ij} 为 0, 只要总和为 30 即可)。

最终参数表如表 8.9 所示, 表中虚拟单元格标示为销地 5(D), 运用这种方法很容易

找到 8.2 节中描述的解决方案最优解(见习题 8.2-10 和书后答案)。

表 8.9 北方航空公司的完整参数表

		每单位分销成本/百万美元					供给量
		销 地					
		1	2	3	4	5(D)	
产地	1	1.080	1.095	1.110	1.125	0	25
	2	M	1.110	1.125	1.140	0	35
	3	M	M	1.100	1.115	0	30
	4	M	M	M	1.130	0	10
需求量		10	15	25	20	30	

一个关于虚产地的例子

Metro Water District 是在一个大的地理区域管理水资源分配的机构。该地区非常干旱,水资源相当贫乏,因此该地区每年都需要从其他地区购买和引进水资源,主要是从 Colombo、Sacron 和 Calorie 河流域地区引进水资源并转售给本区的消费者。该机构的主要客户是 Berdoo、Los Devils、San Go 和 Hollyglass 等市的水资产部门。除了不能将 Calorie 河的水供应给 Hollyglass 市外,该机构可以将以上三个地区引进的水转售给其任何城市。然而由于水道规划和城市地理因素,各地域之间供水费用不尽相同,每英亩—英尺水的价格(单位:10 美元)如表 8.10 所示。尽管如此,该机构仍对各个城市的供水收取相同的价格。

该机构的管理者所面临的问题是如何在即将来临的夏季有效分配可用的水资源。表 8.10 最右列给出了以百万英亩—英尺(译者注:原文为 acre foot,应指面积为 1 英亩,高度为 1 英尺的容积单位)为单位的三条河可用水资源地数量。该机构必须向每个城市提供一个最低限度的供水量,以满足各个城市的必需供水(San Go 由于拥有独立的水源而除外)。表 8.10 给出每个城市的最低需求量,Los Devils 的要求供水量刚好等于其最低需求量,Berdoo 要求多于最低需求量 20 个单位,Sango 要求供水量多于最低需求量 30 个单位,Hollyglass 要求尽可能多的供水量。

表 8.10 Metro Water District 水资源数据

	费用/(10 美元/立方英尺)				供应量
	Berdoo	Los Devils	San Go	Hollyglass	
Colombo River	16	13	22	17	50
Sacron River	14	13	19	15	60
Calorie River	19	20	23	—	50
最低需求	30	70	0	10	单位为百万
需求量	50	70	30	∞	英亩—英尺

管理部门希望在满足四个城市最低需求量的同时,以最低的费用来分配三条河的可用水资源。

建模:表 8.10 是一个近乎严格的运输问题参数表,河流作为产地,城市作为销地。然而,这里有一个问题,各个销地的需求数量并不是确定的,每一个销地的接收量(除了

Los Devils)都是决策变量,均有其上界和下界。对于一个城市来说,如果需求量不超过满足其他城市最低需求用水之后的剩余可供量,那么这个需求量就是该城市的需求上界,否则,上界就是剩余可供量的数量。因此,尽管 Hollyglass 无最大需求,但有确定的上界

$$(50 + 60 + 50) - (30 + 70 + 0) = 60$$

与运输问题参数表中的其他数据一样,需求量必须是常量,而不应该是有边界的决策变量。为了克服这个问题,暂时假想并不需要一定满足各个城市的最低需求,这样上界就是给各个城市分配水量的唯一约束。在这种情况下,分配的水量能否作为运输问题模型中的销量呢?通过调整,答案是肯定的(你看出来需要如何调整了吗)。

问题和北方航空公司的生产计划问题类似,只是需求过剩和生产过剩的区别。前面引进虚拟的销地接收多余的供给能力,这里则引进虚拟的产地满足多余的(无效的)需求。在这里虚拟产地应该提供的数量为需求与实际生产供给能力之差:

$$(50 + 70 + 30 + 60) - (50 + 60 + 50) = 50$$

相应的参数见表 8.11,表中以百万英亩—英尺和千万美元作为单位。虚拟产地由于没有向销地提供实际的水资源,因此相应单元格的费用值为 0。同时由于 Calorie 不能分配水量给 Hollyglass,因此用大 M 作为其水资源运输费用。

表 8.11 Metro Water District 无最低需求水资源数据

		费用/(千万美元/立方英尺)				供给
		销 地				
		Berdoo	Los Devils	San Go	Hollyglass	
产地	Colombo River	16	13	22	17	50
	Sacron River	14	13	19	15	60
	Calorie River	19	20	23	M	50
	Dummy	0	0	0	0	50
需求量		50	70	30	60	

现在看看如何将各个城市的最低需求引入模型。由于 San Go 没有最低需求,不予考虑; Hollyglass 不需要修正,因为其需求值(60)超过虚拟供给值(50)10个单位,所以任何可行方案中供给 Hollyglass 的实际值至少为 10,其最低需求就能得到保障(如果没有这种巧合, Hollyglass 将和 Berdoo 一样需要修正)。

Los Devils 的最低需求与其需求量相等,所以其总需求 70 必须由实际产地提供。这里需要大 M 方法,为从虚拟产地输送到 Los Devils 的费用设置一个大 M 值,确保在最优方案中由虚拟产地分配给 Los Devils 的数量为 0。

最后考虑 Berdoo。与 Hollyglass 不同的是,虚拟产地除了能提供 Berdoo 的额外需求外,至少还能部分提供 Berdoo 的最低需求。由于 Berdoo 的最低需求值为 30,所以必须使虚拟产地供应 Berdoo 的量不超过 20。修正的方法是将 Berdoo 划分为两个销地,一个需求量为 30,从虚拟产地获得水资源的费用为 M ,另一个需求量为 20,从虚拟产地获得水资源的费用为 0。参数如表 8.12 所示,8.2 节将详细描述计算过程。

表 8.12 Metro Water District 参数表

			分销成本/(亿美元/单位)					供给
			销地					
			Berdoo (最小)	Berdoo (额外)	Los Devils	San Go	Hollyglass	
			1	2	3	4	5	
产地	Colombo River	1	16	16	13	22	17	50
	Sacron River	2	14	14	13	19	15	60
	Calorie River	3	19	19	20	23	M	50
	虚产地	4(D)	M	0	M	0	0	50
需求			30	20	70	30	60	

运输问题拓展

即使运用上述两个例子描述的重构求解方法,一些产销分配问题也不满足运输问题模型。原因之一在于一些问题的运输并不是直接从产地发往销地,而是存在中间存放点。3.4节的例子(见图3.13)就描述了这样一个问题。在这种情况下,产地是两个工厂,销地是两个仓库。然而,从特定的工厂运往特定的仓库可能首先要运往储运中心,或是其他工厂,或是其他仓库,费用因运输线路的不同而异,而且,某些运输线路还存在运输上限。尽管从形式上看超出了一般运输问题的范畴,但这类问题仍然是一类特殊的线性规划问题,称为最小费用流问题,我们将在9.6节详细讨论,9.7节给出了解决最小费用流问题的一种行之有效的办法。没有对运输路线的运输量施加上限的最小成本流问题可以被看做一个转载问题。

另一种情况是,直接从产地发往销地,但可能不符合运输问题的其他假设。如果从产地到销地的费用与运量不成线性关系,则违反了线性成本假设;如果产量或销量不确定,则违反了需求假设。例如,销地的最终需求并不清楚,除非一定数量的资产已经运到,并且费用与运量不成线性关系。如果供给量不确定,费用也与数量不成线性关系。例如,费用由一个固定费用和变量共同确定。目前有很多关于运输问题一般化及其解法的研究。^①



8.2 用于运输问题的单纯形法

由于运输问题是特殊的线性规划问题,能够应用第4章讲述的单纯形法进行求解。读者将会看到,利用表8.6中所示的特殊结构,这种方法中的大量计算可以被极大地简化。我们称这种改进方法为运输问题的单纯形法。

^① 例如可参考 K. Holmberg and H. Tuy, "A Production-Transportation Problem with Stochastic Demand and Concave Production Costs," *Mathematical Programming Series A*, **85**: 157-179, 1999.

在阅读的过程中,你应当注意如何利用问题的特殊结构简化计算过程。这也是一种重要的运筹学方法——根据问题的特殊结构来改进解决问题的算法。

运输单纯形法的提出

为了使读者清楚运输单纯形法所做的改进,我们先看看一般的(未改进的)单纯形法是如何表示运输问题的。通过构造约束参数表(见表 8.6),将目标方程转换为求解最大值形式,使用大 M 方法为 $m+n$ 个等式引入人工变量 Z_1, Z_2, \dots, Z_{m+n} (见 4.6 节)。如表 8.13 所示,表中空白单元格的值均为零(单纯形法的第一次迭代之前需要做的调整是用代数方法消除第 0 行初始(人工)基变量的非 0 系数)。

基变量	方程	系 数								右侧
		Z	\dots	x_{ij}	\dots	z_i	\dots	z_{m+j}	\dots	
Z	(0)	-1		c_{ij}		M		M		0
	(1)									
	\vdots									
z_i	(i)	0		1		1				s_i
	\vdots									
z_{m+j}	($m+j$)	0		1				1		d_j
	\vdots									
	($m+n$)									

通过一系列迭代,第 0 行将变为如表 8.14 所示的形式。由于表 8.13 中 0 和 1 的系数结构,5.3 节中描述的位势 u_i 和 v_j 的意义如下:

u_i = 在得到现行的单纯形表所进行的迭代过程中,应用单纯形法用原始的 0 行(直接地或间接地)减去原始的 i 行的倍数。

v_j = 在得到现行的单纯形表所进行的迭代过程中,应用单纯形法用原始的 0 行(直接地或间接地)减去原始的 $m+j$ 行的倍数。

基变量	方程	系 数								右侧
		Z	\dots	x_{ij}	\dots	z_i	\dots	z_{m+j}	\dots	
Z	(0)	-1		$c_{ij} - u_i - v_j$		$M - u_i$		$M - v_j$		$-\sum_{i=1}^m s_i u_i - \sum_{j=1}^n d_j v_j$

根据第 6 章介绍的对偶理论, u_i 和 v_j 的另一个属性是它们均属于对偶变量^①。如果 x_{ij} 是非基变量, $c_{ij} - u_i - v_j$ 解释为 x_{ij} 增长时 Z 改变的量。

^① 将这些变量重新标识为 y_i , 改变表 8.14 中第 0 行的标记, 将目标方程转化为原始的求最小值形式, 将更容易识别这些变量。

所需要的信息

为了更好地理解,我们回顾一下单纯形法解决问题的过程。在初始化时,需要得到初始基可行解,这是通过引进人工变量作为初始基变量,并使其值等于 s_i 和 d_j 来实现的。最优性检验和第一步迭代(决定入基变量)需要知道当前 0 行,这是通过用先前的第 0 行减去另一行的倍数所得的差获得的。第二步(决定出基变量)必须识别随着入基变量增加首先为 0 的基变量,这是通过比较当前入基变量的系数和等式右边值来实现的。第三步确定新的基可行解,是通过在当前的单纯形表上用任一行减去某一行的倍数来完成的。

获得这些信息的有效方法

运输问题单纯形法是如何通过更简单的方法获得相同的信息呢?在接下来的内容中将会得出答案,这里先给出几点简要的说明。

第一,不需要人工变量,因为有更简单、更方便的方法(需要若干变换)来获得初始基可行解。

第二,当前 0 行只需要通过简单的计算 u_i 和 v_j 值就能获得,而不需要使用其他任何一行。由于每一个基变量在 0 行必然有一个 0 系数, u_i 和 v_j 通过计算一系列等式

$$c_{ij} - u_i - v_j = 0$$

来获得,其中对每一个 i 和 j , x_{ij} 是基变量。

(在以后讨论运输单纯形法的最优性检验时会进一步描述这个计算过程)表 8.13 中的特殊结构使通过利用 $c_{ij} - u_i - v_j$ 作为表 8.14 中 x_{ij} 的系数方便地获得第 0 行成为可能。

第三,出基变量同样不需要使用入基变量的系数来确定,原因在于问题的特殊结构很容易看出方案是如何随入基变量的增加而改变的,结果新的基可行并不需要对单纯形表中的行进行代数计算就能确定(当读者看到后文中描述运输单纯形法如何执行一个迭代过程时就会明白其中的细节)。

基于以上说明,可以得出结论,几乎整个单纯形表(包括维持工作)都可省掉,除输入数据(c_{ij} , s_i 和 d_j)之外,运输单纯形法仅仅需要获得当前的基可行解^①,当前 u_i 和 v_j 值,以及非基变量的 $c_{ij} - u_i - v_j$ 的值。如表 8.15 所示,用手工计算时,很容易为每次变换记录这些信息(请注意在简表中通过圈出 x_{ij} 来区分 x_{ij} 的值和 $c_{ij} - u_i - v_j$)。

效率的极大提高

读者可以通过同时运用单纯形法和运输单纯形法求解同一个问题来看出这两种方法在效率和方便程度上的巨大差异(见习题 8.2-17)。然而这种差异对于只能依靠计算机求解的大问题来说就更加明显了。可以通过比较单纯形表与运输单纯形表的规模来初步考察这个差异。例如,对于一个有 m 个产地和 n 个销地的运输问题来说,单纯形表将有 $m+n+1$ 行和 $(m+1)(n+1)$ 列(除了在 x_{ij} 列左边的列之外),后者有 m 行 n 列(除了两个额外的信息行和信息列之外)。现在试着给 m 和 n 赋值(比如 $m=10$, $n=100$,这是一个很典型的中等规模运输问题),看看这两个表的单元个数随着 m 和 n 的增长将会以怎样的速率增加。

^① 由于非基变量自动为 0,当前基可行解完全通过记录基变量的值来确定,从现在起应该习惯这种用法。

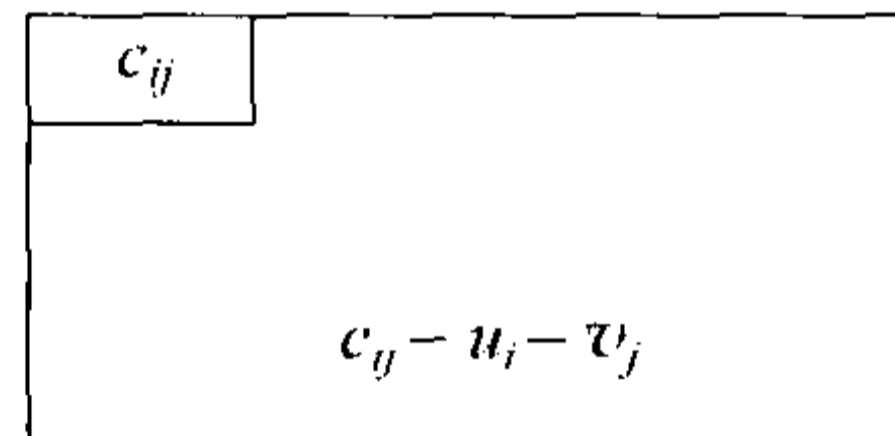
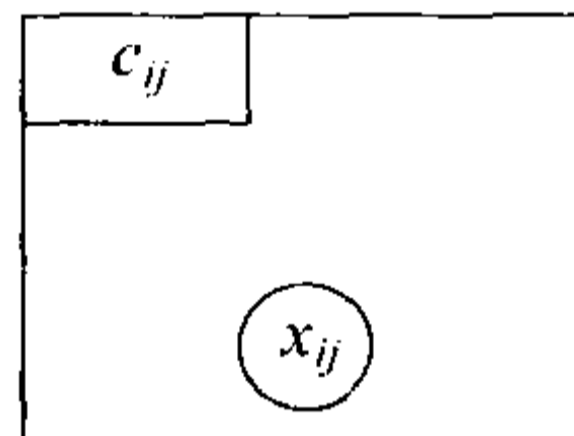
表 8.15 运输单纯形表的格式

		销 地				供给量	u_i
		1	2	...	n		
产地	1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	s_1	
	2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	s_2	
	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	
	m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	s_m	
需求量		d_1	d_2	...	d_n	$Z=$	
v_j							

每个单元需要加入的信息:

如果 x_{ij} 是
基变量

如果 x_{ij} 是
非基变量



初始化

初始化的目标是获得初始基可行解。因为运输问题中所有的函数约束均为等式约束,单纯形法一般通过引进人工变量作为初始基变量来实现求解,如 4.6 节所示。最终的基解实际上只有在这个问题修订以后才是可行的,所以需要大量迭代过程使人工变量转化为 0 来获得真正的基可行解。运输单纯形法不考虑这些问题,而是用一个简单的程序直接在运输单纯形表上创建一个真正的基可行解。

在论述这个过程之前需要指出,任何运输问题的基可行解中基变量个数总是比预期的少一个。线性规划问题的每一个约束方程通常都有一个基变量。对拥有 m 个产地和 n 个销地的运输问题来说,约束方程的个数是 $m+n$ 个,而基变量的个数为 $m+n-1$ 。

原因在于,对于运输问题,所有的约束方程均是等式,而这 $m+n$ 个等式有一个是冗余的重复约束,能够删除而不影响可行域;也就是说,当任何 $m+n-1$ 个等式满足时,另一个等式也自动满足(这个事实可以通过以下例子证明:任何供给约束实际上都等于总的需求约束减去所有其他的供给,任何需求等式也都可以通过总的供给量减去其他的需求求得,见习题 8.2-19)。因此,运输单纯形表中的基可行解都会有 $m+n-1$ 个循环的非

负分配值存在,且每行分配额的总和等于供应量,每列分配额的总和等于需求量^①。

建立初始基可行解的程序是每次选择 $m+n-1$ 个基变量。每次选择之后会赋给变量一个值来满足一个额外的约束(进一步考虑消除哪一个约束的行或列来提供配额)。因此,经过 $m+n-1$ 次选择之后,就得到一个能满足所有约束的基可行解。目前存在很多不同的选择基可行解的准则。在描述完创建基可行解的基本程序之后,我们将列出其中常见的三种。

建立初始基可行解的一般程序^②

一开始,运输单纯形表中所有的产地行和销地列都被初步考虑能够提供一个基变量。

1. 从仍然需要考虑的行和列中根据特定法则选择下一个基变量(配额)。
2. 保证配额的大小恰好能够满足用完行中剩下的供应量或列中剩下的需求量(比较小的那个)。

3. 进一步考虑删去行和列(剩余的供给量最小的行或剩余的需求量最小的列)(如果行和列有相同的剩余供应量和需求量,则选择消除行,列后来用于提供退化的基变量,例如一个循环的 0 配额)。

4. 当需要考虑的行或列只剩下一个时,则在该行或该列中任意选择一个基变量作为剩余变量(即既没有被选做基变量也不隶属于删掉的行或列中的变量)且过程结束。否则,转步骤 1。

步骤 1 的可选法则

1. 西北角法:首先选择 x_{11} (也就是从运输单纯形表的西北角开始)。然后,如果 x_{ij} 是最后一个被选择的基变量,如果产地 I 的供给有剩余,则选择 $x_{i,j+1}$ (也就是向右移动一列),否则,选择 $x_{i+1,j}$ (也就是向下移动一行)。

例 为了更详尽地描述西北角法,我们阐述一下用西北角方法解决 Metro Water District 问题的第一步的一般程序(见表 8.12)。由于在本例中 $m=4, n=5$,初始基可行解有 $m+n-1=8$ 个基变量。

如表 8.16 所示,首先设定 $x_{11}=30$,正好用尽第 1 列的需求(进一步考虑后,消除本列)。第一次迭代后第 1 行的剩余供给量为 20,所以下一步选择 $x_{1,1+1}=x_{12}$ 作为基变量。由于供给值小于第 2 列的需求值 20,设定 $x_{12}=20$,并且消除本行(这里消除行 1 而不是列 2 是根据第 3 步的说明)。然后选择 $x_{1+1,2}=x_{22}$,由于第 2 列剩余需求为 0,小于第 2 行供给值 60,设 $x_{22}=0$ 并消除第 2 列。

继续使用这种法则,将最终获得一个完整的初始基可行解,见表 8.16,其中循环数是基变量的值($x_{11}=30, \dots, x_{45}=50$)且所有其他的变量(例如 x_{13})是非基变量且值均为 0。另外,非基变量值均为 0,箭头表示选择基变量顺序,解决方案的 Z 值为

$$Z = 16(30) + 16(20) + \dots + 0(50) = 2470 + 10M$$

^① 需要注意的是,任何有 $m+n-1$ 个非 0 变量的可行解并不一定是基解,因为可能是两个或多个非负方案的加权平均(比如有多个基变量为 0),但我们没必要考虑是否将其误解为基解,因为运输问题简化求解仅仅建立有效的基可行解。

^② 4.1 节指出单纯形法是运筹学中系统求解过程的算法的例子,注意到这个过程依次执行的 4 步构成一次迭代。

表 8.16 运用西北角法得到的初始基可行解

		销 地					供给量	u_i
		1	2	3	4	5		
产地	1	16 30	16 20	13	22	17	50	
	2	14	14 0	13 60	19	15		
	3	19	19	20 10	23 30	M 10		
	4(D)	M	0	M	0	0 50		
需求量		30	20	70	30	60	$Z=2470+10M$	v_j

2. 沃格尔(Vogel)法: 对仍然需要考虑的行和列, 计算罚数, 也就是行或列中剩余的最小单位成本和次小单位成本 c_{ij} 的算数差(如果剩余的行或列中有两个相同的最小单位成本, 则罚数为 0)。在罚数最大的行或列中, 选择剩余单位成本最小的变量(如果罚数最大的行或列不止一个或剩余单位成本最小的变量不止一个的话, 任选一个即可)。

例 现在我们应用一般程序根据沃格尔法来选择 Metro Water District 问题中的下一个基础变量。这个法则更适合在参数表(而不是在完整的运输单纯形表)中进行计算, 从表 8.12 开始计算。在每一次迭代中, 在计算出剩余的需要考虑的行和列中的差值之后, 圈定最大差值, 并用一个方框将所在行或列中的最小单位费用框起来。有这个单位成本的变量作为最终选择的下一个基变量, 并且在现行表的右下角表示出来, 相应的行或列将被删除(见一般程序中的步骤 2 和 3)。下次迭代的表与这一步相似, 只是少了这次迭代中删去的行或列, 且相应的供给量或需求量中少了相应的配额。

对 Metro Water District 问题应用沃格尔法之后得出如表 8.17 所示的参数表, 其中初始基可行解中包含 8 个基变量, 在各自参数表的右下角列出。

本例描述了一般程序中需要特别注意的两个相对微妙的特征。

首先, 注意最后的迭代选择 3 个变量(x_{31} , x_{32} 和 x_{33})作为基变量而不像其他迭代一样只选择一个, 原因在于此时仅仅需要考虑一行(第 3 行)。因此一般程序中的第 4 步指出要选择与第 3 行相关的每一个剩余变量作为基变量。

其次, 注意倒数第 2 步迭代中设定 $x_{23}=20$, 这正好满足了行中剩余的供给和列中剩余的需求。然而进一步考虑之后, 根据第 3 步只消除该行, 留下列为下一步迭代提供一个非负的基变量, 而不是同时消除行和列。事实上, 最后一步迭代使用第 3 列将 x_{33} 选作基变量就是出于这个目的。这个现象的另一个描述见表 8.16, 其中设定 $x_{12}=20$, 仅仅消除第 1 行, 留第 2 列为下一步迭代提供一个非负基变量 $x_{22}=20$ 。

尽管 0 指派看起来毫无意义, 但它确实发挥着重要作用。读者很快就会见到, 应用运输单纯形法求取现行的基可行解必须知道所有的 $m+n-1$ 个基变量, 包括值为 0 的变量。

表 8.17 应用沃格尔法求得的初始基可行解

		销 地					供给量	行差值
		1	2	3	4	5		
产地	1	16	16	13	22	17	50	3
	2	14	14	13	19	15	60	1
	3	19	19	20	23	M	50	0
	4(D)	M	0	M	0	0	50	0
需求量		30	20	70	30	60	选择 消除列4	$x_{44}=30$
列差值		2	14	0	19	15		
		销 地				供给量	行差值	
		1	2	3	5			
产地	1	16	16	13	17	50	3	
	2	14	14	13	15	60	1	
	3	19	19	20	M	50	0	
	4(D)	M	0	M	0	20	0	
需求量		30	20	70	60	选择 消除行	$x_{45}=20$ 4(D)	
列差值		2	14	0	15			
		销 地				供给量	行差值	
		1	2	3	5			
产地	1	16	16	13	17	50	3	
	2	14	14	13	15	60	1	
	3	19	19	20	M	50	0	
需求量		30	20	70	40	选择 消除行1	$x_{13}=50$	
列差值		2	2	0	2			
		销 地				供给量	行差值	
		1	2	3	5			
产地	2	14	14	13	15	60	1	
	3	19	19	20	M	50	0	
需求量		30	20	20	40	选择 消除列5	$x_{25}=40$	
列差值		5	5	7	$M-15$			
		销 地			供给量	行差值		
		1	2	3				
产地	2	14	14	13	20	20	1	
	3	19	19	20	20	50	0	
需求量		30	20	20	20	选择 消除行2	$x_{23}=20$	
列差值		5	5	7	7			
		销 地			供给量	行差值		
		1	2	3				
产地	3	19	19	20	50			
需求量		30	20	0		选择	$x_{31}=30$ $x_{32}=20$ $x_{33}=0$	$Z=2\ 460$

3. Russell 近似法: 对于每一个仍需考虑的产地行 i , 选定该行中单位运价 c_{ij} 的最大值作为 \bar{u}_i 。对于每一仍需考虑的销地列 j , 选定该列中单位运价 c_{ij} 的最大值作为 \bar{v}_j 。对于每个在这些行和列中没有选择过的变量 x_{ij} , 计算 $\Delta_{ij} = c_{ij} - \bar{u}_i - \bar{v}_j$ 。选定 Δ_{ij} 取最大负值时对应的那个变量(若有相同的最大负值, 任取一个即可)。

例 下面介绍应用步骤 1 中的 Russell 近似法解决 Metro Water District 公司问题的基本步骤(见表 8.12)。包含基变量(配额)序列的结论见表 8.18。

在迭代 1 中, 第一行中的最大单位成本是 $\bar{u}_1 = 22$, 第一列中的最大单位成本是 $\bar{v}_1 = M$ 等。因此

$$\Delta_{11} = c_{11} - \bar{u}_1 - \bar{v}_1 = 16 - 22 - M = -6 - M$$

计算所有的 Δ_{ij} ($i=1, 2, 3, 4; j=1, 2, 3, 4, 5$), 可知 $\Delta_{45} = 0 - 2M$ 具有最大的负值, 所以 $x_{45} = 50$ 被选作第一个基变量(配额)。这个配额已经用完了第四行中所有的供给量, 所以这一行将被删去。

注意到删去这一行改变了下一次迭代中的 \bar{v}_1 和 \bar{v}_3 , 所以在第二次迭代时将需要重新计算 $j=1, 3$ 所对应的 Δ_{ij} 值, 并删掉 $i=4$, 可得此时最大的负值为

$$\Delta_{15} = 17 - 22 - M = -5 - M$$

所以 $x_{15} = 10$ 成为第二个基变量(配额), 同理删去第五列。

依次进行迭代, 读者可以通过验证表 8.18 中给出的其他配额值验证自己的理解。而且读者会发现在这部分或其他部分的程序中, IOR Tutorial 对于进行这类相关的计算和阐明方法都非常有用(见寻找初始基可行解的相关程序)。

表 8.18 运用 Russell 近似法求得的初始基可行解

迭代	\bar{u}_1	\bar{u}_2	\bar{u}_3	\bar{u}_4	\bar{v}_1	\bar{v}_2	\bar{v}_3	\bar{v}_4	\bar{v}_5	最大负值 Δ_{ij}	配额
1	22	19	M	M	M	19	M	23	M	$\Delta_{45} = -2M$	$x_{45} = 50$
2	22	19	M		19	19	20	23	M	$\Delta_{15} = -5 - M$	$x_{15} = 10$
3	22	19	23		19	19	20	23		$\Delta_{13} = -29$	$x_{13} = 40$
4		19	23		19	19	20	23		$\Delta_{23} = -26$	$x_{23} = 30$
5		19	23		19	19		23		$\Delta_{21} = -24^*$	$x_{21} = 30$
6										与其无关	$x_{31} = 0$ $x_{32} = 20$ $x_{34} = 30$ $Z = 2\ 570$

* 存在两个 Δ 值为 -24 , 任取一个即可。

比较步骤 1 的几个法则

现在我们来比较一下上述用来选择下一个基变量的三个法则。西北角法最主要的优点是求解速度快且比较容易实施。而因为它没有注意到单位成本 c_{ij} , 通常所得到的结论往往远非最优解(注意到表 8.16 中 $x_{35} = 10$ 而 $c_{35} = M$)。多花费些精力找到一个好的初

始可行解会大大减少应用运输单纯形法得到最优解所需要的迭代次数(见习题 8.2-7 和习题 8.2-9)。找到最优解则是另外两个法则的目标。

沃格尔法是这些年来流行的一种方法^①,特别是因为它手工计算起来相对容易。不过该方法中的罚数是指如果不给某行或某列中单位成本最小的单元格赋值而产生的最小附加的单位成本,该方法没有把总的成本考虑得非常周全。

Russell 近似法提供了另一个非常好的准则。^② 这种方法可以在计算机上快速完成(而不是手工完成)。尽管不太清楚平均看来哪种方法更有效,但这种方法很多情况下都能获得比沃格尔法更好的解(例如,沃格尔法获得的最优解为 $Z=2460$,而 Russell 法获得的最优解为 $Z=2570$)。对于一个大的问题来说,可以同时应用两种准则,然后选择最优结论来开始运输单纯形法的迭代。

Russell 近似法的一个显著优点是它可以直接仿照运输单纯形法的第一步计算(正如读者将看到的),这将从某种程度上简化整个计算过程。特别地, \bar{u}_i 和 \bar{v}_j 值是这样定义的:我们用 $c_{ij} - \bar{u}_i - \bar{v}_j$ 相对值估计当运输法取得最优解时获得的 $c_{ij} - u_i - v_j$ 的相对值。

现在我们应用表 8.18 中通过 Russell 近似法获得的初始可行解来解释运输单纯形法的剩余部分。(在求解 u_i 和 v_j 之前的)初始运输单纯形表见表 8.19。

下一步是应用最优性检验检查初始解是不是最优的。

表 8.19 Russell 近似法的初始运输单纯形表(在求解 $c_{ij} - u_i - v_j$ 之前)

迭代 0	销地					供给量	u_i
	1	2	3	4	5		
产地	1	16	16	13 (40)	22	17 (10)	50
	2	14 (30)	14	13 (30)	19	15	60
	3	19 (0)	19 (20)	20	23 (30)	M	50
	4(D)	M	0	M	0	0 (50)	50
需求量	30	20	70	30	60	Z=2570	
	v_j						

① N. V. Reinfeld and W. R. Vogel, *Mathematical Programming*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1958.

② E. J. Russell, "Extension of Dantzig's Algorithm to Finding an Initial Near-Optimal Basis for the Transportation Problem," *Operations Research*, 17: 187-191, 1969.

最优性检验

应用表 8.14 中的标记法,我们可以推导出用于检验下列运输问题的单纯形法的标准最优解检验方法(见 4.3 节部分)。

最优性检验: 当且仅当对于任意 (i, j) 都有 $c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$, 且 x_{ij} 是非基础解时, 基可行解才是最优的。^①

因此, 最优性检验的唯一工作是寻找现在可行解的 u_i 和 v_j 值, 然后按下列步骤计算这些 $c_{ij} - u_i - v_j$ 的值。

因为若 x_{ij} 为基变量, $c_{ij} - u_i - v_j$ 的值应该为 0, 所以 u_i 和 v_j 满足下列等式

$$c_{ij} = u_i + v_j, \text{ 当 } x_{ij} \text{ 为基变量时}$$

共有 $m+n-1$ 个基变量, 所以一共有 $m+n-1$ 个这样的等式。因此, 未知数 (u_i 和 v_j) 的数目为 $m+n$, 这些变量中有一个变量可以在不违背等式的前提下被任意赋一个值。这个变量及其赋值的选择不影响任何 $c_{ij} - u_i - v_j$ 的值。包括当 x_{ij} 是非基变量时, 因此它带来的唯一(最小)的区别就是解这些等式的难易程度。为达到容易解的目的的一个方便的选择就是选择行里具有最大配额的 u_i (若有相同的最大值任取一个即可) 并且设它的值为 0。因为这些等式的结构简单, 代数求解其余的变量值就变得非常容易了。

为证明上述, 我们给初始基可行解中的每一个基变量设定一个等式

$$x_{31}: 19 = u_3 + v_1, \text{ 设 } u_3 = 0, \text{ 于是 } v_1 = 19,$$

$$x_{32}: 19 = u_3 + v_2, \quad v_2 = 19,$$

$$x_{34}: 23 = u_3 + v_4, \quad v_4 = 23,$$

$$x_{21}: 14 = u_2 + v_1, \text{ 已知 } v_1 = 19, \text{ 于是 } u_2 = -5,$$

$$x_{23}: 13 = u_2 + v_3, \text{ 已知 } u_2 = -5, \text{ 于是 } v_3 = 18,$$

$$x_{13}: 13 = u_1 + v_3, \text{ 已知 } v_3 = 18, \text{ 于是 } u_1 = -5,$$

$$x_{15}: 17 = u_1 + v_5, \text{ 已知 } u_1 = -5, \text{ 于是 } v_5 = 22,$$

$$x_{45}: 0 = u_4 + v_5, \text{ 已知 } v_5 = 22, \text{ 于是 } u_4 = -22.$$

设 $u_3 = 0$ (因为表 8.19 中第三行拥有的配额数最大, 为 3 个), 根据等式可以逐次得到 v_1, v_2, v_4 的值, 根据求得的这些值可以进一步得到其他为之变量的值 (注意到 u_i 和 v_j 的下标是由哪个 x_{ij} 是当前基础可行解的基变量决定的, 所以每得到一个新的基可行解, 就要改变一次 u_i 和 v_j 的值)。

一旦掌握了这种方法, 读者将会发现解决这类等式问题时可以直接在运输单纯形表上进行而无须把它们写下来。因此, 在表 8.19 中读者可以首先写出 $u_3 = 0$, 然后在其所在行中找出圈定的配额 (x_{31}, x_{32}, x_{34})。对于每个配额, 我们设 $v_j = c_{3j}$, 然后在这些列 (x_{21}) 中寻找圈定的配额 (除了第 3 行)。手工计算 $u_2 = c_{21} - v_1$, 找出 x_{23} , 设 $v_3 = c_{23} - v_2$, 依次类推直到填完了所有的 u_i 和 v_j 的值 (试一下)。然后为每个非基变量 x_{ij} (也就是为

^① 我们期望两个或者更多的等价退化的基可行解 (例如, 相似的解有不同的退化基变量等于 0) 在一些基解满足最优性检验时都是最优的。这个期望将在后面的例子中描述 (见表 8.23 中的后两个简表, 而只有后面那个表满足最优性检验的规则)。

每一个没有圈定配额的单元格)计算 $c_{ij} - u_i - v_j$ 的值,并将其结果填入表格内,最终我们将会完成一个如表 8.20 所示的完整的运输单纯形表。

迭代	销地					供给量	u_i
	1	2	3	4	5		
0							
产地	1	16 +2	16 +2	13 40	22 +4	17 10	50 -5
	2	14 30	14 0	13 30	19 +1	15 -2	60 -5
	3	19 0	19 20	20 +2	23 30	M M-22	50 0
	4(D)	M M+3	0 +3	M M+4	0 -1	0 50	50 -22
需求量	30	20	70	30	60	Z=2 570	
v_j	19	19	18	23	22		

现在我们要通过检验表 8.20 中给出的 $c_{ij} - u_i - v_j$ 的值来进行最优性检验。因为这些值中有两个($c_{25} - u_2 - v_5 = -2$ 和 $c_{44} - u_4 - v_4 = -1$)是负值,可以得出此初始基可行解不是最优的。因此,运输单纯形法还需进一步的迭代以找到一个更好的基可行解。

一次迭代过程

对于一个完整的单纯形法,改进版本的迭代必须确定入基变量(第 1 步)、出基变量(第 2 步),最后定义所得的新的基可行解(第 3 步)。

第 1 步,确定入基变量

因为 $c_{ij} - u_i - v_j$ 代表当非基变量 x_{ij} 增加时目标函数变化的大小,入基变量 $c_{ij} - u_i - v_j$ 值应该是负值以减少总成本 Z 。由表 8.20 可知,该入基变量的备选变量为 x_{25} 和 x_{44} ,选择 $c_{ij} - u_i - v_j$ 的绝对值最大的变量作为入基变量,可知该例子中入基变量为 x_{25} 。

第 2 步,确定出基变量

在满足供需约束的条件下,从设入基变量为 0 开始不断增加其值,这将引起其他基变量值的一系列变化,其他基变量中首先减小到 0 的变量将作为出基变量。

已知 x_{25} 是第一个人基变量,换入后表 8.20 发生的一系列的变化将简略表示在表 8.21 中(我们将在入基变量所在的单元格内用一个中间有一个加号的方框表示,并将其相应的 $c_{ij} - u_i - v_j$ 值写在该单元格的右下角)。增加 x_{25} 的值并同时减少 x_{15} 一个同样的值以确保第 5 列中的需求量仍然为 60。同理还将 x_{13} 增加一个同样的值以确保第 1 行的供应量仍为 50,将 x_{23} 减小该值以确保第 3 列的需求量仍为 70。 x_{23} 的减少就这样成功地完成了因为变化后第 2 行的供应量仍为 60(同样,我们也可以通过减少 x_{23} 的值重新分配第 2 行中的供给开始连锁反应,然后连锁反应将增加 x_{13} 的值并减少 x_{15} 的值)。

表 8.21 增加入基变量 x_{25} 引起连锁反应后导致初始运输单纯形表变化简图

	销 地			供给量	
	3	4	5		
产地 1	...	13	22	17	50
		(40) +	+4	(10) -	
产地 2	...	13	19	15	60
		(30) -	+1	+ -2	
需求量		70	30	60	

画图结果表明,单元格(2,5)和(1,3)为接收单元格(recipient cells),它们分别从施与单元格(donor cells)(1,5)和(2,3)那里得到了附加的配额(这些单元格在表 8.21 中已分别用加号和减号表示出来了)。注意,单元格(1,5)而不是(4,5)为第 5 列的施与单元格,因为单元格(4,5)在第 4 行中已经没有接受单元格来继续连锁反应[同样,如果从第 2 行开始连锁反应的话,单元格(2,1)不可能成为该行的施与单元格,因为下一步只能选择(3,1)作为接收单元格,而接下来单元格(3,2)或(3,4)都不能成为其施与单元格]。注意,除了入基变量,所有连锁反应中涉及的接收单元格和施与单元格都对应着当前基可行解的基变量。

每个施与单元格配额减少的数量与对应的换入基的单元格(包括入基变量所在的单元格)增加的数量完全相等,因此,最小的基变量将作为第一个施与单元格,本例中单元格(1,5)(由表 8.21 可知 $10 < 30$)应该随着入基变量 x_{25} 的增加量首先达到 0。因此, x_{15} 成为出基变量。

一般来说,在入基变量从 0 开始增加时,总会有恰好一个连锁反应(在任一方向)成功地完成并保持灵活性。这个连锁反应可以从含有基变量的单元格中选择:首先在入基变量所在列中选择施与单元格,然后在施与单元格所在的行中选择接收单元格,以此类推直到入基变量所在行中有一个施与单元格为止。当一行或一列中有多于一个基变量时,可以先尝试用每一个来选定施与或接收单元格(最终只会有一个单元格没有附加基变量单元格的行或列符合要求)。在连锁反应确定以后,含有最小基变量的施与单元格将自动提供出基变量(若同时有两个施与单元格含有相同的最小基变量,任取一个作为出基变量即可)。

第 3 步,确定新的基可行解

我们将通过为每个接收单元格加上入基变量(在一切变换之前)的值,并同时减去每个施与单元格相对应的值,来获得新的基可行解。表 8.21 中出基变量 x_{15} 的值为 10,为寻找新的基可行解,运输单纯形表中其他值的变化情况如表 8.22 所示(因为 x_{15} 在新的基可行解中是非基变量,它的新配额“0”将不显示在这个新表中)。

表 8.22 显示基可行解变化的运输单纯形表的部分图示

	销 地			供给量	
	3	4	5		
产地 1	...	13 (50)	22	17	50
产地 2	...	13 (20)	19	15 (10)	60
需求量		70	30	60	

下面我们解释一下在最优性检验中 $c_{ij} - u_i - v_j$ 值的变化情况。因为 10 单位的配额从施与单元格转移到了接收单元格(如表 8.21 和表 8.22 所示),总成本的变化为

$$\Delta Z = 10(15 - 17 + 13 - 13) = 10(-2) = 10(c_{25} - u_2 - v_5)$$

因此,从 0 开始增加入基变量 x_{25} 的作用引起了每增加 1 单位 x_{25} 会导致总成本降低 2 单位的变化。这正是表 8.20 中 $c_{25} - u_2 - v_5 = -2$ 的意义所在。实际上,另一个获得每个非基变量 x_{ij} 的 $c_{ij} - u_i - v_j$ 的方法(该方法不如上述方法有效)是先将入基变量从 0 增加到 1 然后计算总成本的变化。这个直观的解释可以在最优性检验的过程中验证计算是否正确。

在解决完 Metro Water District 问题之前,我们先来总结运输单纯形法的规则。

运输单纯形法小结

初始化:通过前一部分列出的步骤创建一个初始的基可行解。对之进行最优性检验。

最优性检验:从配额量最大的行中选定 u_i 和 v_j ,设 $u_i = 0$,然后为每个基变量 x_{ij} 的下标 (i, j) 求解方程组 $c_{ij} = u_i + v_j$,如果每个非基变量 x_{ij} 的下标 (i, j) 都有 $c_{ij} - u_i - v_j \geq 0$,则此时的解是最优解,停止计算,否则进行下面的迭代。

迭代:

1. 确定入基变量:选择 $c_{ij} - u_i - v_j$ 的值为负值且绝对值最大值所对应的非基变量 x_{ij} 。

2. 确定出基变量:定义能确保入基变量增加时整个连锁变化都可行的连锁反应。从所有施与单元格中选择基变量值最小的单元格。

3. 确定新的基可行解:为每一个接收单元格加上和换出变量等值的配额。为每一个施与单元格减去相应的配额。

将上述步骤应用于 Metro Water District 问题时,将会得到如表 8.23 所示的完整的运输单纯形法简表。因为第 4 个简表中所有的 $c_{ij} - u_i - v_j$ 值都是非负的,由最优性检验可知这个简表中的配额是最优的,这与计算所得的结果一致。

表 8.23 Metro Water District 问题运输单纯形表概览

迭代 0		销地					供给量	u_i		
		1	2	3	4	5				
产地	1	16	16	13	22	17	50	-5		
		+2	+2	40+	+4	10-				
	2	14	14	13	19	15			60	-5
		30	0	30-	+1	+				
3	19	19	20	23	M	50	0			
	0	20	+2	30	M-22					
4(D)	M	0	M	0	0			50	-22	
	M+3	+3	M+4	-1	50					
需求量	30	20	70	30	60	Z=2 570				
v_j	19	19	18	23	22					
迭代 1		销地					供给量	u_i		
		1	2	3	4	5				
产地	1	16	16	13	22	17	50	-5		
		+2	+2	50	+4	+2				
	2	14	14	13	19	15			60	-5
		30-	0	20	+1	10+				
3	19	19	20	23	M	50	0			
	0+	20	+2	30-	M-20					
4(D)	M	0	M	0	0			50	-20	
	M+1	+1	M+2	+	50-					-3
需求量	30	20	70	30	60	Z=2 550				
v_j	19	19	18	23	20					
迭代 2		销地					供给量	u_i		
		1	2	3	4	5				
产地	1	16	16	13	22	17	50	-8		
		+5	+5	50	+7	+2				
	2	14	14	13	19	15			60	-8
		+3	+3	20-	+4	40+				
3	19	19	20	23	M	50	0			
	30	20	+	0-	M-23					
4(D)	M	0	M	0	0			50	-23	
	M+4	+4	M+2	30+	20-					
需求量	30	20	70	30	60	Z=2 460				
v_j	19	19	21	23	23					

续表

迭 代 3	销 地					供给量	u_i	
	1	2	3	4	5			
产地	1	16 +4	16 +4	13 (50)	22 +7	17 +2	50	-7
	2	14 +2	14 +2	13 (20)	19 +4	15 (40)	60	-7
	3	19 (30)	19 (20)	20 (0)	23 +1	M M-22	50	0
	4(D)	M M+3	0 +3	M M+2	0 (30)	0 (20)	50	-22
需求量	30	20	70	30	60	Z=2 460		
v_j	19	19	20	22	22			

读者可以练习一下第二、第三和第四个表格导出的 u_i 和 v_j 的值,该练习可以直接在简表上进行,也可以检验一下第二和第三个简表中的连锁反应,不过其过程可能比表 8.21 中所示的复杂。

本例的特征

注意到这个例子的描述中有三个特殊点。首先,初始的基可行解是退化解,因为基变量 $x_{31} = 0$ 。不过这个退化的基解并没有使问题复杂化。因为在第二个简表中单元格 (3,1) 为接收单元格,它使 x_{31} 增加为一个比 0 更大的值。

其次,第三个简表中产生了另一个退化的基解 x_{34} ,因为在第二个简表中,施与单元格 (2,1) 和 (3,4) 中的基变量具有相同的最小值 30(我们可以任取 x_{21} 作为出基变量,如果选择 x_{34} ,则 x_{21} 将成为退化的基变量)。这个退化的基变量引起了一个难题,因为在第三个简表中,单元格 (3,4) 成为施与单元格却没有配额可以施与。不过这一点并无大碍,因为提供 0 个单位的配额给接收单元格,各个单元格均未发生变化。然而,这个退化的基变量最终成为出基变量,所以它在第四个表格中被人基变量代替。这个基变量集合中元素的变化改变了 u_i 和 v_j 的值。因此,如果第四个简表中任有一个 $c_{ij} - u_i - v_j$ 的值为负,即算术配额均会发生变化(每当所有的施与单元格都有非退化的基变量时)。

最后,因为第四个表格中没有一个 $c_{ij} - u_i - v_j$ 的值为负值,第三个表格中的配额为最优值。因此,算法比必要的多执行了一次迭代。这个附加的迭代是个缺陷,因为它的退化同时出现在运输单纯形法和单纯形法中,导致了算法的不完美。

下面我们给出了另外两个应用运输单纯形法的例子(小例子)。一个是在 OR Tutor 中提供的对运输单纯形法的描述,另一个是 IOR Tutorial 中提供的运输单纯形法的一个交互程序和一个自动程序。

既然已经学过了运输单纯形法,读者接下来要做的就是检验这种算法能否证明章节 8.1 中的整数解特性部分。习题 8.2-20 将为读者的推理提供帮助。



8.3 指派问题

指派问题是一类特殊的线性规划问题,旨在给不同的指派对象指派任务。如指派对象可能是需要被分配任务的员工。把人指派到工作中是指派问题的一个通常的应用。^①不过指派对象不一定是人,也可以指机器、车辆、车间甚至时间段。下面的第一个例子即是涉及将机器指派到相应的位置,所以这个例子中的指派对象是机器。另一个例子是将产品生产任务指派给不同的车间。

为了与指派问题的定义一致,这类应用一般应符合下列假设条件:

1. 指派对象的数目和任务的数目应该是一致的(一般设为 n)。
2. 每个指派对象只被指派一项任务。
3. 每项任务只能被一个指派对象执行。
4. 指派对象 $i(i=1,2,\dots,n)$ 执行任务 $j(j=1,2,\dots,n)$ 所需的成本为 c_{ij} 。
5. 指派问题的目标是确定如何分配 n 项任务,并使完成任务的总成本最小。

任何满足上述假设条件的问题都可以应用专门为指派问题设计的算法而得到有效的解决。

必须严格遵守前三个假设条件。许多实际的应用并不是完全满足上面这些假设。不过通常我们可以重构问题,使其满足上述假设。例如我们可以利用虚拟的指派对象或虚拟的任务来达到此目的。我们将用一些例子来详细描述这些技巧。

范例

Job Shop 公司购买了三种不同型号的新机器。车间里有 4 个可选的位置来安置这些机器。这些位置中有些非常适合安放特定类型的机器,因为它们非常接近工作中心,具有频繁的输入输出流(新机器之间没有 workflow)。问题的目标是将新机器指派到可选的位置上而使处理材料的费用最小。表 8.24 中列出了每个位置上安放不同的机器可能产生的处理材料的成本(单位为美元/时)。机器 2 不允许安放到位置 2 上,因此,在本例中没有列出相应的成本。

美元

表 8.24 Job Shop 公司的材料处理成本数据

		位 置			
		1	2	3	4
机器	1	13	16	12	11
	2	15	—	13	20
	3	5	7	10	6

^① 例如,见 L. J. LeBlanc, D. Randels, Jf. 和 T. K. Swann, "Heery International's Spreadsheet Optimization Model for Assignment Managers to Construction Projects," *Interfaces*, 30(6): 95-106, Nov. -Dec. 2000. 这篇文章的第 98 页也引用了其中其他 7 种指派问题的应用。

为将此问题转化为标准的指派问题,我们必须为多余的一个位置引入一个虚拟的机器。此外,将机器 2 安置在位置 2 的成本设为极大值 M 以将之排除在最优方案之外,最终的指派任务成本如表 8.25 所示。这个成本表包含了解决这个问题的所有必要数据。可知此问题的最优方案为将机器 1 安置在位置 4,机器 2 至位置 3,机器 3 至位置 1,总成本为 29 美元/小时。虚拟的机器被指派到位置 2,将来该位置还可以用于安放其他机器。

美元

		任务(位置)			
		1	2	3	4
指派(机器)	1	13	16	12	11
	2	15	M	13	20
	3	5	7	10	6
	4(D)	0	0	0	0

我们将在介绍指派问题的模型之后讨论如何求解上述问题。

指派问题模型

指派问题的数学模型将用到下述决策变量:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{如果指派对象 } i \text{ 执行任务 } j \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

其中, $i=1,2,\dots,n$; $j=1,2,\dots,n$ 。因此, x_{ij} 是一个二元变量(值为 0 或 1)。正如整数规划一章(第 11 章)所详细描述的那样,二元变量在运筹学中表示是/非决策时非常重要。在这个例子中,是/非决策是:指派对象是否应该执行任务 j ?

假设 Z 为总成本,指派任务模型为

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ & \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

且 $x_{ij} \geq 0$, x_{ij} 为二元变量,其中 $i=1,2,\dots,n$; $j=1,2,\dots,n$ 。

第一个函数约束集是指每个指派对象只能执行一项任务,而第二个函数约束集是指每项任务只能被一个指派对象完成。如果略去附加约束 x_{ij} 是二元变量,模型显然是一个特殊的线性规划问题,可以很容易地被解出来。幸运的是,我们可以删掉这个约束,原因将在下面说明(之所以可以略去不管是因为指派问题在本章中出现而不是在整数规划一章)。

现在来比较这个模型(没有二元变量约束)和 8.1 节(包括表 8.6)的第三部分讲的运输问题模型,可以看出两种模型非常相似。实际上,指派问题也是一种特殊类型的运输问

题,只不过产地是指派对象,而销地是任务,并且

产地的数量 $m =$ 销地的数量 n ,

每个供给量 $s_i = 1$,

每个需求量 $d_j = 1$ 。

现在我们来关注一下运输问题模型中的整数解特性。因为此时的 s_i 和 d_j 都是整数 ($=1$),这个特性是指每一个可行解(包括最优解)对于指派问题都是整数解。指派问题模型的函数约束使每个变量的值都小于 1,非负约束条件使每个变量的值都大于 0。因此,通过删除二元变量约束,我们可以应用求解线性规划问题的方法来解决指派问题,而最终的可行解(包括最优解)自然会满足二元变量约束。

正如运输问题可以用网络图描述一样(见图 8.3),指派问题也可以用一个近似的方式描述,如图 8.5 所示。第一列列出 n 个指派对象,第二列列出 n 个任务。方括弧中的每一个数代表网络图中某个位置可以提供的指派对象数,所以左边的数自然为 1,而右边的数 -1 表示每项任务需要一个指派对象来完成。

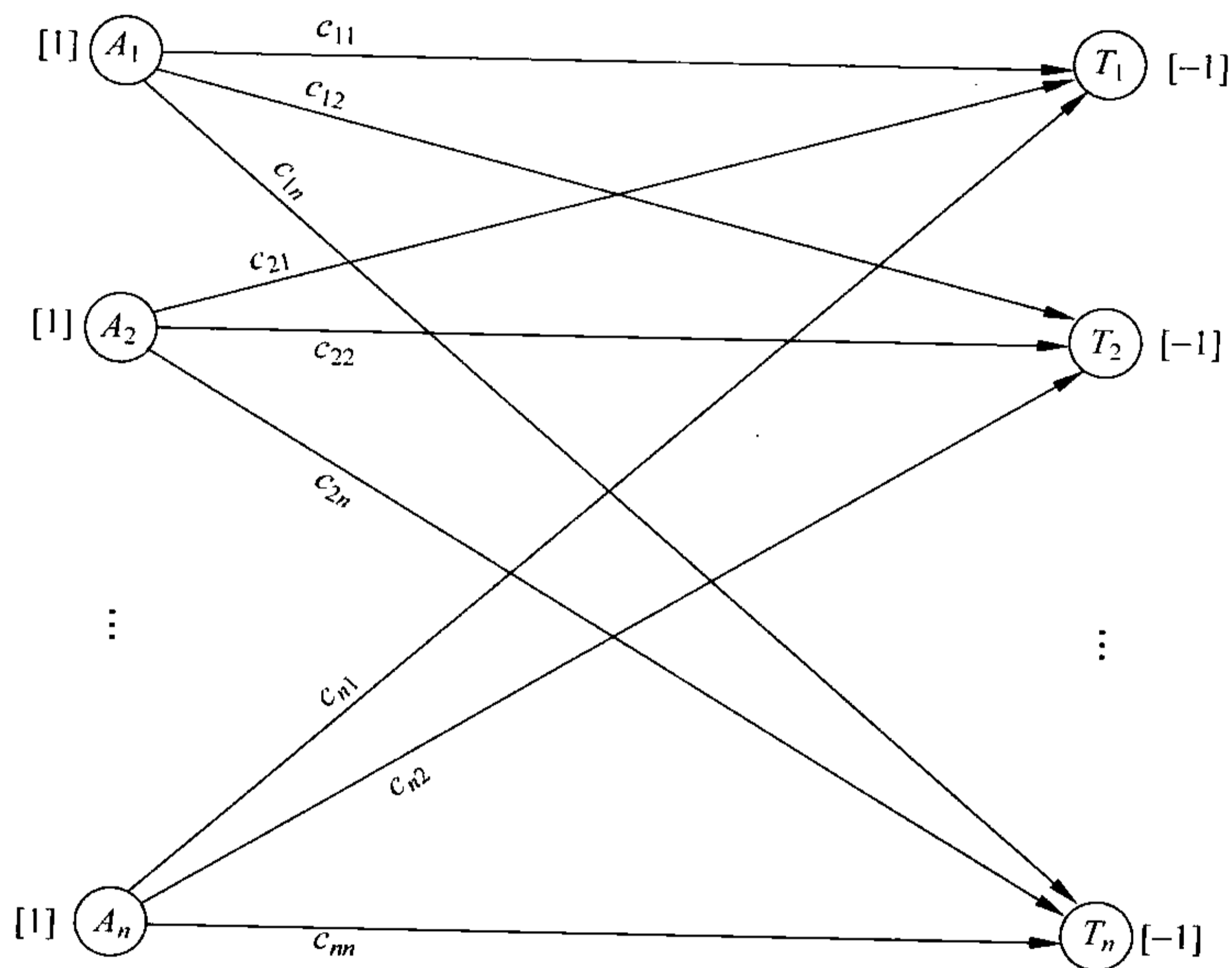


图 8.5 指派问题的网络图

对于每个特定的指派问题,人们一般不会列出整个数学模型。通过填写一个成本表可以将此问题简化(例如,表 8.25 中所示),表中包含了指派对象和任务,可以在一个很小的空间表示出所有的基础数据。

有些问题通常不太符合指派问题模型,比如某些指派对象可能会被指派完成多于一项任务。在这种情况下,我们可以将指派对象分解为多个相同的指派对象,使每个指派对象只对应一项任务(表 8.29 中通过一个例子说明了这个问题)。同理,如果一项任务被多个指派对象完成,那么这项任务可以被分解为多个相同的任务来使指派对象和任务数一一对应。

指派问题的求解步骤

解决指派问题时还有其他一些方法。但对于多数问题规模不比 Job Shop 公司大的例子,用单纯形法可以快速地解决,直接应用提供单纯形法的软件包(如 Excel 及其 Solver)来解决这种问题会很方便。如果用这种方法来解决 Job Shop 公司的问题,就无须在表 8.25 中增加虚拟的机器以满足标准的指派问题模型。对每个地点指派的机器数量的约束条件就可以表示为

$$\sum_{i=1}^3 x_{ij} \leq 1 \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

正如本章的 Excel 文件所示,这个问题的电子表格表示形式与图 8.4 中运输问题的表示形式非常接近,不同的是所有的供给和需求都是 1,并且需求的约束条件是 ≤ 1 而不是 $= 1$ 。

然而,复杂的指派问题用更专门的方法能解决得更快一些,所以我们建议不要用单纯形法解决复杂的指派问题。

由于指派问题是特殊的运输问题,因此解决指派问题的一种方便且相对迅速的方法就是运用 8.2 节中讲述的运输单纯形法。这种方法需要将成本参数表格转换为相应运输问题的参数表格,如表 8.26(a)所示。

表 8.26 指派问题转化为运输问题时的参数表——以 Job Shop 公司为例

(a) 一般案例						(b) Job Shop 公司案例							
	每单位的分销成本				供给量		每单位的分销成本				供给量		
	销地						销地(位置)						
	1	2	...	n			1	2	3	4			
产地	1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	1	1	13	16	12	11	1	
	2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	1	产地	2	15	M	13	20	1
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		(机器)	3	5	7	10	6	1
	$m=n$	c_{n1}	c_{n2}	...	c_{nm}	1		4(D)	0	0	0	0	1
需求量		1	1	...	1		需求量		1	1	1	1	

例如,表 8.26(b)中展示了 Job Shop 公司问题的参数,此表来自表 8.5 中的成本表。当运用运输单纯形法来求解这个运输问题时,得到的最满意解如下: $x_{13} = 0, x_{14} = 1, x_{23} = 1, x_{31} = 1, x_{41} = 0, x_{42} = 1, x_{43} = 0$ (读者可以在习题 8.3-6 中对这个解进行证明)。退化的基本变量($x_{ij} = 0$)和虚拟机器的配额($x_{42} = 1$)对于原始问题来说没有任何意义,所以真正的指派结果是机器 1 到位置 4,机器 2 到位置 3,机器 3 到位置 1。

利用运输单纯形法求出的最优解中有许多退化的基变量并不是巧合。对于任何有 n 个任务的指派问题来说,在表 8.26(a)中的运输问题的公式中都有 $m = n$,也就是说,产地的数量 m 和销地的数量 n 与需要完成的任务量 n 相等。运输问题通常具有 $m + n - 1$ 个基变量(配额),因此这种特殊类型的运输问题的每一个基可行解中都含有 $(2n - 1)$ 个基变量,并且这其中只有且仅有 n 个 x_{ij} 等于 1(对应于 n 个指派)。因此,由于所有的变量都是二进制变量,总存在 $(n - 1)$ 个退化的基本变量($x_{ij} = 0$)。正如第 8.2 节末所讨论的,退化

的基本变量在算法的实施过程中不会引起太大的麻烦,然而,它们经常会引起不必要的重复计算。这些重复计算不会影响指派结果,只会影响到对相应于退化的基本解而不是非基本解的零指派量的表示。当总是存在许多退化的基本变量时,如果应用单纯形法来解题的话,这些多余的重复计算就变成一个很严重的缺陷了。

运输问题单纯形法的另一个缺点是它试图利用一个一般目的的算法解决所有的运输问题。因此,在这种特殊类型的运输问题中($m=n$,每个 $s_i=1$,每个 $d_j=1$),它没有开发出相应的简便算法。幸运的是,专门的计算方法已经研发出来了,能够更加高效率地解决指派问题。这些算法直接在成本表格上操作,而不会涉及退化的基本变量。一旦获得了这些算法的程序,它就可以很简便地替代运输单纯形法,尤其在指派问题的规模相当大时,这个算法的优势就更加明显了。^①

第 8.4 节将介绍专门解决指派问题的十分有效的算法之一(称为匈牙利算法)。

IOR Tutorial 中包括应用这种算法的一个交互程序和一个自动程序。

例 给不同的工厂分配产品问题

Better Products 公司决定利用具有剩余生产能力的三家工厂生产四种新产品。生产每单位产品都需要消耗工厂的生产能力,因此工厂的可用生产能力由每天可生产的产品数量来表示,并在表 8.27 最右侧的一列给出。表中最下面一行给出了每种产品为满足计划销售量的日生产率。除了工厂 2 不能生产产品 3 外,每家工厂都能生产任何产品。然而,正如表 8.27 的主体部分所示,各工厂生产各种产品所消耗的成本不尽相同。

管理者需要决定如何为各工厂分配生产任务,有两个可选的方案。

方案 1: 允许分开生产,即同一种产品可在多家工厂进行生产。

方案 2: 不允许分开生产。

第 2 个方案增加了一个约束条件,这只会增加按表 8.27 求解最优解时的成本。另外,方案 2 的主要优势是它消除了一些与分离产品生产相关联的没有在表 8.27 中反映出来的隐藏成本,包括额外的安装费用、分配费用和管理费用。因此,管理者希望在做出最后决定前对每个方案都进行分析。对于方案 2,管理者进一步指出,每家工厂应至少生产一种产品。

下面我们将分别对这两种方案进行建模和求解,其中把方案 1 看做一个运输问题,把方案 2 看做一个指派问题。

对方案 1 进行建模

在允许将产品分开生产的情况下,表 8.27 可以直接转变为运输问题的求解表格。工厂变成产地,产品变成销地(反之亦然),于是供给为生产能力,需求为产品的生产率。在表 8.27 中只需要做两处修改。首先,由于工厂 2 无法生产产品 3,使工厂 2 生产产品 3 的单位成本为无穷大数 M ,这样就不会为其指派生产任务。其次,总生产能力($75+75+45=195$)超过了总需求产量($20+30+30+40=120$),因此需设置一个虚拟的、需求量为 75 的销地来平衡两个总量。得到的参数表格见表 8.28。

^① 见一篇比较运输问题的各种算法的文章: J. L. Kennington and Z. Wang, "An Empirical Analysis of the Dense Assignment Problem: Sequential and Parallel Implementations", *ORSA Journal on Computing*, 3: 299-306, 1991。

表 8.27 Better Products 公司的数据表格

		每产品的单位成本/美元				生产能力
		1	2	3	4	
工厂	1	41	27	28	24	75
	2	40	29	—	23	75
	3	37	30	27	21	45
需求量		20	30	30	40	

表 8.28 Better Products 公司问题按方案 1 求解时作为运输问题的参数表格

		每分销单位的成本/美元					供给量
		销地(产品)					
		1	2	3	4	5(D)	
产地 (工厂)	1	41	27	28	24	0	75
	2	40	29	M	23	0	75
	3	37	30	27	21	0	45
需求量		20	30	30	40	75	

这个运输问题的最优解含有以下基本变量(配额)

$$x_{12} = 30, x_{13} = 30, x_{15} = 15, x_{24} = 15, x_{25} = 60, x_{31} = 20, x_{34} = 25$$

因此,工厂 1 生产全部的产品 2 和产品 3。

工厂 2 生产 37.5% 的产品 4。

工厂 3 生产 62.5% 的产品 4 和全部产品 1。

总成本是 $Z=3\,260$ 美元/天。

对方案 2 进行建模

在不能将产品分开生产的情况下,每种商品只能由一家工厂进行生产。因此,产品生产可以看做指派问题,并把工厂当作任务执行者。

管理者指定每家工厂都应被指派至少一种产品,产品的数目(4)超过工厂的数目(3),因此其中一家工厂要生产 2 种产品,而工厂 3 只有充分生产一种产品的能力(见表 8.27),所以,工厂 1 和工厂 2 中的一家要生产两种产品。

为了在一个指派问题中解决实现一个附加产品的指派任务,可以将工厂 1 和工厂 2 各划分为两个指派者,如表 8.29 所示。

表 8.29 Better Products 公司例子中选择方案 2 时作为指派问题的求解表格

		任务(产品)				
		1	2	3	4	5(D)
指派者 (车间)	1a	820	810	840	960	0
	1b	820	810	840	960	0
	2a	800	870	M	920	0
	2b	800	870	M	920	0
	3	740	900	810	840	M

由于执行者的数量(目前为 5 个)必须与任务的数量(目前为 4 个)相等,表 8.29 中引进了 5(D)作为一个虚拟任务(产品)。这个虚拟任务的作用是为工厂 1 或工厂 2 中的一个提供另一种虚构的产品,不过两家工厂只能接收一种真实的产品。生产虚构的产品不需要成本,因此,通常情况下虚拟任务的生产成本均为零。唯一的例外是表 8.29 最下面一行中 M 的引入。这里之所以为 M 的原因是,工厂 3 必须被指派生产一种真实的产品(从第 1、第 2、第 3、第 4 当中选择一个),无穷大的数 M 可以避免指派给工厂 3 虚构的产品(在表 8.28 中, M 的作用也是为了防止指派工厂 3 生产产品 2,两者都是为了避免不可行的指派)。

表 8.29 中保留的成本数据并不是表 8.27 或表 8.28 中所显示的单位成本。表 8.28 中给出了运输问题的模式(针对方案 1),这时单位成本是很合适的,不过现在我们要按照指派问题的模式进行计算(针对方案 2)。对于指派问题,成本 c_{ij} 是执行者 i 执行第 j 个任务的总成本。在表 8.29 中,工厂 i 生产产品 j 的总成本(每日)是由单位生产成本乘以每日生产的数量得到的,这两项乘数在表 8.27 中是分开显示的。假设工厂 1 生产产品 1,利用对应的表 8.28 中的单位成本(41 美元)和对应的表 8.28 中的需求(每天生产的单位数量)(20 个),我们得出:

$$\begin{aligned} \text{工厂 1 生产 1 单位产品的成本} &= 41 \text{ 美元} \\ \text{产品 1 的每日所需产量} &= 20 \text{ 单位} \\ \text{每日工厂 1 生产产品 1 的总成本} &= 20 \times (41 \text{ 美元}) \\ &= 820 \text{ 美元} \end{aligned}$$

于是 820 美元被作为表 8.29 中 1a 或者 1b 执行任务 1 的成本。

这个指派问题的最优解如下:

工厂 1 生产产品 2 和产品 3。

工厂 2 生产产品 1。

工厂 3 生产产品 4。

虚任务被指派给工厂 2,每天的生产产品的总成本 $Z=3\ 290$ 美元。

通常来说,求最优解的一种方法,就是将表 8.29 中的成本数据表转变为等价的运输问题的表格(见表 8.26),然后应用运输单纯形法求解。由于表 8.29 中有相同数字的行,这种方法可以合理地将 5 个执行者分别组合成资源供给量为 2、2、1 的 3 个产地(参见习题 8.3-5)。这种简化同时为每个基可行解减少了两个退化的基解。因此,即使这种改进后的形式不再适合表 8.26(a)中所示的指派问题的模式,它也是应用运输单纯形法时的一个更有效的模式。

图 8.6 实现的是怎样利用 Excel 及 Solver 得到最优解,最优解显示在变更单元格任务(C19:F21)中。由于使用的是通用的单纯形法,就不需要把问题变换为指派问题模型或者运输问题模型。因此,也不需要把工厂 1 和工厂 2 各分为两个执行者,也不需要增加一个虚任务。取而代之的是,工厂 1 和工厂 2 各被指派了两个任务,然后“ \leq ”符号被输入 H19 和 H20 和相对应的 Solver 对话框的约束条件中。同样,不再需要大 M 方法来禁止在 E20 中格中为工厂指派产品 3,因为对话框中已经包含了约束条件 $E20=0$ 。目标栏中总成本(I24)显示了每天的总成本 3 290 美元。

1	Better Products公司生产计划问题(修正)							
2								
3	单位成本	产品1	产品2	产品3	产品4			
4	工厂1	\$41	\$27	\$28	\$24			
5	工厂2	\$40	\$29	-	\$23			
6	工厂3	\$37	\$30	\$27	\$21			
7								
8	需求产量	20	30	30	40			
9								
10								
11	成本(美元/天)	产品1	产品2	产品3	产品4			
12	工厂1	\$820	\$810	\$840	\$960			
13	工厂2	\$800	\$870	-	\$920			
14	工厂3	\$740	\$900	\$810	\$840			
15								
16								
17						总分		
18	分配	产品1	产品2	产品3	产品4	配量		可供应量
19	工厂1	0	1	1	0	2	≤	2
20	工厂2	1	0	0	0	1	≤	2
21	工厂3	0	0	0	1	1	=	1
22	总分配量	1	1	1	1			
23		=	=	=	=			总成本
24	需求量	1	1	1	1			\$ 3,290

Solver参数

设置目标单元格:

目标等于: Max Min

通过变换单元格:

满足下列约束:

\$E\$20=0
 \$G\$19:\$G\$20<=\$I\$19:\$I\$20
 \$G\$21=\$I\$21
 总分配量=总需求量

	B	C	D	E	F
11	成本(美元/天)	产品1	产品2	产品3	产品4
12	工厂1	=C4*C8	=D4*D8	=E4*E8	=F4*F8
13	工厂2	=C8*C5	=D8*D5	-	=F8*F5
14	工厂3	=C8*C6	=D8*D6	=E8*E6	=F8*F6

Solver选择

假设线性模型

假设非负

	G
17	总和
18	分配
19	=总和(C19:F19)
20	=总和(C20:F20)
21	=总和(C21:F21)

	B	C	D	E	F
22	总分配量	=总和(C19:C21)	=总和(D19:D21)	=总和(E19:E21)	=总和(F19:F21)

列中名称	单元格
分配	C19:F21
成本	C12:F14
需求量	C24:F24
需求产量	C8:F8
可供应量	I19:I21
总分配量	C22:F22
总成本	I24
单位成本	C4:F6

	I
23	总成本
24	=产量(成本, 分配量)之总和

图 8.6 Better Products 公司问题按方案 2 变换成指派问题计算时的电子表格模式。目标单元格是总成本(I24),其他的输出为成本(C12:F14),总指派任务(G19:G21),已指派任务(C22:F22),输入这些单元格的等式在下面给出,变更单元格指派(C19:F21)中的数值 1 显示了用 Solver 求解得到的最优生产计划

现在回过头来比较这种解法与将产品 4 指派给工厂 2 和工厂 3 生产的选择方案 1。两种方法的指派有些差异,但是事实上每天的总成本却是相同的(方案 1 每天 3 260 美元,方案 2 每天 3 290 美元)。然而,在选择方案 1 中的实际算法时还存在与分开生产产品相关联的一些隐藏成本(包括额外组织成本、分配成本和管理成本)。对于所有使用运筹学方法的人来说,所运用的数学模型只能提供一个对整个问题近似的描述,管理者在做出最终决定之前需要对没能归入模型中的因素进行考虑。在这种情况下,管理者在估算了将产品分开生产的弊端之后,决定采用方案 2。



8.4 求解指派问题的特殊算法

在 8.3 节中,我们指出运输单纯形法可以用来解决指派问题,但为解决这种问题专门设计的算法应该更有效率。下面我们将描述解决指派问题的一个典型算法。由于该算法是由匈牙利的数学家发明的,因此我们称之为**匈牙利算法**(Hungarian algorithm)(或称匈牙利方法)。我们将着重介绍该算法的关键思路,而忽略在计算机上实施这种算法所需要的一些细节。

等价成本表的作用

这个算法直接在成本表上进行操作。更准确地说,初始成本表将被变换为一系列的等价成本表,直到等价成本表中出现一个明显的最优解。最终的等价成本表就是由正数和零组成的,我们可以在 0 所在的位置上指派任务。由于总成本不能为负,总成本为零的指派显然是最优的。剩下的问题是如何对原始成本表进行等价变换到这个形式。

进行这种变化是基于这样一个事实:就是我们可以对成本表中任一行、列的元素加上或减去一个常数,而不使实际问题发生变化。也就是说,新的成本表的最优解必须是旧的成本表的最优解,反之亦然。

因此,这个算法的第一步,就是从每一行的元素中减去该行中最小的数。这样新的成本表中的每一行都至少有一个零值。如果这时的表中含有不包含零值的列,那么下一步就要从这些不含零值的列中减去该列中最小的数,构造另一个新表^①。这时新的等价成本表中任一行、列都含有零值。如果这些零值构成一个完整指派序列,那么这个指派序列则是问题的最优解。

举例说明,见表 8.25 中给出的 Job Shop 公司问题的成本表。为了将这个成本表转化为等价的成本表,假设我们先在第一行每个元素中减去 11,然后以每一行中减去该行中最小的元素,得到

	1	2	3	4
1	2	5	1	0
2	15	<i>M</i>	13	20
3	5	7	10	6
4(D)	0	0	0	0

因为任何可行解在第一行都必须恰好有一个指派,因此新表得出的总成本一定刚好比旧表的总成本小 11。因此,使其中一个表的总成本最小的方法同样会使另一个表的总成本最小。

我们注意到,初始成本表前三行均严格为正,新表的第一行有一个零元素。因为我们的目的就是得到足够的零元素来形成一个完整的指派方案,所以这个变换过程还要在其他行和列进行。为了避免出现负值,被减数应该是每行或每列中最小的元素值。对第

^① 每行和每列实际上可以以任意顺序进行变换,但是先从行变换开始,然后再进行列变换提供了执行这个算法的一个系统方法。

2 行和第 3 行重复这个步骤,得到下面的表格。

	1	2	3	4
1	2	5	1	0
2	2	M	0	7
3	0	2	5	1
4(D)	0	0	0	0

这个成本表具有一个完整指派方案所需要的全部的零值。四个方框意味着四个指派构成了一个最优解(正如 8.3 节中为这个问题所声明的那样)。最优解的总成本在表 8.25 中可见,为 $Z=29$,这正是从第 1、第 2、第 3 行削减下来的值的总和。

然而最优解并不总是这么容易就能得到,现在我们来查看表 8.29 中 Better Products 公司在选择方案 2 时的指派问题。

因为这个问题的成本表中除了最后一行,其他每行都有零元素。假设我们对这个表进行等价变换,首先从每列元素中减去该列的最小元素,结果如下表所示。

	1	2	3	4	5(D)
1a	80	0	30	120	0
1b	80	0	30	120	0
2a	60	60	M	80	0
2b	60	60	M	80	0
3	0	90	0	0	M

现在,每一行或一列都含有至少一个零元素,但是由零元素构成的一个完整的指派方案却不是可行的。实际上,最多只有 3 个位置能够由零元素形成指派方案(试一下)。因此,为了解决这一问题,我们必须提出新的想法来完成问题的求解过程,而这对于前一个例子实际上是不需要的。

额外零元素的生成

这个想法就是在不产生负值的情况下增加额外的零元素。我们现在不是从单一的一行或一列减去一个常数,而是从行和列结合的角度考虑减去或增加一个常数值,以产生新的零值。

这个方法首先要在成本表中画一系列的横线或者竖线,去覆盖所有的零值,而且直线的数量越少越好,如下图所示。

	1	2	3	4	5(D)
1a	80	0	30	120	0
1b	80	0	30	120	0
2a	60	60	M	80	0
2b	60	60	M	80	0
3	0	90	0	0	M

我们可以发现没被划掉的数中的最小值是第三列上面的两个数 30,因此,从表中每个元素中都减掉 30,如从每行或每列中都减掉 30,这两个位置就会变成零。为了保持以

前的零值,并且不产生负值,我们在被直线覆盖的行和列——第3行、第2列和第5(D)列上再加上30。这样操作之后得到下表。

	1	2	3	4	5(D)
1a	50	0	0	90	0
1b	50	0	0	90	0
2a	30	60	M	50	0
2b	30	60	M	50	0
3	0	120	0	0	M

得到这个成本表的一个简便做法就是从没被划线的位置各减掉30,然后在有两条线交叉的位置加上30。

我们注意到第1列和第4列只有一个零值并且它们都在第3行,因此,现在可以在零元素的位置上设定4个任务而不是5个(试一下)。所以,我们重复前面的步骤,此时覆盖所有零元素需要4条直线(与分配的最大数量一样多)。方法见下表。

	1	2	3	4	5(D)
1a	50	0	0	90	0
1b	50	0	0	90	0
2a	30	60	M	50	0
2b	30	60	M	50	0
3	0	120	0	0	M

没被划掉的数当中最小的又是30,而且出现在2a和2b行的第一个位置。所以,我们在每个没被划掉的位置减去30,在被划掉2次的位置加上30(M除外),得到下表。

	1	2	3	4	5(D)
1a	50	□0	0	90	30
1b	50	0	□0	90	30
2a	□0	30	M	20	0
2b	0	30	M	20	□0
3	0	120	0	□0	M

这个表格实际上有好几种在零元素位置上制订指派方案的方法(几个最优解),包括用5个方框所示的指派方案。由表8.29可知最后的总成本为

$$Z = 810 + 840 + 800 + 0 + 840 = 3290$$

我们到现在已经说明了匈牙利算法的整个过程,现总结如下。

匈牙利算法小结

1. 从每行中所有元素上减掉这一行中的最小元素(称为行削减),其结果形成一张新表。
2. 从新表的每一列中减去这一列的最小元素(称为列削减),其结果形成另一张新表。
3. 检查是否可以得出最优解。可以通过计算覆盖所有零值所需的最少直线数目来判断。如果直线的数量等于行的数量,则可能得到最优解。这时转步骤6,否则转步骤4。
4. 如果直线的数量小于行的数量,按照以下方法进行调整。

- a. 从未被直线覆盖的数字中挑出最小的数,用所有未被覆盖的数字减掉这个最小的数。
- b. 将这个最小的数加上每一个交叉点上被覆盖的行的数目。
- c. 被划掉但是不实在划掉的行的交叉点上的数保持不变,直接放到下一个表中。
5. 重复第3、第4步直到出现一个可行的最优解。
6. 在零元素的位置上一个一个地进行指派。从只有一个零元素的行或列开始。因为每一行或每一列都需要恰好进行一次指派,在制订一个指派方案之后,把其所在的行和列都划掉。然后在没被划掉的行和列中再进行指派,当然还要优先考虑只有一个零元素的行和列,这样继续下去,直到所有的行和列都被指派到一个任务,都被划掉为止。



8.5 结论

线性规划模型能够解决大量各种类型的问题,其中一般单纯形法是一种强有力的方法,可以解决这些问题中的很大部分。不过其中一些问题可以用简单的公式表示,利用它们特殊的结构就可以应用改进的算法很容易地求解出来。这种改进算法可以减少在计算机上计算这些问题的大量时间,甚至可以使很多复杂的问题得以有效解决。本章中所研究的两类线性规划问题,运输问题和指派问题便是很好的例子。这两种问题都有较为普遍的应用,因此,在它们出现时能够被正确地识别,应用最优的解决算法求解是非常重要的。许多线性规划软件包中都包含这些算法。

在9.6节我们将重新审视运输问题和指派问题的特殊结构。那时我们将会看到这些问题是最小成本流问题(一种特殊类型的线性规划问题)的一种具体情况。最小成本流问题是指通过一个网络图来最小化流上各货物的总成本。单纯形法的改进版本——网络单纯形法(见9.7节)被广泛用于解决这类问题及其各种特例。

专家们正在继续为各种特殊类型的线性规划问题(包括许多没有在此提到的问题)研究改造了的单纯形法。同时,人们还饶有兴趣地将这些线性规划问题用于各种复杂的大型系统的最优化操作问题。不同的问题通常会呈现一些特殊的结构,因此正确识别并且利用这些特殊结构是成功应用线性规划解决问题的重要因素。

参考文献

1. Dantzig, G. B., and M. N. Thapa: *Linear Programming 1: Introduction*, Springer, New York, 1997, chap. 8.
2. Hall, R. W.: *Handbook of Transportation Science*, 2nd ed., Kluwer Academic Publishers (now Springer), Boston, 2003.
3. Hillier, F. S., and M. S. Hillier: *Introduction to Management Science: A Modeling and Case Studies Approach with Spreadsheets*, 3rd ed., McGraw-Hill/Irwin, Burr Ridge, IL, 2008, chap. 15.

习题

一些习题左边的符号有下列意义:
D: 可以参考上述所示的例子。

- I: 建议使用 IOR Tutorial 中的相关程序(程序中还将记录你的成绩)。
 C: 使用各种可能得到的计算机软件解决这个问题(或听从指导老师意见)。
 习题前有星号表示书后至少给出该题的一部分答案。

8.1-1 阅读 8.1 节应用案例概述并在其参考文献中详细描述运筹学研究。概要叙述运输问题的模型是如何在该项研究中应用的,然后列出该项研究带来的各类财务与非财务的效益。

8.1-2 Childfair 公司有 3 个工厂生产儿童手推车并运往 4 个分销中心。工厂 1、工厂 2、工厂 3 每月分别生产 12 单位、17 单位、11 单位货物,每个工厂到各个分销中心的距离如下图所示,每单位货物一英里的货运成本是 100.5 美元。

		距离/英里			
		分销中心			
		1	2	3	4
工厂	1	800	1 300	400	700
	2	1 100	1 400	600	1 000
	3	600	1 200	800	900

怎样指派从每个车间到每个分销中心的货物量可以使总的运输成本最小?

- (a) 用公式表达该运输问题并创建该问题的参数表。
 (b) 画出该问题的网络图。
 (c) 求出最优解。

8.1-3* 汤姆准备今天购买 3 品脱家庭酿造的酒,明天购买 4 品脱。迪克打算今明两天总共售出 5 品脱的该酒,且今天的售价是每品脱 3 美元,明天的售价是每品脱 2.7 美元。哈利打算今明两天总共售出 4 品脱的酒,且今天的售价是每品脱 2.9 美元,明天的售价是每品脱 2.8 美元。

汤姆想知道如何购买可以在满足自身需求的情况下使总成本最小。

- (a) 写出该问题的线性规划模型,并创建其初始的单纯形表。
 (b) 用公式表达该运输问题并创建其参数表。
 (c) 求出最优解。

8.1-4 Versatech 公司决定生产 3 种新产品。5 个分工厂可以生产这 3 种产品。第 1 种产品在这 5 个分工厂的单位制造成本分别是 31 美元、29 美元、32 美元、28 美元和 29 美元。第 2 种产品的单位制造成本分别是 45 美元、41 美元、46 美元、42 美元和 43 美元,第 3 种产品在前 3 个分工厂的单位制造成本分别是 38 美元、35 美元和 40 美元,而不能在第 4 和第 5 个分工厂生产。预计每天可以销售产品 1、产品 2、产品 3 分别为 700 美元、1 000 美元、900 美元。5 个工厂每天的产量分别为 400 美元、600 美元、400 美元、600 美元、1 000 美元,产品种类不限。假设每个工厂可以在生产能力范围内生产任意数量的某种产品或产品的组合。管理者想知道如何指派各个工厂生产产品能够使总的生产成本最小。

(a) 用公式表达该运输问题并创建其参数表。

C(b) 求出最优解。

C8.1-5 重新考虑 8.1 节中的 P&T 公司的问题。我们了解到在运输之前表 8.2 中的每单位产品的运输费用会发生细微的变化。

用 Excel 方法做出该问题的灵敏度报告。利用这个报告确定为保持最优每单位成本允许的变动范围。我们可以从这些范围中得到哪些信息？

8.1-6 Onenote 公司在 3 个工厂为 4 个客户生产某种产品。3 个工厂在下一个时间段分别可以生产 60 单位、80 单位、40 单位产品。公司已经分别与客户 1 签订了 40 单位的销售合同，与客户 2 签订了 60 单位，与客户 3 签订了至少 20 单位的销售合同。客户 3 和客户 4 愿意尽量购买更多的剩余的产品。将每单位产品从工厂 i 运送给客户 j 的净收益如下表所示。

		美元			
		顾 客			
		1	2	3	4
工厂	1	800	700	500	200
	2	500	200	100	300
	3	600	400	300	500

管理者想知道分别出售给客户 3 和 4 多少产品，以及如何从哪个工厂运送它们可以获得最多的利润。

(a) 用公式表达该运输问题，目标函数是最大化总收益，创建每单位收益的参数表。

(b) 用公式表达该运输问题，目标函数是最小化总成本，创建每单位成本的参数表。

(c) 在 Excel 数据表上列出(a)中的公式。

C(d) 用(c)中的信息和 Excel 表求出该问题的最优解。

C(e) 对(b)部分重复(c)和(d)两步操作，比较两种情况下最优解的异同。

8.1-7 Move-It 公司在两个车间生产升降机卡车并将之运往三个分销中心。两个车间生产该产品的成本相同，每部卡车被运往不同分销中心的成本如下表所示。

		美元		
		分销中心		
		1	2	3
车间	A	800	700	400
	B	600	800	500

公司每周能够生产 60 部升降机卡车。每个车间每周可以生产少于 50 部的任意数目的卡车，所以可以为减少运输成本来调整两个车间生产卡车的数目。而每个分销中心每周需求 20 部卡车。

管理者的目标是确定如何指派每个车间的生产数量以及如何制订总的运输方案可以使总的运输成本最小。

(a) 用公式表达该运输问题并创建相应的参数表格。

(b) 用 Excel 数据表格表示该问题。

(c) 用 Excel 表格求出最优解。

8.1-8 设每个分销中心获得的卡车数必须在 10~30 部之间,各个分销中心获得的总卡车数仍为 60 部,重新求解 8.1-6 问题的最优解。

8.1-9 MJK 制造公司要生产足够数量的两种产品来满足未来 3 个月的销售合同的需要。这两种产品都在同一种生产设备上生产,且每单位的两种产品需要相同的生产时间。因为每个月可得的生产和存储设备不同,所以每个月的生产能力、单位生产成本和单位存储成本也不相同。因此,在某个月多生产一种或两种产品并将之存储下来以备需要是非常必要的。

对未来 3 个月中的每个月,下表中的第二列给出了各月两种产品能在正常时间(RT)和加班时间(OT)生产的总数量。对其中任一种产品,接下来的列给出:(1)销售合同中所需的单位数量;(2)在正常时间内生产一单位产品的成本(以千美元计);(3)在加班时间内生产一单位产品的成本(以千美元计);(4)存储一个月单位产品的成本。在每种情况下,两种产品的数量被斜线(/)隔开,且第一种产品的数量在左边,第二种产品的数量在右边。

月份	最大产品总量		产品 1/产品 2			
	正常时间	加班时间	销量	单位产品生产成本/千美元		单位产品的存储成本/千美元
				正常时间	加班时间	
1	10	3	5/3	15/16	18/20	1/2
2	8	2	3/5	17/15	20/18	2/1
3	10	3	4/4	19/17	22/22	

生产经理想设计一个计划表,列出在 3 个月中每个月在正常时间和加班时间(如果正常时间被用完)生产两种产品的数量。目标是在满足每月销售合同的前提下生产和存储的总成本最小。在该问题中没有初始库存,3 个月后也不允许有库存。

(a) 用公式表达该运输问题,并创建相应的参数表。

(b) 求出最优解。

8.2-1 考虑下列运输问题,其参数表如下。

		销地			供给量
		1	2	3	
产地	1	15	9	13	7
	2	11	M	17	5
	3	9	11	9	3
需求量		7	3	5	

(a) 用沃格尔法手工计算(不要用 IOR Tutorial 中的程序)来选择初始基可行解的第一个基变量。

(b) 用 Russell 近似法手工计算来选择初始基可行解的第一个初始变量。

(c) 用西北角法手工创建一个完整的初始基可行解。

D, I 8.2-2* 考虑下列运输问题, 其参数表如下:

		销 地					供给量
		1	2	3	4	5	
产地	1	2	4	6	5	7	4
	2	7	6	3	M	4	6
	3	8	7	5	2	5	6
	4	0	0	0	0	0	4
需求量		4	4	2	5	5	

用下列每种规则求出一个初始的基可行解。比较这些解的目标函数的值。

(a) 西北角法。

(b) 沃格尔法。

(c) Russell 近似法。

D, I 8.2-3 考虑下列运输问题, 其参数表格如下:

		销 地						供给量
		1	2	3	4	5	6	
产地	1	13	10	22	29	18	0	5
	2	14	13	16	21	M	0	6
	3	3	0	M	11	6	0	7
	4	18	9	19	23	11	0	4
	5	30	24	34	36	28	0	3
需求量		3	5	4	5	6	2	

用下列准则求取一个初始的最优可行解并比较各种情况下目标函数值的异同。

(a) 西北角法。

(b) 沃格尔法。

(c) Russell 近似法。

8.2-4 考虑下列运输问题, 其参数表格如下:

		销 地				供给量
		1	2	3	4	
产地	1	7	4	1	4	1
	2	4	6	7	2	1
	3	8	5	4	6	1
	4	6	7	6	3	1
需求量		1	1	1	1	

(a) 注意, 这个问题有三个突出的特征: (1) 产地的数量等于销地的数量; (2) 每个供应量为 1; (3) 每个需求量为 1。具备这三个特征的运输问题称为指派问题(如 8.3 节所述)。用整数方案特性解释为什么这种类型的运输问题能够被解释为指派产地到销地的一一对应关系。

(b) 每个基础可行解的结论中有多少个基变量? 有多少个退化了的基变量?

D, I(c) 用西北角法求出初始的基可行解。

I(d) 应用初始化运输单纯形法的一般程序创建一个初始的基可行解。接下来用下面给出的最小化成本规则而不是上面给出的三种方法来选择下一个基变量。

最小化成本规则: 在当下考虑的所有行和列中, 选择拥有最小单位成本 c_{ij} 的变量 x_{ij} 作为下一个基变量(若有相同的最小单位成本值时任取一个即可)。

D, I(e) 从(c)部分中获得的初始基可行解开始, 应用运输单纯形法求取最优解。

8.2-5 考虑在 8.1 节开始讲过的运输问题的初始例子(P&T 公司问题)。利用运输单纯形法的最优性检验方法证实所得的结论是最优的。

8.2-6 考虑以下运输问题, 其参数表格如下:

		销 地					供给量
		1	2	3	4	5	
产地	1	8	6	3	7	5	20
	2	5	M	8	4	7	30
	3	6	3	9	6	8	30
	4(D)	0	0	0	0	0	20
需求量		25	25	20	10	20	

在运输单纯形法经过几次迭代以后, 我们会获得一个初始的基可行解, 其基变量如下: $x_{13} = 20, x_{21} = 25, x_{24} = 5, x_{32} = 25, x_{34} = 5, x_{42} = 0, x_{43} = 0, x_{45} = 20$ 。再接着手工计算运输单纯形法的两次迭代。之后确定结论是否最优, 如果是, 给出原因。

D, I 8.2-7* 考虑运输问题, 其参数表格如下:

		销 地				供给量
		1	2	3	4	
产地	1	3	7	6	4	5
	2	2	4	3	2	2
	3	4	3	8	5	3
需求量		3	3	2	2	

用下面的各种规则求取一个初始的基础可行解。在每种情况下, 从最初的结论开始利用运输单纯形法求出一个最优解。比较应用运输单纯形法的迭代的最终数目。

(a) 西北角法。

(b) 沃格尔法。

(c) Russell 近似法。

D, I 8.2-8 Cost-Less 公司从 4 个车间向 4 个零售企业提供产品。从各个车间向各个零售企业运输的成本如下表所示。

		零售企业的单位销售费用			
		1	2	3	4
车间	1	700	800	500	200
	2	200	900	100	400
	3	400	500	300	100
	4	200	100	400	300

车间 1、车间 2、车间 3 和车间 4 每月分别生产产品 10 单位、20 单位、20 单位和 10 单位，零售企业 1、企业 2、企业 3 和企业 4 每月分别需求产品 20 单位、10 单位、10 单位和 20 单位。

分销经理 Randy Smith 打算确定每个月应该如何向各个零售企业输送货物才能在满足需求的条件下使总的运输费用最小。

- 用公式表达该运输问题，创建相应的参数表格。
- 用西北角法解出一个最优的初始基可行解。
- 从(b)中得出的初始基可行解出发，应用运输单纯形法求解该问题的最优解。

8.2-9 Energetic 公司需要为一个新建筑制订能量系统的计划：

该建筑所需的能量分为三种：电力、热水、供暖。三种能量每天的需求如右表所示(测量的单位相同)。

三种可能满足这些需求的能源为电力、天然气和可以安装在屋顶上的太阳能供热系统。屋顶的型

电力	30 单位
热水	20 单位
供暖	50 单位

号决定了太阳能供热系统能够提供的最大的能量为 30 单位，而其他两种能源可以提供的能量没有限制。电力需求只能通过购买电力满足(每单位 50 美元)。其他两种能量需求可以通过任何能源或能源的组合获得。其单位成本见下表。

	美元		
	电力	天然气	太阳能
热水	150	110	70
供暖	140	100	90

目标是 minimized 满足所有能量时的总成本。

- 用公式表达该运输问题，同时创建相应的参数表格。
- D, I(b) 用西北角法为该问题求取一个初始基可行解。
- D, I(c) 从(b)中得到的初始基可行解开始，利用运输单纯形法求取最优解。
- D, I(d) 利用沃格尔法求取该问题的初始基可行解。
- D, I(e) 从(d)中得到的初始基可行解开始，利用运输单纯形法求取最优解。
- I(f) 利用 Russell 近似法求取该问题的初始基可行解。

D, I(g) 从(f)中得到的初始基可行解开始,利用运输单纯形法求取最优解。比较(c)和(e)中利用运输单纯形法求取最优解需要的迭代次数。

D, I 8.2-10* 利用运输单纯形法解决表 8.9 中所示的北部航空公司产品计划问题。

D, I 8.2-11* 重新考虑习题 8.1-2。

(a) 利用西北角法求取该问题的初始基可行解。

(b) 从(a)部分得到的初始基可行解出发,应用运输单纯形法求取一个最优解。

D, I 8.2-12 利用西北角法重新考虑习题 8.1-3b,并应用运输单纯形法求取该习题的一个最优解。

D, I 8.2-13 利用西北角法重新考虑习题 8.1-4,并应用运输单纯形法求取该习题的一个最优解。

D, I 8.2-14 利用 Russell 近似法重新考虑习题 8.1-6,并应用运输单纯形法求取该习题的一个最优解。

8.2-15 重新考虑习题 8.1-7a 这个运输问题。

D, I(a) 用 8.2 节中的每一个规则求取一个初始基可行解,记录每种方法需要的时间。比较各种解所需的时间和这些目标函数的值。

C(b) 求取这个问题的一个最优解。对(a)中求取的三种初始基可行解,计算每种超出最优解的百分比。

D, I(c) 对(a)部分中得出的三种初始基可行解,应用运输单纯形法求取(或证实)一个最优解。记录每种情况下花费的时间。比较所需时间和达到最优解需要的迭代次数。

8.2-16 依照习题 8.2-15 中的要求解决习题 8.1-7(a)。

8.2-17 考虑下列运输问题,其参数表格如下:

		销 地		供给量
		1	2	
产地	1	8	5	4
	2	6	4	2
需求量		3	3	

(a) 从 8.2 节中任选一种方法求解该问题的初始基可行解,并用运输单纯形法手工计算该问题(留意一下计算所需时间)。

(b) 重新将该问题定义为一个一般的线型规划问题,并且用单纯形法手工计算该问题,留意一下这种方法需要多少时间并将之与(a)中的时间相比较。

8.2-18 考虑 8.1 节(见表 8.7)所示北部航空公司生产计划问题。用公式表示该线性规划问题,并设决定变量 x_j = 第 j 月要生产的喷气机发动机的数量($j=1,2,3,4$)。创建该问题的初始单纯形表,比较该表的规模(行数和列数)和用于解决运输问题的简

表的规模(见表 8.9)。

8.2-19 考虑运输问题(见表 8.6)的一般的线型规划公式。证实 8.2 节中的 $m+n$ 个函数约束方程(m 个供应约束, n 个需求约束)中有一个是多余的,也就是说,其中任意一个约束都可以通过其他 $m+n-1$ 个约束求得。

8.2-20 当处理一个供应和需求变量中有整数变量的运输问题时,解释为什么运输单纯形法的步骤能够保证求取的基可行解的基变量中有整数值。而且当应用创建初始基可行解的一般程序时(而不是应用选择下一个基变量的其他规则时),进行初始化步骤时这一点也会发生。假设当前的一个基可行解是整数,试解释迭代的第三步为什么必须获得一个新的整数基可行解。最后,解释创建任意初始的基可行解时为什么要进行初始化。实际上,运输单纯形法证明了 8.1 节中的整数解性质。

8.2-21 承包商 Susan Meyer 需要向三个建筑工地运送沙砾。她可以在城市北部的沙砾矿买到 18 吨沙砾,在城市南部的沙砾矿买到 14 吨。建筑工地 1、工地 2、工地 3 分别需要 10 吨、5 吨、10 吨沙砾。在每个沙砾矿购买每吨沙砾的价格和运送费用如下表所示。

地点	每个工地的运送成本			美元
	1	2	3	每吨价格
北部	100	190	160	300
南部	180	110	140	420

Susan 想确定如何从各个矿向各个工地运送沙砾可以使总的购买和运送沙砾的成本最小。

(a) 用公式表达该线性规划问题。用大 M 法创建初始的单纯形表以应用单纯形法(不用实际计算出来)。

(b) 将该问题定义为运输问题并创建其相应的参数表格。比较应用运输单纯形法时该表(和相应的运输单纯形法)的规模与(a)中应用单纯形法时表的规模。

(c) Susan Meyer 注意到她可以直接从北部矿井向工地 1 和工地 2 提供沙砾,从南部矿井向工地 3 提供沙砾。用运输单纯形法的最优性检验(而不是迭代)来检验相应的基可行解是否最优。

(d) 从西北角法开始,应用运输单纯形法解决(b)中定义的问题。

(e) 一般情况下,(b)中创建的参数表中的 c_{ij} 表示从产地 i 到销地 j 运输的单位成本。对(d)中求得的最优解而言,假设每个基变量对应的 c_{ij} 值是固定的,而每个非基变量 x_{ij} 对应的 c_{ij} 值可能会经过讨价还价而改变。因为工地经理可能会对承包商的服务有所挑剔。用灵敏度分析确定在保持解最优的情况下非基变量对应的 c_{ij} 值的变化范围,并解释为什么这个信息对于承包商有意义。

C8.2-22 考虑运输问题公式以及 8.1 节和 8.2 节中所示的 Metro Water District 问题的解(见表 8.12 和表 8.23)。

参数表中给定的数字是估计值,有可能是不精确的,所以管理者打算做一些“如

果”假设。利用 Excel Solver 生成灵敏度分析报告,然后利用这个报告解释下列问题(在每种情况下,假设只是进行这一种改变,模型中的其他部分不变)。

- (a) 如果向 San Go 运送每立方英尺 Calorie River 水的单位成本是 200 美元而不是 230 美元,表 8.23 中的最优解还能保持最优吗?
- (b) 如果向 Los Devils 运送每立方英尺 Sacron River 水的单位成本是 160 美元而不是 130 美元,这个解还是最优的吗?
- (c) 如果在(a)和(b)中相应的成本同时从最初的 215 美元变为 145 美元,这个解还是最优的吗?
- (d) 假设 Sacron River 的供应和 Hollyglass 的需求同时降低同样的数量。如果这个数量是 50 万立方英尺,评估这个变化的影子价格仍是有效的吗?

8.2-23 不用生成灵敏度报告,应用 6.6 节和 6.7 节中的灵敏度分析程序对问题 8.2-22 中的 4 个部分进行灵敏度分析。

8.3-1 考虑下列指派问题,其成本表格如下:

		任 务			
		1	2	3	4
指派人员	A	8	6	5	7
	B	6	5	3	4
	C	7	8	4	6
	D	6	7	5	6

- (a) 画出该指派问题的网络图示。
- (b) 用公式表达该运输问题并创建相应的参数表格。
- (c) 在 Excel 数据表格上表示这个公式。
- (d) 用 Excel Solver 求取一个最优解。

8.3-2 4 艘货船将被用于从一个港口向其他 4 个港口(标为港口 1、港口 2、港口 3 和港口 4)运送货物。任意一个船都可以完成这些运送任务。不过由于船只和货物的不同,不同船只与港口的组合的装载成本、运输成本和卸载成本有所不同,如下表所示。

		港 口			
		1	2	3	4
船 只	1	500	400	600	700
	2	600	600	700	500
	3	700	500	700	600
	4	500	400	600	600

本题的目的是将 4 艘货船指派给 4 个不同的港口以最小化总的运输成本。

- (a) 描述为什么这个问题符合指派问题的一般特征。
- (b) 求取最优解。

(c) 重新将这个问题定义为一个等价的运输问题并创建相应的参数表。

D, I(d) 用西北角法求取(c)中所定义问题的一个初始基可行解。

D, I(e) 从(d)中所得的初始基可行解出发,应用运输单纯形法求取原指派问题的最优解集合。

D, I(f) 有没有区别于(e)中所得的最优解集的其他最优解? 如果有,用运输单纯形法给出定义。

8.3-3 重新考虑习题 8.1-4。假设预测三种产品下个周期的销售分别降至 280 单位、400 单位、350 单位,而且每个车间只能生产其中一种产品,也就是说其中三个车间负责生产其中一种产品,而另外两个车间不用生产产品。目标是指派不同的车间生产三种产品以使生产的总成本最小。

(a) 用公式表达该指派问题并创建相应的成本表。

C(b) 求取最优解。

(c) 重新定义该指派问题为等价的运输问题并创建相应的参数表格。

D, I(d) 从沃格尔法出发,应用运输单纯形法求解(c)中定义的问题。

8.3-4* 按年龄不同分组的游泳组教练准备培训一批 200 米混合泳接力赛的运动员参加青少年奥林匹克运动会。许多运动员擅长多个游泳项目,而教练需要找到最合适的 4 个人选。5 位运动员各个项目的最短时间如下表所示(单位为秒)。

项 目	运 动 员				
	Carl	Chris	David	Tony	Ken
仰 泳	37.7	32.9	33.8	37.0	35.4
蛙 泳	43.4	33.1	42.2	34.7	41.8
蝶 泳	33.3	28.5	38.9	30.4	33.6
自由泳	29.2	26.4	29.6	28.5	31.1

目标是选出最合适的 4 位运动员负责 4 个项目,并且使所需要的总的的时间最短。

(a) 用公式表达该指派问题。

C(b) 求取最优解。

8.3-5 考虑表 8.29 中所示的 Better 产品公司在采用政策 2 时的指派问题。

(a) 重新将此问题定义为等价的运输问题,其产地数为 3,销地数为 5,并创建相应的参数表。

(b) 将 8.3 节中给出的指派问题的最优解转化为(a)中运输问题的一个完整的基可行解(包含退化了的基变量)。特别地,可以应用 8.2 节中给出的“创建一个基可行解的一般程序”进行辅助。对应程序中的每一次迭代,选择最优解中下一个车间到产品指派过程中的基变量。当只剩下一行或一列时,用第 4 步选择其余的基变量。

(c) 证实 8.3 节中给出的指派问题的最优解实际上在应用运输单纯形法的最优性检验(b)中的完整的基可行解时是最优的。

(d) 现在将这个指派问题重新定义为等价的运输问题,其产地数为 2,销地数为 5,并创建相应的参数表格。比较此运输问题与(a)中定义的运输问题的异同。

(e) 对(d)重新(b)的计算过程。比较两个部分的基可行解的异同。

D, I 8.3-6 首先应用沃格尔法,在应用运输单纯形法解决表 8.26(b)中所示的 Job Shop 公司的指派问题(如 8.3 节所示,最终的最优解是: $x_{14}=1, x_{23}=1, x_{31}=1, x_{42}=1$, 其余所有的 $x_{ij}=0$)。

8.3-7 重新考虑习题 8.1-7。假设分销中心 1,2,3 每周必须分别获得 10 单位、20 单位、30 单位的产品。为了管理的方便,管理者要求每个分销中心只能接收从一个车间提供的产品。指派问题的目标是 minimized 总的运输费用。

(a) 定义该问题为指派问题,并创建相应的成本表,包括定义相应的指派对象和任务。

C(b) 求取一个最优可行解。

(c) 重新考虑该指派问题为一个等价的运输问题(有 4 个产地),并创建相应的参数表。

C(d) 求解(c)中定义的问题。

(e) 重新考虑(c)中只有两个产地时的情况。

C(f) 解决(e)中定义的问题。

8.3-8 考虑下列指派问题,其成本表如下:

		工 作		
		1	2	3
人员	A	5	7	4
	B	3	6	5
	C	2	3	4

最优解是 $A-3, B-1, C-2$, 且 $Z=10$ 。

C(a) 用计算机证实此最优解。

(b) 重新将这个问题定义为等价的运输问题并创建相应的参数表。

C(c) 为(b)中定义的运输问题求取一个最优解。

(d) 考虑为什么(c)中得出的最优可行解包括一些(退化了的)指派问题的最优解中不包括的基变量。

(e) 现在考虑一下(c)中的最优初始可行解中的非基变量。应用一般线性规划中的灵敏度分析方法分析每一个非基变量 x_{ij} 和相应的成本 c_{ij} , 并确定在保持解最优的情况下 c_{ij} 的变化范围。

8.3-9 考虑 8.3 节中给出的一般指派问题的线性规划模型。创建这个模型的约束系数表。比较该表与一般的运输问题对应的表(表 8.6)。请解释为什么一般的指派问题与一般的运输问题相比有更特殊的结构?

I 8.4-1 重新考虑习题 8.3-2 中所示的指派问题。应用匈牙利算法解决这个问题。

I 8.4-2 重新考虑习题 8.3-4。将之看做书后答案中所示的指派问题。应用匈牙利算法解决这个问题。

I 8.4-3 重新考虑表 8.29 中所示的 Better 公司问题采用第二项政策时涉及的指派问题。假设第一个车间生产第一种产品的成本从 820 美元降低到 720 美元。应用匈牙利算法解决这个问题。

I 8.4-4 应用匈牙利算法解决下列指派问题,其成本表如下表所示。

		工 作		
		1	2	3
人员	1	<i>M</i>	8	7
	2	7	6	4
	3(D)	0	0	0

I 8.4-5 应用匈牙利算法解决下列指派问题,其成本表如下表所示。

		任 务			
		1	2	3	4
指派人	A	4	1	0	1
	B	1	3	4	0
	C	3	2	1	3
	D	2	2	3	0

I 8.4-6 应用匈牙利算法解决下列指派问题,其成本表如下表所示。

		任 务			
		1	2	3	4
指派人	A	5	8	6	7
	B	9	5	7	8
	C	5	9	8	4
	D	6	3	5	9



案例 向市场运送木材问题

Alabama Atlantic 是一个木材公司,它有 3 个木材产地和 5 个销售市场。木材产地 1、产地 2、产地 3 每年的产量分别为 1 500 万个单位、2 000 万个单位、1 500 万个单位。5 个市场每年能卖出的木材量分别为 1 100 万个单位、1 200 万个单位、900 万个单位、1 000 万个单位、800 万个单位。

在过去,这个公司是用火车来运送木材的。随着火车运费的增加,公司正在考虑用船来运输木材。采用这种方式需要公司在使用船只上进行一些投资。除了投资成本以外,

在不同线路上用火车运输和用船运输每百万单位的费用如下表所示：

产地	用火车运载木材的单位费用/千美元					用船只运载木材的单位费用/千美元				
	市场					市场				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	61	72	45	55	66	31	38	24	—	35
2	69	78	60	49	56	36	43	28	24	31
3	59	66	63	61	47	—	33	36	32	26

每年在每条路线上用船运输百万单位木材公司在船只上的主要投资如下。

产地	对船只的投资/千美元				
	市场				
	1	2	3	4	5
1	275	303	238	—	285
2	293	318	270	250	265
3	—	283	275	268	240

考虑到船的使用期限以及资金的时间价值,这些投资每年的使用成本相当于表中的1/10。该问题的目标是确定如何制订运输计划可以使总费用最少(包含运输费用)。

假设你是运输团队的经理,现在由你来决定运输计划。有下列三个选项:

选项 1: 继续仅用火车运输;

选项 2: 仅用船只运输(除了有些地方只能用火车以外);

选项 3: 或者用船只运输,或者用火车运输,由哪个运费少来决定。

计算每个选项的结果,比较一下。

最后,由于这个结果是以目前的运输和投资费用为基础,所以目前采用哪个选项还应考虑这些费用在将来会发生哪些变化。对每个选项,描述一个方案,说明将来费用如何变化时能够证明现在要采用的选项比较合理。

网络优化模型

网络起源于为数众多的设置,并具有多种多样的形式。交通、电路和通信网络遍及人们的日常生活。网络表示也被广泛地应用于不同领域的问题,比如生产、销售、工程规划设计、设备调查选定地点、资源管理和金融规划。事实上,网络表示为描绘系统内各组成部分的关系提供了可视化的和概念上的辅助,可用于自然科学、社会科学和经济科学各领域的虚拟研究。

近年来,运筹学中最令人兴奋的发展就是网络最优化模型的理论与应用这两方面都取得了非同寻常的快速进展。许多算法关键问题的解决对其起到了重要的推动作用,比如从关注数据结构和高效数据操作的计算机科学领域获取了许多思想。因此,现在许多算法和软件都可用来并且正在被用来以常规理论基础解决规模巨大的问题,这在二三十年前是难以完成的。

许多网络最优化模型实际上是线性规划问题的特殊类型。例如,前面章节讨论的运输问题和分配问题都可归为这类问题,它们的网络描述可见图 8.3 和图 8.5。

3.4 节介绍的线性规划例子就可看做一个网络优化问题。图 3.13 给出的 Distribution Unlimited 公司通过配送网络进行配货的问题,是线性规划问题的一种特殊形式,称为**最小费用流**问题,这将在本章 9.6 节介绍。读者应该复习前面的例子,然后用 9.7 节的网络方法解决它们。

本章我们只粗略地介绍网络方法论的当前状况。然而,我们将介绍五种重要的网络问题及解决这些问题的一些基本思想(不探究数据结构问题,虽然这对于成功解决大规模应用问题是非常重要的)。前三个问题——最短路径问题、最小生成树问题和最大流问题——都有一个特殊结构,来源于常见的实际应用。

第四类问题——最小费用流问题由于具有一般性的结构,所以为其他许多应用提供了一种通用的方法。事实上,最小费用流问题不但涵盖了最短路径和最大流问题,也涵盖了第 8 章的运输问题和分配问题。因为最小费用流是一个特殊的线性规划问题,所以能通过被称为**网络单纯形法**的一种简化的单纯形法极为有效地解决(我们将不再讨论更为

一般的网络问题,因为那更难解决)。

第五种网络问题涉及在限定的期限内确定最经济的项目实施方式。一种被称为时间—费用平衡的 CPM 方法的技术被用来描述项目的网络模型和作业的时间—费用平衡。边际费用分析和线性规划都可用于最优项目计划的求解。

9.1 节介绍了一个原形范例,其后将用于阐明前三个问题的解决方法。9.2 节介绍了一些网络基本术语。接下来的四节依次处理了前四个问题。9.7 节研究了网络单纯形法,9.8 节介绍了时间—费用平衡的 CPM 方法。



9.1 原形范例

Seervada 公园最近只允许限定数量的观光者和背包者徒步旅行,小轿车不允许进入公园,但是公园看守员可以在一个狭窄的弯曲道路上开电车或吉普车。这条道路(不包括转弯)如图 9.1 所示。其中,点 O 表示公园入口,其他字母表示看守站点所在位置,线上的数字表示道路的长度。

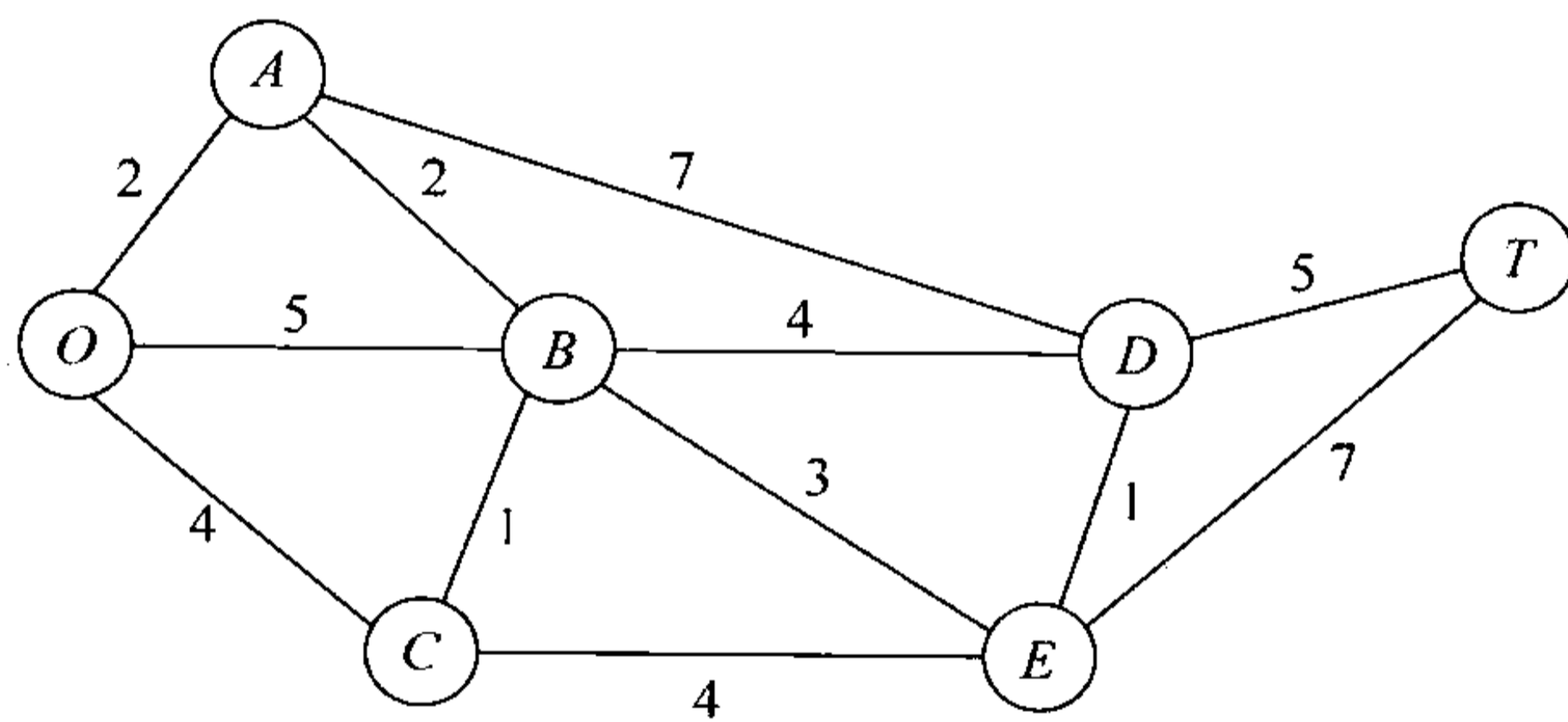


图 9.1 Seervada 公园的道路系统

公园在位置 T 处有一个景色优美的奇观。一些有轨电车在入口和位置 T 之间运送游客。

当前公园管理面临三个问题。第一个问题是在入口选择哪条路到达位置 T 具有最短距离(这是将在 9.3 节讨论的最短路径问题)。

第二个问题是需要所有的站点安装电话线路来保证通信联系(包括公园的入口)。因为安装线很贵而且在自然条件下容易破裂,电话线要在道路下面安装以保证每两点之间都能够有联系。问题是在哪里安置电话线可使总的路线最短(这是一个最小生成树问题,我们将在 9.4 节讨论)。

第三个问题是车辆的调整。由于在公园旅游旺季时有更多的人想要从公园入口坐电车到 T 站,为了尽量避免干扰公园里的生态和野生动物,每天每条路都被严格地规定允许行驶的车辆数目(不同的路上有不同的限制,我们将在 9.5 节详细描述)。因此,在旺季每天不同路线所能够增加的车次与距离的远近无关。这个问题属于如何在破坏每条路的限制的条件下调整不同路上发出的车次以使公园发车的次数最多(这是一个网络最大流问题,我们将在 9.5 节详细讨论)。



9.2 网络术语

一些相对广泛的术语被用来描述各种网络及其组成部分。尽管我们在本章尽力避免使用这种特殊词汇,但我们仍然需要引入大量的术语,我们建议你在本节来理解概念,在以后各节回忆接触过的术语。为了帮助你记忆,在每个术语定义时都使用了突出的黑体字。

一个网络由一系列节点和一系列连接点的线组成。点被称为节点(nodes),例如图 9.1 的网络中有 7 个圈代表 7 个节点。那些线称为弧(arcs)(或环或边缘或支流),例如,图 9.1 的网络中 12 条弧表示公园路系统中的 12 条路。弧可以用两个端节点来命名,例如 AB 是图 9.1 中节点 A、B 之间的弧。

可能有某种类型的流通过网络中的弧,例如,在 9.1 节中,Seervada 公园路上的电车流。表 9.1 给出了一些在典型的网络中流的例子。如果通过一条弧的流只有一个方向(例如一条只有一个方向的街道),这条弧就称为有向弧(directed arc),方向由在代表该弧的线的末端加一个箭头来表示。当一个有向弧用它所连接的两个节点来描述时,起始节点通常写在末端节点的前面。例如,一个有向弧始于节点 A,终于节点 B,必须被描述成 AB,而不是 BA。另一种方法是写成 $A \rightarrow B$ 。

表 9.1 典型网络的组件

点	弧	流
交叉路口	路	车辆
飞机场	飞机航线	飞机
转换器	线、频道	信息
传水站	管	水(液体)
工作中心	原料输送路线	工作

如果流经一条弧的方向允许有两个(如一条管子两头都能够用来抽水),则把这条弧称为无向弧(undirected arc)。为了区分这两种弧,我们经常指的无向弧一般称做链(links)。

尽管流经无向弧的方向有两个,我们可以假定选择从一个方向流经弧,而不是同时相反方向流经弧(后面的例子要求使用一对相反的有向弧)。然而,在决定无向弧流向问题的过程中,允许分派一部分相反方向的流,但要明白,实际流就是网络流(在两个方向上所分配的流的不同之处)。例如,如果一个方向上的流量是 10,另一相反方向的流量是 4,实际的结果就是通过使原方向的流量从 10 减至 6 而使最初分配的流量减少 4 个单位。尤其是,你可以虚构一个流经一条有向弧的“错误”方向的流量来记录“正确”方向有向弧上的减少量。

只含有向弧的网络称为有向网络(directed network)。类似的,若所有的弧都是无方向的,则称之为无向网络(undirected network)。含有向弧和无向弧的网(或所有的弧都是无向弧)可以转换成有向网络,如果需要,可以用一对相反方向的有向弧代替每一条无向弧(你可以有选择地说明通过每对有向弧的流量是同时流经相反方向的,或者提供只有

一个方向的网络流,这取决于哪个适合你的要求)。

如果两个点不是由一条弧连接的,那么一个很自然的问题是它是否由一连串的弧连接,两节点的路径(path)是连接这些点的一组不同的弧的序列。例如,在图 9.1 中,连接 O 、 T 两点的一条路径是 $OB-BD-DT$ 这组弧($O \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$)。若网络中部分或全部的弧是有向弧,那么我们就需要区别无向路径和有向路径。从点 i 到 j 的有向路径(directed path)是指一组指向 j 的有向连接弧,那么从 i 到 j 的路径是可行的。从 i 到 j 的无向路径(undirected path)是指一组或指向 j ,或远离 j 的任意的弧(注意:有向路径同样符合无向路径的定义,但反过来不成立)。通常,无向路径有些弧指向 j ,同时另一些弧远离 j 。在 9.5 节和 9.7 节,读者也许会发现无向路径在分析有向网络时将发挥重要的作用。

为了释明以上的定义,图 9.2 给出了一个典型的有向网络。它的点和弧与图 3.13 相同,即点 A 、 B 表示两工厂, D 、 E 表示两仓库, C 表示配送中心,弧表示物流路径。 $AB-BC-CE(A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E)$ 这组弧是从 A 至 E 的一条有向路径,因为沿着这整条路径,流向 E 是可行的。而 $BC-AC-AD(B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow D)$ 则不是由点 B 到 D 的有向路径,因为弧 AC 的方向是远离点 D 的(在这条路径中)。然而, $B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow D$ 却是一条由 B 至 D 的无向路径,因为 $BC-AC-AD$ 这组弧连接了这两个点(即使在这条路径中弧 AC 的方向是逆向的)。

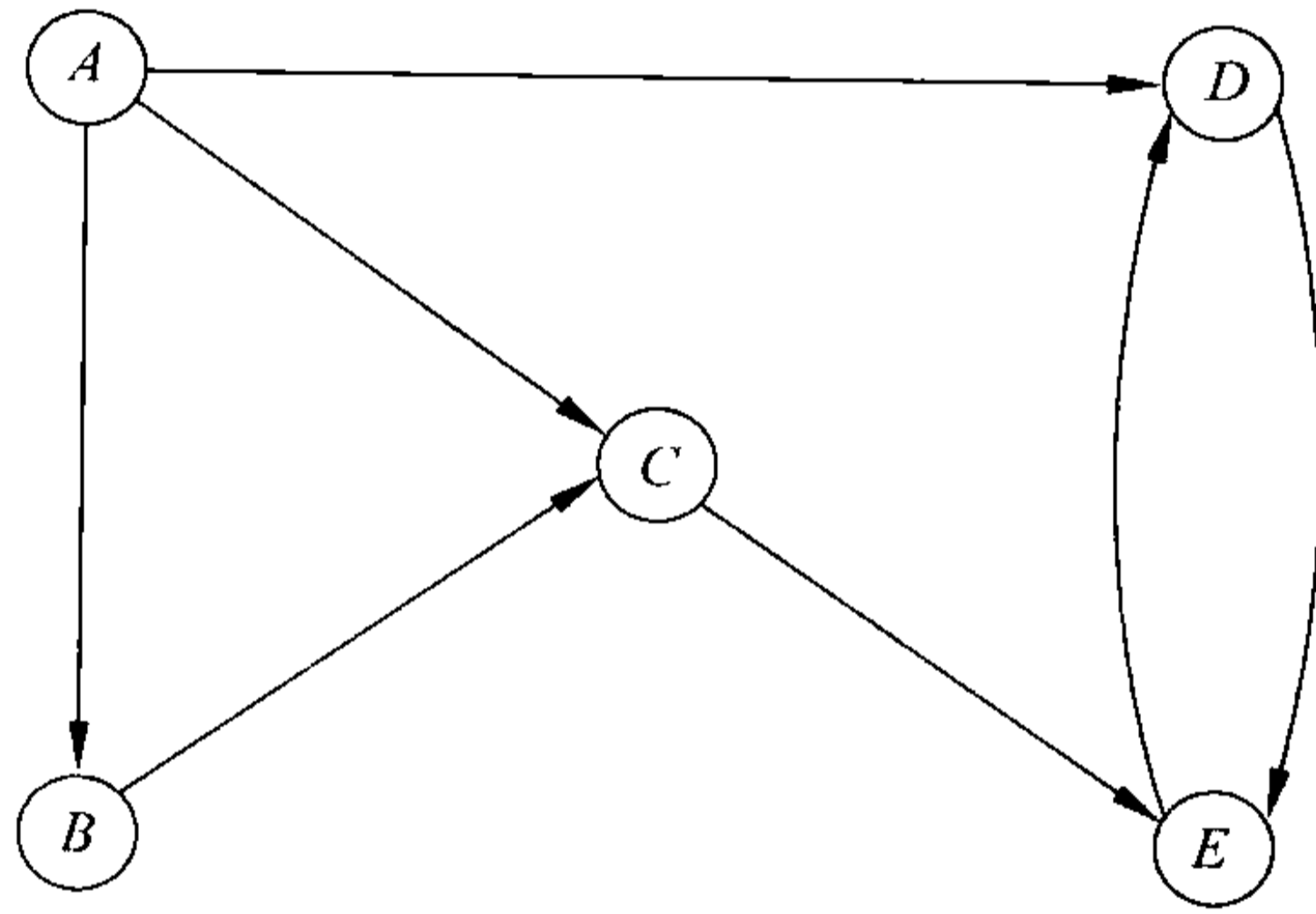


图 9.2 曾在图 3.13 中出现的无限配送公司的配送网络

在一个恰当的无向路径的例子中,假设从节点 A 到节点 C 的流量为 2 的流预先记作弧 AC 。给定这种假设后,对于无向路径 $B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow D$ 整体来说,可以找到流量更小的流,设流量为 1,即便弧 AC 与 $C \rightarrow A$ 的正向流方向相反。由于将弧 AC 的方向设定为逆向,从而导致了在正向上的流量减少了 1 单位,在 9.5 节和 9.7 节中大量运用这种方法来标记通过无向路径,这些路径包括与上述流方向相反的弧,以便使这些已标记为正向的流在正向上流量减少。

始点与终点重合的路径称为圈(cycle)。在一个有向网络中,一个圈有向与否取决于它所包含的路径是否有向(因为一个有向路径同时也是无向的,一个有向圈是无向的,但通常并非反之亦然)。例如,在图 9.2 中, $DE-ED$ 是有向圈,相反 $AB-BC-AC$ 不是有向圈,因为弧 AC 与弧 AB 、弧 BC 方向相反。另一方面,由于 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ 是无向路径,故 $AB-BC-AC$ 是无向圈。图 9.1 所示的无向网络图中有许多圈,如 $OA-AB-BC-CO$ 。然而,注意路径(一系列单独的弧)的定义中排除了形成圈时缩进一步的情况。如图 9.1 中的 $OB-BO$ 不是一个圈,因为 OB 和 BO 是同一弧的两种标记。另外,图 9.2

中, $DE-ED$ 是一个(有向)圈, 因为 DE 和 ED 是两个不同的弧。

如果网络中的两个节点之间至少存在一条无向路径, 那么这两个节点是连通的 (connected) (即网络有向的两点之间的路径不一定是定向的)。任何两个节点之间都是连通的网络称为连通网 (connected network)。因此, 图 9.1 和图 9.2 的网络都是连通的。然而, 如果后面的网络图去掉弧 AD 和 CE , 那么它就不再是连通网了。

考虑一个有 n 个端点的连通网 (例如, 图 9.2 有 $n=5$ 个顶点)。删除它上面的所有弧, 通过每次按一定的方式添加原始的网络图中的一个弧 (或树枝) 就能“生成”一棵“树”。第一条弧可以连接任何一对顶点, 然后每一条新弧应该连接在一个已经与其他端点相连接的点和一个新的之前未与其他节点相连的节点上。这样添加一个弧不仅能避免形成圈, 还能保证连通网中顶点的数目恰好比弧的数目大 1。每新添一个新弧就生成一个更大的树 (tree), 一个不含无向圈的连通网 (对于 n 个顶点的子集)。 $n-1$ 个弧添加完毕后, 添加的工作就可以停止, 因为所得到的树连接了 n 个顶点。这个树就称为生成树 (spanning tree), 即一个含有几个顶点, 不含有无向圈的连通网。每一个生成树有且仅有 $n-1$ 条弧, 因为这是构建一个连通网所需的最少的弧边数, 也是不含圈的最大的弧边数。

图 9.3 用了图 9.2 中的五个顶点和一些弧演示了一次添加一条弧的树的生长过程, 直到得到生成树为止。对于过程中每一步的新弧都有几种选择, 所以图 9.3 中演示的只是创建一个生成树很多方式中的一种。但是在树的生成过程中, 怎样添加一个新弧才能满足前一段中特定的条件, 我们将在 9.4 节深入地探讨和图示生成树。

生成树在很多的网络分析中起了很关键的作用。举例来说, 它们构成了 9.4 节最小生成树问题的基础。另一个主要例子是 (可行的) 生成树符合在 9.7 节讨论的网络单纯形法 BF 求解法。

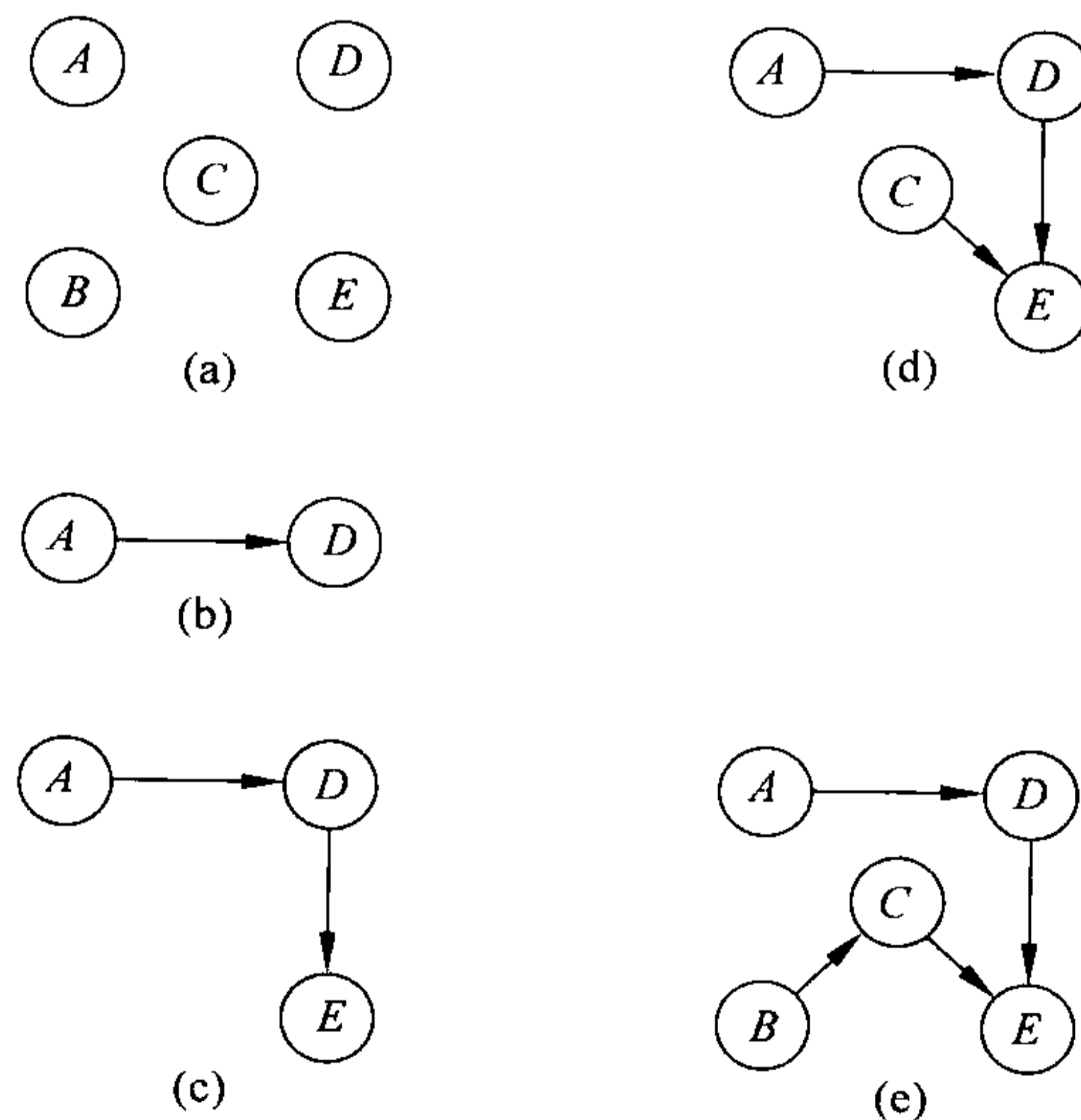


图 9.3 一次增加一个弧为图 9.2 的网络图生成一棵树的例子

(a) 没有边的节点; (b) 只有一条边的树; (c) 有两条边的树; (d) 有三条边的树; (e) 一个生成树

最后, 我们还需要介绍几个关于网络流的术语。可以在定向弧中传送最大数量的流

(可能无穷)称为弧容量(arc capacity)。就节点来说,它们的差别在于是产生网络流还是减少网络流或者两者都没有。供给点(supply node)(或称发点、源)有流出量比节点流入量大的特性。相对应的概念是需求点(demand node)(或称收点、汇),其流入量比流出量大。转载节点(transshipment node)满足流守恒,所以流入等于流出。



9.3 最短路径问题

虽然在本节末提到许多其他形式的最短路径问题(包括一些有向网络),但我们将集中注意力于下面的简单形式。考虑一个具有起点和终点两个特殊的节点的无向连通网络。每条边(无向的)都有一个相对应的正数距离。我们的目标是找出从起点到终点的最短路径(总距离最小的路径)。

一个容易理解的简单代数方法可以用于解决这个问题。这种方法的实质是从起始开始搜索,用升序排列从初始点到网络的各个节点的距离,从而成功地确定最短路径,当到达终点时问题也就解决了。我们将简单叙述这种方法,然后通过解决在 9.1 节遇到的 Seervada 公园的管理问题加以阐明。

最短路径问题的算法

第 n 次迭代的目标:找到离起点最近的第 n 个节点($n=1, 2, \dots$ 重复操作,直到第 n 个最近的节点为终点)。

第 n 次迭代的输入:($n-1$)个离起点最近的节点(在先前迭代中找到的),包括它们的最短路径和它们离起点的距离(这些点包括起点,称为标记节点,其他的称为未标记节点)。

第 n 个最近节点的候选节点:每一个通过链直接连接一个或多个未标记的节点的标记节点提供一个候选节点——可能是最短连接链的未标记节点。

第 n 个最近节点的计算:对于每一个标记节点和它的候选节点,把它们之间的距离和该标记节点到起点的最短距离加起来。总距离最小的候选节点是第 n 个最近节点,它的最短路径就是产生这个最小距离的路径。

算法在 Seervada 公园最短路径问题中的应用

在如图 9.1 所示的道路系统中,Seervada 公司管理员需要找到从公园进口(节点 O)到景点(节点 T)的最短路径。在表 9.2(第二个最近节点的连接允许直接跳到寻找下一个第四个最近节点)中显示出在这个问题上应用上述算法所得的结果。第一列(n)表示迭代次数,第二列在删除不相关的节点后为往返流简单地列出了已标记节点(不直接与任何未标记节点连接的节点)。第三列给出了第 n 个最近节点的候选节点(与标记节点距离最近的未标记节点)。第四列计算出了从起点到每一个候选节点的最短路径的距离(也就是从起点到标记节点的距离加上该节点到候选节点的距离)。第五列中,距离最小的候选节点就是到起点最近的第 n 个节点。最后两列概括总结了在后续循环过程中所需要的最新标记节点的信息(也就是从起点到这个节点的最短路径的距离和在这条最短路径上的

最后的链)。

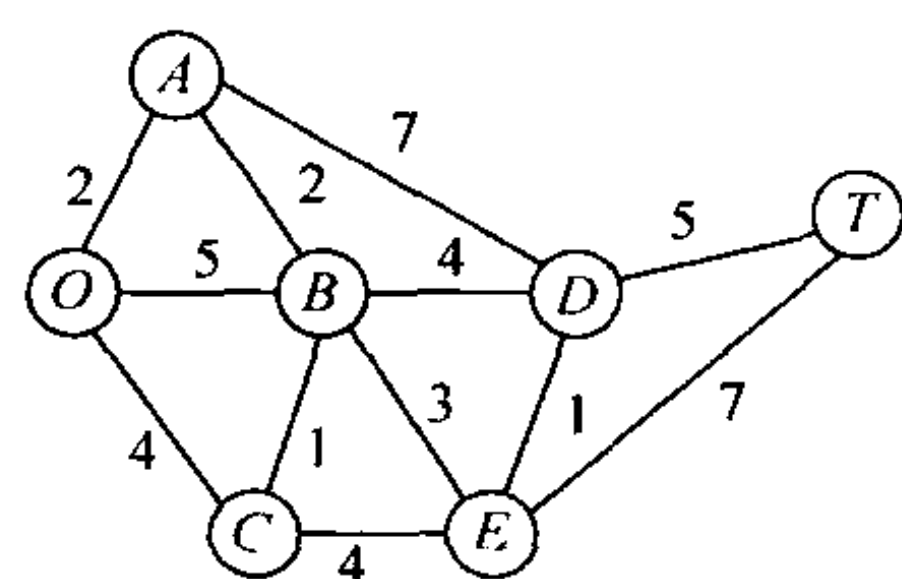


表 9.2 最短路径的算法在 Seervada 公园问题上的应用

n	与未标记点直接相连的已标记点	相连的最近的未标记点	涉及的总的距离	第 n 个最近点	最小距离	上一个连接
1	O	A	2	A	2	OA
2,3	O	C	4	C	4	OC
	A	B	$2+2=4$	B	4	AB
4	A	D	$2+7=9$			
	B	E	$4+3=7$	E	7	BE
	C	E	$4+4=8$			
5	A	D	$2+7=9$	D	8	BD
	B	D	$4+4=8$	D	8	ED
	E	D	$7+1=8$			
6	D	T	$8+5=13$	T	13	DT
	E	T	$7+7=14$			

现在让我们把这些列数字和算法的要点直接联系起来。第 n 次迭代的输入是前一次迭代的第五列和第六列给出的。在删除了那些没有与已标记点直接相连的点后,第五列的已标记点就列在了当前迭代的第二列,与那些点最近的候选点放在当前迭代的第三列,其计算在第四列上进行,当前迭代结果记录在最后三列。

表 9.2 的工作完成后,从终点追溯到起点的最短路径通过表的最后一列可以看出是:

$$T \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow O \text{ 或者 } T \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow O$$

因此,从起点到终点的最短路径有两种选择: $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow T$ 或者 $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$,两条路径长度均为 13 英里。

用 Excel 电子表格归结并求解最短路径问题

这个算法提供了一个特别简单的途径来解决复杂的最短路径问题。但是一些数学程序软件包并不包含这种算法。如果不是那样,它们常包含在 9.7 节将介绍的网络单纯形法中,那也是解决此类问题的一个不错的选择。

因为最短路径问题是特殊的线性规划问题,所以当好的方法不容易实现时,常使用单纯形法。尽管不如用于解决复杂最短路径问题的专门算法那样有效率,但是对于次复杂的问题(比 Seervada 公园问题复杂得多)还是能胜任的。基于普通单纯形法的 Excel 电子表格可以提供一个简便的途径,用于归结和求解几十条弧和节点组成的最短路径问题。

图 9.4 为归结 Seervada 公园最短路径问题提供了一个适合的电子表格。与 3.6 节的那种用一个单独行来表示每个线性规划模型的函数约束不同,它提供了一种特殊的结构,即在第 G 列列出所有节点,在第 B 列、第 C 列列出所有的弧,在第 E 列给出对应每条弧的距离(单位:英里)。因为每个网络图中的节点是一个没有方向的弧,而遍历最短路径有一定方向性,所以,每个节点都可以用一对方向相反的有向弧代替。因此,B 列和 C 列合计列出了图 9.1 中 B-C 和 D-E 之间交通路线的两倍,一组向下的弧和一组向上的弧,并且每个方向都可被选择。然而其他的链仅作为从左到右的弧列出,因而这些弧在选

择从起点到终点的最短路径时只有一个方向。

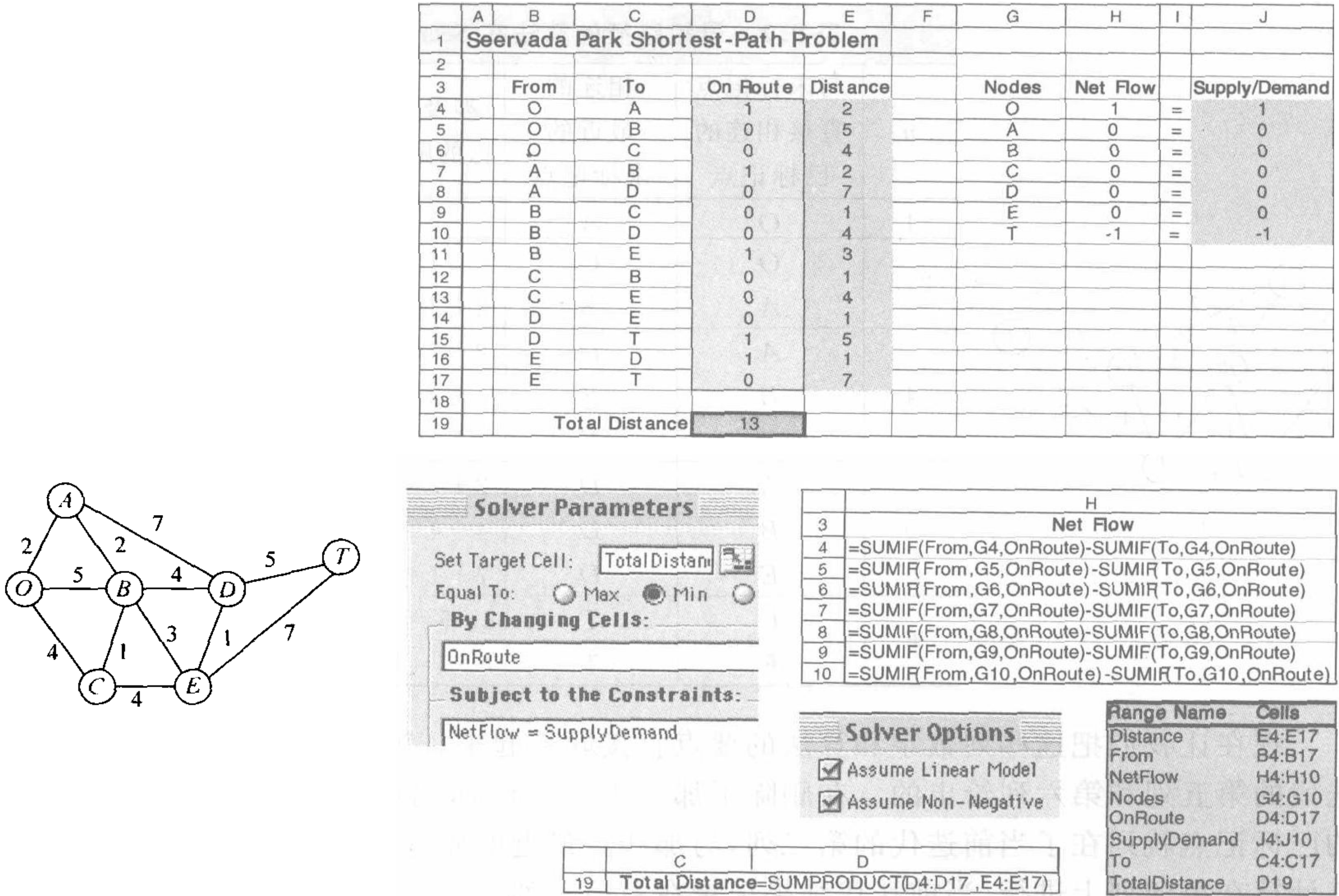


图 9.4 Seervada 公园最短路径问题的电子表格,图中变化单元格 OnRoute(D4 : D17)是用 Excel Solver 求得的最优解。目标单元格 Total Distance(D19)给出了最短路的总里程(英里)。电子表格左端的图为图 9.1 中给出的 Seervada 公园的道路系统

网络图中从起点到终点最短的路线可用流量为 1 的弧来表示。现在要做的决策是为这条路线选择哪些弧。流量被分配为 1 的弧将包含在这条路线中,否则不包括。如果不包括,则流量为 0。因而,用决策变量 x_{ij} 来代表需要决策的每条弧,则有

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{不包括弧 } i \rightarrow j \\ 1 & \text{包括弧 } i \rightarrow j \end{cases}$$

决策变量的值由图中可变的单元格 OnRoute(D4 : D7)输入。

应用案例

成立于 1881 年的加拿大太平洋铁路公司 (CPR) 是第一家拥有横穿大陆铁路线的公司。CPR 的铁路从蒙特利尔到温哥华再穿过美国西北部和中西部,整个铁路网络超过 14 000 英里。通过与其他公司展开战略合作,CPR 的市场甚至延伸到了墨西哥的商业中心。

每天,CPR 要装运大约 7 000 件货物穿越北美以便出口。由于必须通过火车货箱运输这些货物,并且在到达目的地之前需要不断地更换火车头,因此 CPR 必须协调货箱及 1 600 个火车头、65 000 辆火车、5 000 名火车员工及 250 个火车站。

CPR 管理者求助于一家运筹咨询公司——MultiModal Applied Systems,并与其合

作开发了一套研究方法来解决上述问题。大量运筹学技术被用来创造一个新的运营系统。该方法的基础是将火车组的流通看成是网络流,其中每个节点代表一个地点及时间点。这种描述方法使应用网络优化技术成为可能。例如,该方法每天均要解决很多最短路径问题。

由于该方法的应用,CPR 每年大约节约 1 亿美元。人力效率、火车头效率、燃料消耗及火车速度均得到了极大的改善。而且,现在 CPR 能够向顾客提供可信的交货时间,并且由于服务的改进获得了很多的赞誉。网络优化技术的成功应用使 CPR 于 2003 年在表彰运筹学和管理学成就的 Franz Edelman 奖的全球竞争中获得了令人瞩目的一等奖。

资料来源: P. Ireland, R. Case, J. Falls, C. Van Dyke, J. Kuehn, and M. Meketon: "The Canadian Pacific Railway Transforms Operations by Using Models to Develop Its Operating Plans," *Interfaces*, 34(1): 5-14, Jan.-Feb. 2004. (以下网址提供本文的链接: www.mhhe.com/hillier.)

在被选中的那条路上的每一个节点都可以认为有一个流量为 1 的流通过它,反之则没有流量。节点净流量等于流进量减去流出量,所以发点的净流量为 1,而收点的净流量为 -1,其他点均为 0。这些净流量的要求由图 9.4 的 J 列给出。

使用图底部公式, H 列的每一格都可计算出节点的实际净流量。相应的约束 $\text{NetFlow}(H4 : H10) = \text{SupplyDemand}(J4 : J10)$ 在 Solver 对话框里具体给出。

使用图底部的公式,目标单元格 $\text{TotalDistance}(D19)$ 可以给出选中路线的总距离。目标单元格最小化的目标已在 Solver 对话框中详细列出。点击 Solver 按钮后,最优解将显示在 D 列,这个解就是前面最短路径算法求出的那两条路线。

其他一些应用

并不是所有的最短路径问题都涉及使起点到终点之间距离最短的路程问题。事实上,它甚至可能与路程没有一点关系。这些链(弧)可能表示一些其他类型的作业,因此选择网络中一条路相当于选择了作业的最好次序。链的长度也可能表示别的一些意义,例如活动的费用,这时的目标将是选择总费用最小的作业次序。

通常有三种应用类型。

1. 使路程总距离最短,例如 Seervada 公园问题;
2. 使一组作业的总费用最小(习题 9.3-3);
3. 使一组作业的总时间最小(习题 9.3-6 和习题 9.3-7)。

这三类问题可能来源于同一种应用。例如,假如你从一个城镇开车到另一个城镇,中间需要经过若干个城镇,你希望找到一条最好路线。你认为最好路线的标准可能总距离最小,或是总费用最小,还可能是总时间最小。

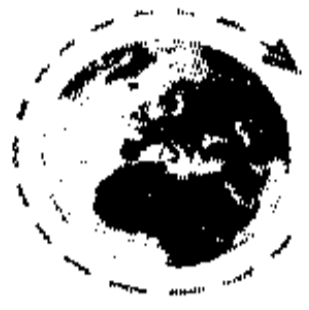
许多应用要求在有向图中找出从起点到终点的最短有向路径。前面介绍的算法很容易通过改变来处理有向路的每次迭代。特别地,当已识别出第 n 点的候选节点后,只需要考虑从已标号点到未标号点的有向弧。

另一种最短路径问题是找到从起点到网络中所有其他点的最短路径。注意,前面的算法其实已经给出了从起点到终点外每一点(比终点离起点更近)的最短路径。因此,当所有节点都被看做潜在终点时,算法只需要做出这样改变——直到所有节点都成为已标

号点时才停止继续运算。

一种更概括的最短路径问题是找到从每个节点到另外一个点的最短路径。另一种类型是放弃“距离”(弧值)的非负约束。而其他一些约束也可能被随后加上。所有这些变异问题偶尔会出现在应用中,所以也已被研究者研究。

对于一种很广泛的优化问题联合的算法,像特定交通路线或网络设计问题,需要求解大量的作为子问题的最短路径问题。虽然我们没有办法进一步研究这类问题,但这类问题如今可能是最短路径问题最重要的应用。



9.4 最小支撑树问题

最小支撑树问题与上一节中最短路径问题的主要形式有一些相似。在这两个问题中,我们考虑的都是无向的连通网络,并且给出了与每一条链相关的具有正值的长度(距离、费用、时间)信息。这两个问题均需从所有链中选出一组总长度最小的链,来满足一个特定的属性。对于最短路径问题,被选择路线的特定属性是要从起点到终点。对于最小支撑树问题,被选择路线的特定属性是每对节点都要有路相连。

最小支撑树问题可归纳如下:

1. 给定网络的节点而不是边。或者,如果插入一个节点,该节点潜在的边和长度(正值)是已知的(可替代的度量包括距离、费用、时间)。
2. 你希望通过插入足够的边来设计网络,以满足使每一对节点都有路相连的特定要求。
3. 我们的目标是在满足这个要求的基础上寻求一种方式,使插入网络中的路的总长度最小。

具有 n 个节点的网络,仅需要 $(n-1)$ 条边即可满足每对节点有一条路的要求,而不需要更多的边,否则会增加总长度。这 $n-1$ 条边的选取,应恰好能构成一棵支撑树。因此,这一问题可以归为寻找总长度最小的支撑树。

图 9.5 以 Seervada 公园问题为例,说明了支撑树这一概念。例如,图 9.5(a)不是一棵支撑树,因为节点 O, A, B, C 与节点 O, E, T 不连接,还需要一条边使其相连。这一网络系统实质上包含两棵树,每一组节点是一棵树。图 9.5(b)是该网络系统的扩展,但因为它有两个环($O-A-B-C-O, D-T-E-D$),所以它不是树。它的边过多。因为 Seervada 公园问题有 $n=7$ 个节点,根据 9.2 节,这一网络必须恰有 $n-1=6$ 条边,且无环才是一棵支撑树。图 9.5(c)满足以上条件,因此这个网络是最小支撑树问题的可行解(边的总长度为 24 英里)(很快你将了解到这个解不是最优的,还可能构造出总长度为 14 英里的支撑树)。

一些应用

下面是最小支撑树问题的主要应用类型。

1. 通信网络设计(光缆网络、计算机网络、电话线网络、有线电视网络等);
2. 费用最低的运输网络设计(铁路、公路等);
3. 高压输电线路的网络设计;
4. 线路总长度最短的电子设备的线路网络设计(如计算机系统);

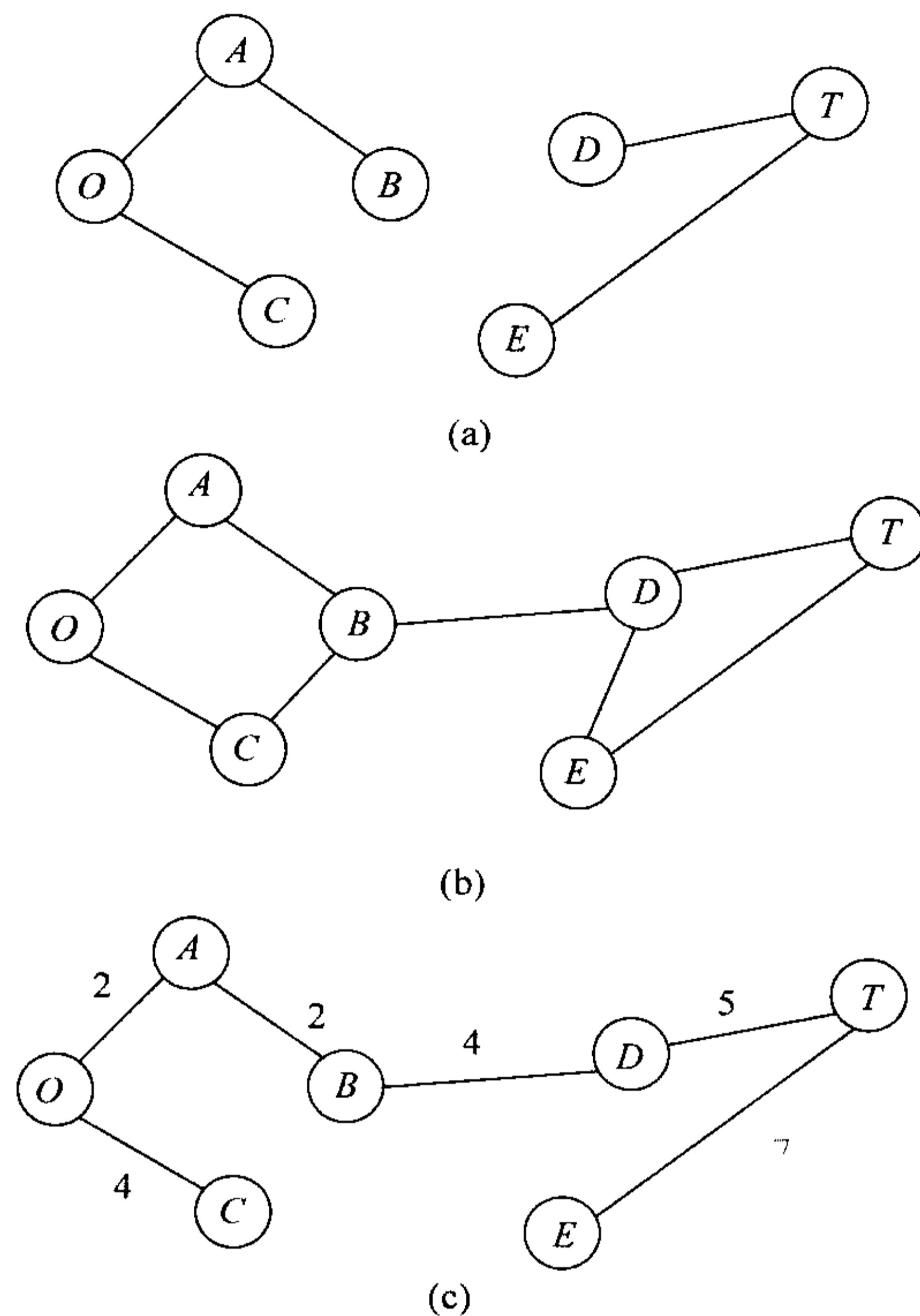


图 9.5 以 Seervada 公园问题为例说明支撑树的概念的图解
(a) 不是支撑树；(b) 不是支撑树；(c) 是一棵支撑树

5. 连通很多地方的管道网络设计。

在这个信息飞速传播的时代,第一种类型的应用尤为重要。在一个通信网络中,只需要插入足够的边以保证每对节点之间有一条路,这样的—个网络设计正是最小支撑树的典型应用。因为如今通信网络系统造价都在数百万美元,所以通过寻求最小支撑树优化通信网络是非常重要的。

一个算法

最小支撑树问题可以用一种简明直接的方式来解决,因为它恰好是运筹学问题中少数的一种特殊类型,其在每一阶段所寻求的最优解最终构成整个过程的最优解。因此,从任意一个节点开始,第一个阶段就是要选取这一节点到另一节点最短的那条边,而不考虑会对后面的选取造成影响。第二阶段就是要在未连接的节点中确定与已连接的节点距离最短的点,并将其连接。重复以上过程,直到所有的节点都已连接(注意:这与图 9.3 中构造支撑树的过程是相同的,但这一过程在每选取一条新边时都要遵守一个特殊的规则)。最终得到的网络就是一棵最小支撑树。

最小支撑树问题的算法

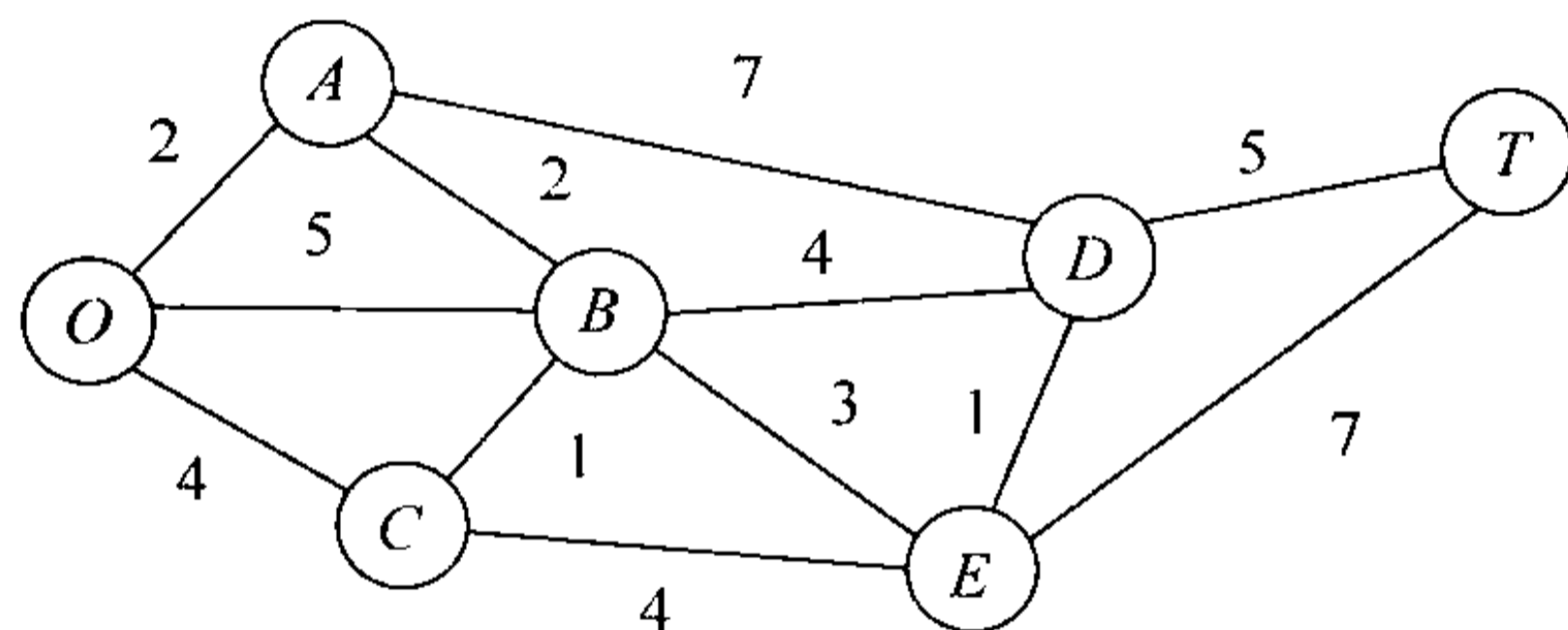
1. 任选一个节点,然后将该节点与离它最近的不同的节点连接(增加一条边)。
2. 确定与已连接节点距离最近的未连接节点,然后连接这两个节点(在它们之间增加一条边)。重复该步骤直至所有的节点都已被连接。
3. 连接的断开:对最近的邻接点(步骤1)或者最近的未被连接的节点(步骤2)的连接都可能任意断开,但是这种算法仍然能得到最优解。然而,这些连接可能是有(但未必有)多个最优解的标志。所有这样的最优解都可以通过继续分析断开连接的所有边而求得。

手工实现本算法最快的方法是下面介绍的图上作业法。

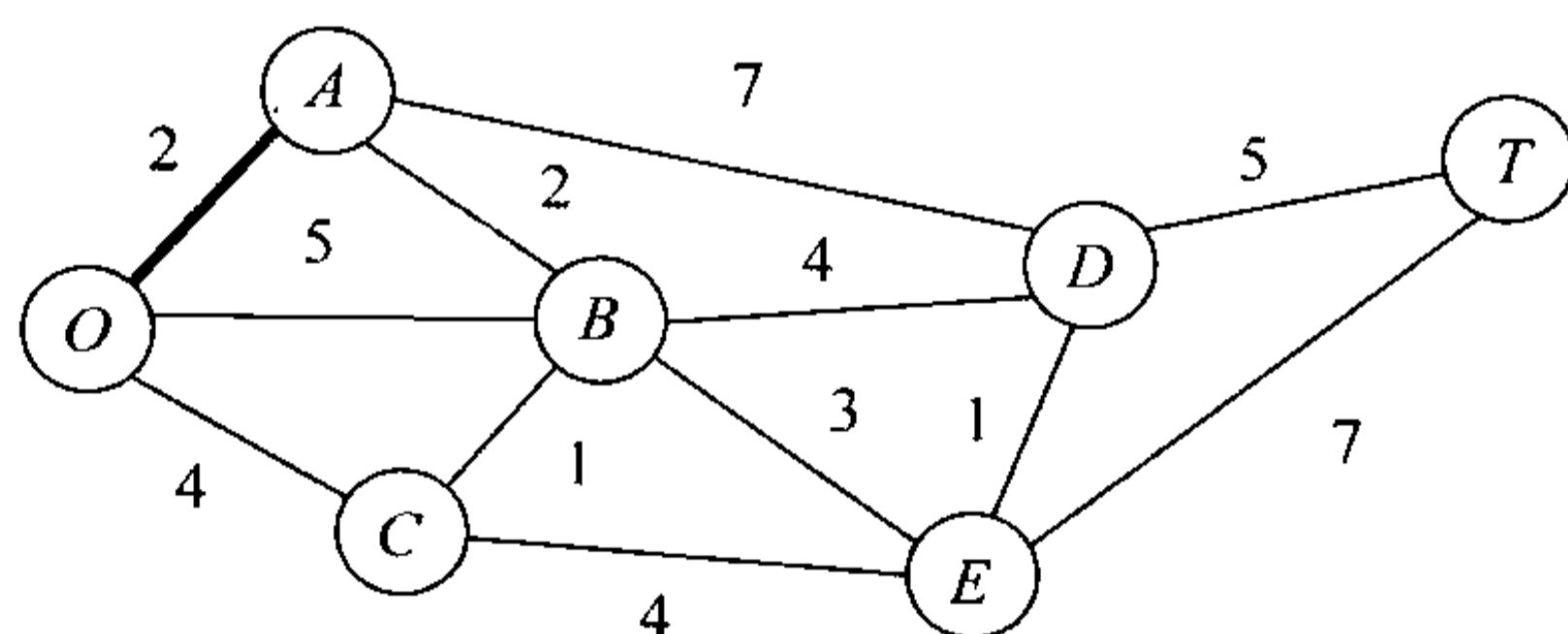
本算法在 Seervada 公园最小支撑树问题上的应用

Seervada 公园的管理部门需要对在哪些道路下铺设电话线来连接公园所有景点的问题做出决策,该决策要使铺设电话线路的总长度最短。利用图 9.1 所给的数据,我们逐步简略给出这个问题的解答。

该问题中的节点和节点间的距离如下图所示,其中细线在这里表示节点间潜在的边。



任选节点 O 作为初始节点。未连接的节点中与节点 O 距离最小的节点是 A , 连接节点 O 和节点 A 。

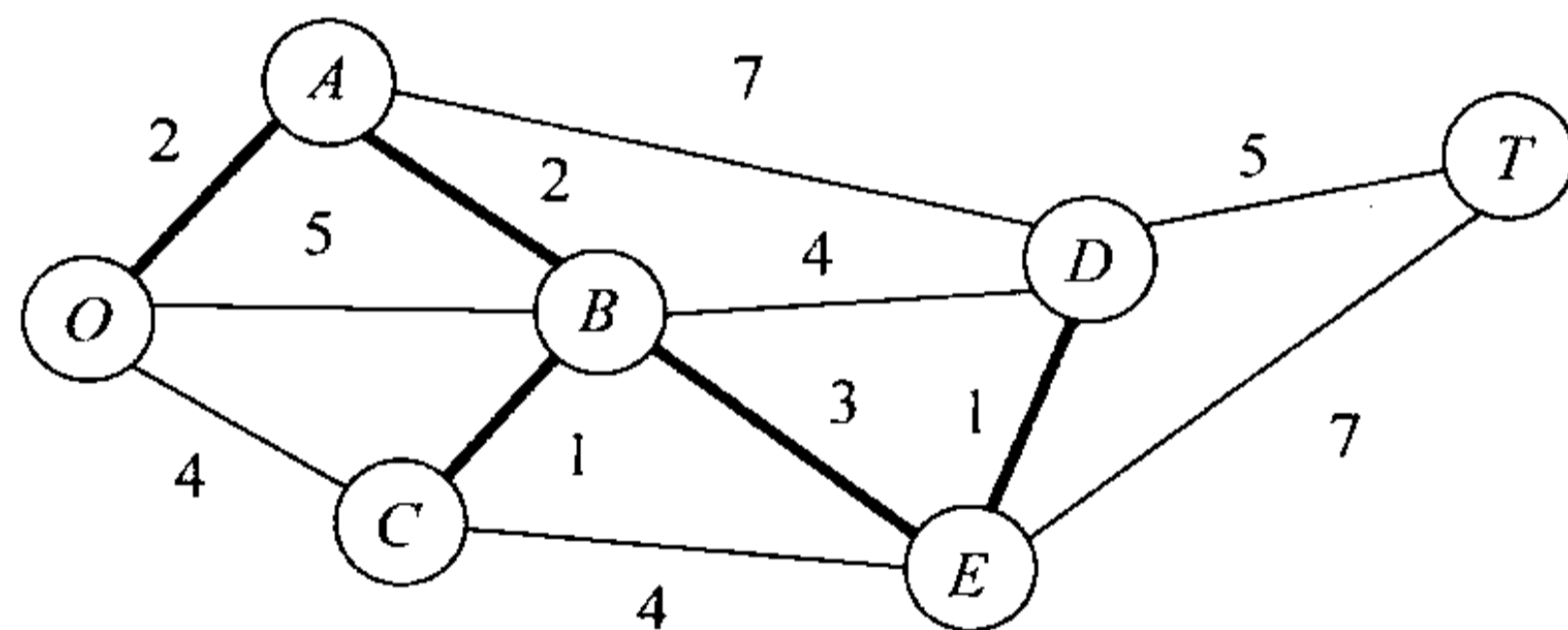
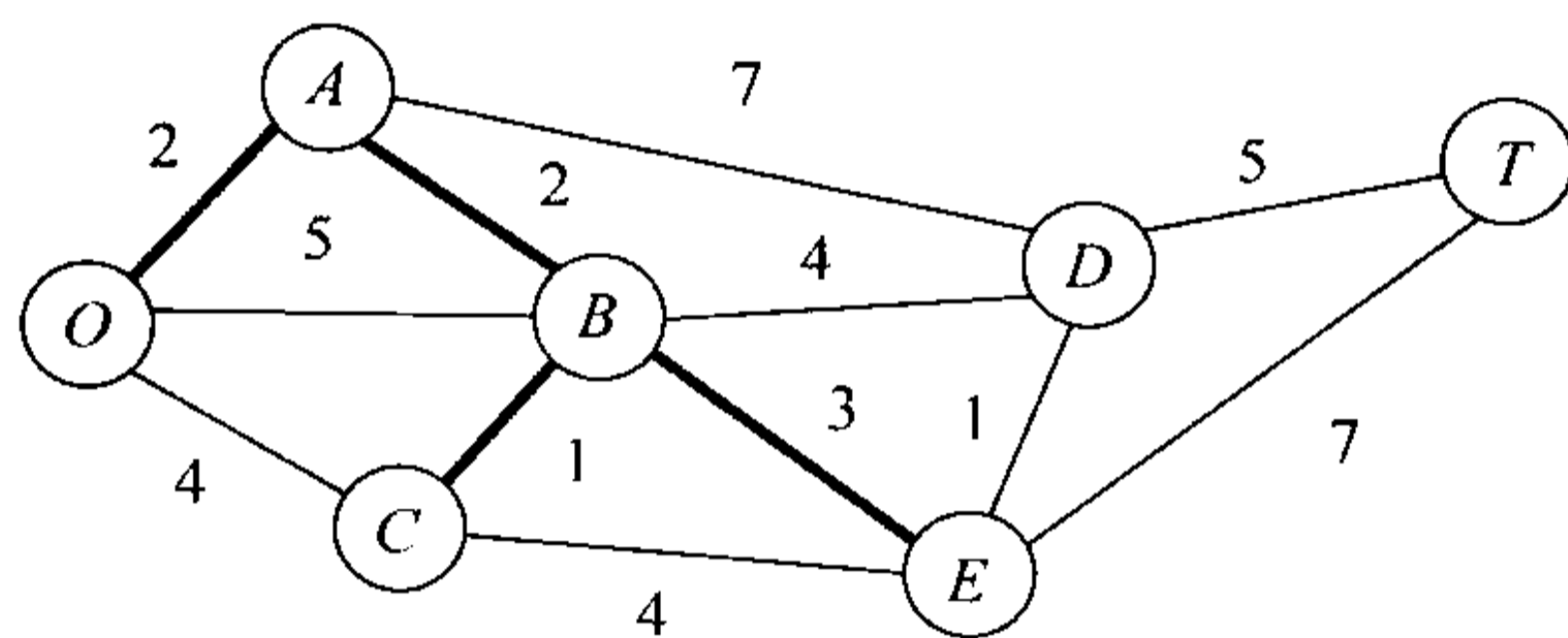
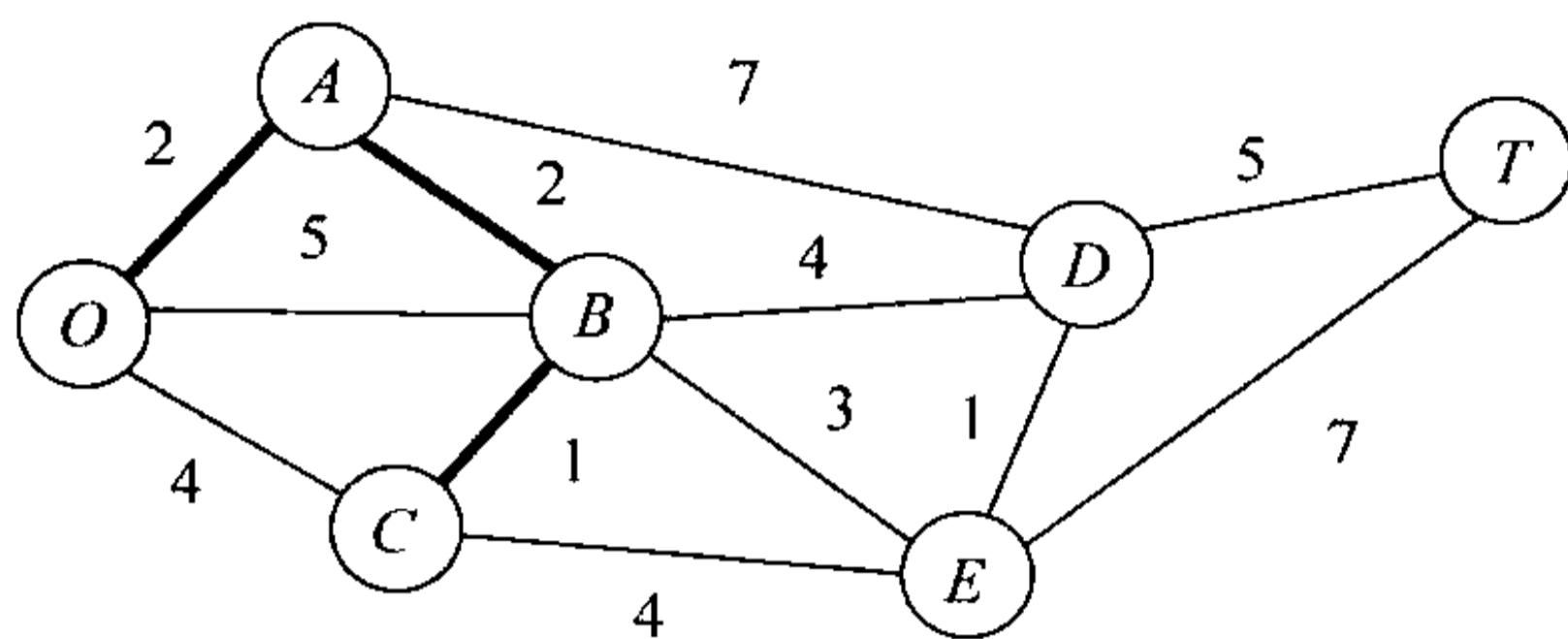
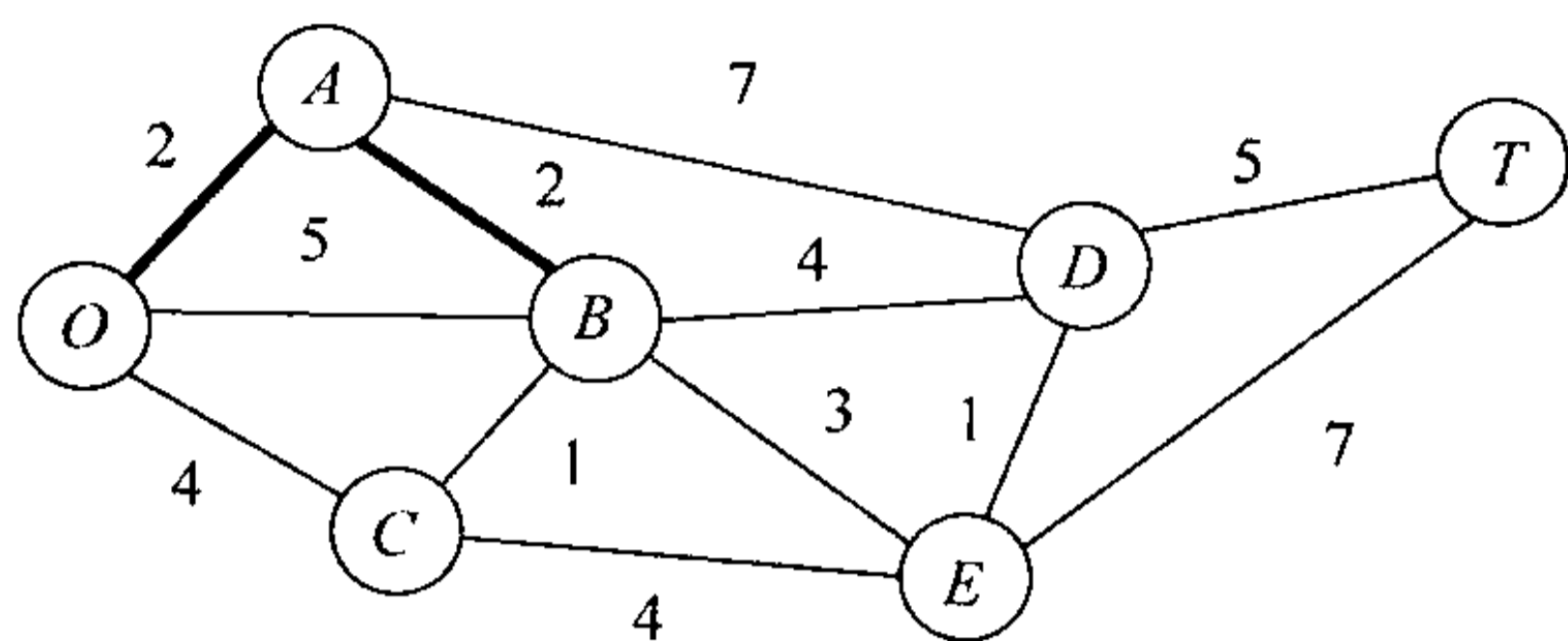


未连接的节点中与节点 O 或节点 A 距离最小的节点是节点 B (距离节点 A 最近), 连接节点 A 与节点 B 。

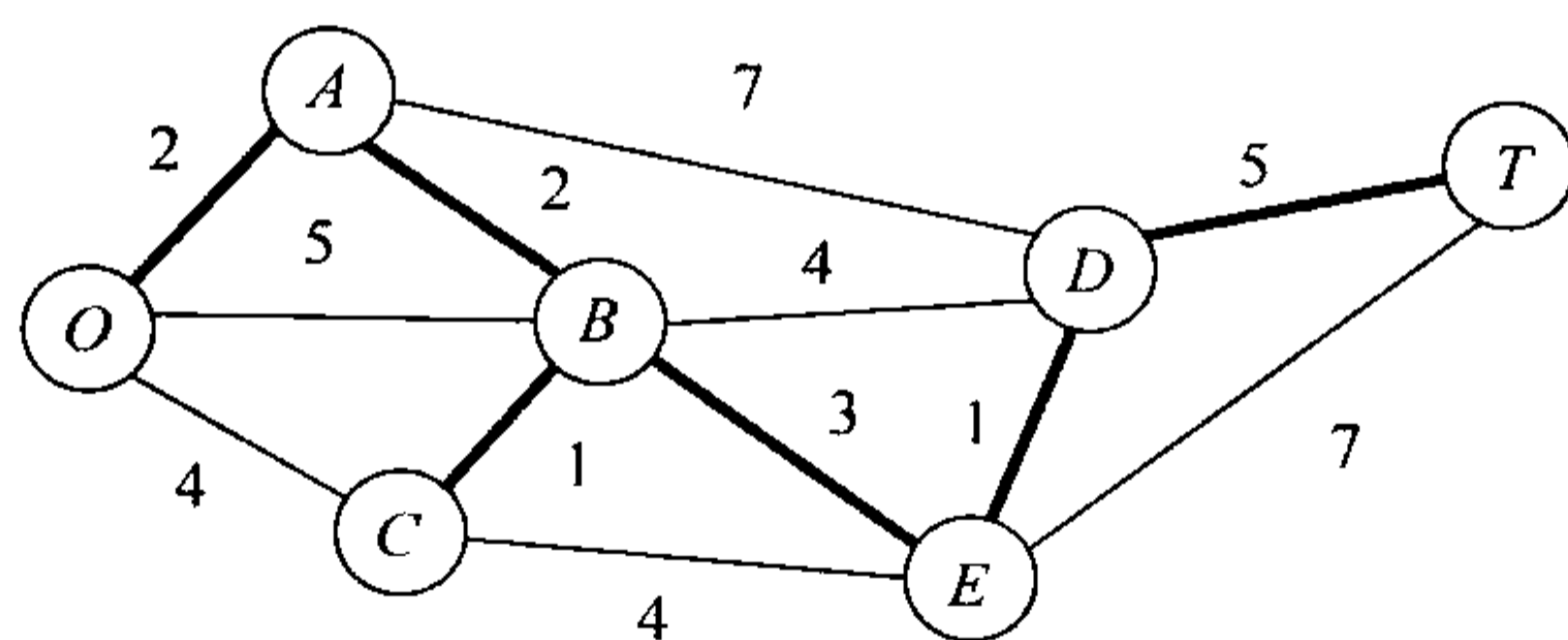
未连接的节点中与节点 O 、节点 A 或节点 B 距离最小的节点是节点 C (距离节点 B 最近), 连接节点 B 与节点 C 。

未连接的节点中与节点 O 、节点 A 、节点 B 或节点 C 距离最小的节点是节点 E (距离节点 B 最近), 连接节点 B 与节点 E 。

未连接的节点中与节点 O 、节点 A 、节点 B 、节点 C 或节点 E 距离最小的节点是节点 D (距离节点 E 最近), 连接节点 D 与节点 E 。



最后剩余一个未连接的节点 T 。节点 T 与节点 D 距离最小。连接节点 T 与节点 D 。



现在所有的节点都已连接,因此得到了问题的最优解。电话线路的总长度为 14 英里。

尽管看上去初始节点的选取好像会对最终结果(即电话线路的总长度)产生影响,但实际上并不会。我们建议你本例而言,选取异于节点 O 的初始节点重复本算法,来证明这个事实。

最小支撑树问题是本章讨论的网络设计问题之一。在这一领域内,目的是为给定的应用问题(最常见到的是交通系统)设计最适合的网络,而不是分析已经设计好的网络。参考文献 6 提供了关于这一重要领域的一项调查。



9.5 最大流问题

现在让我们回忆一下我们在 Seervada 公园管理中遇到的第三个问题(参见 9.1 节),即在旅游旺季客流量高峰期,如何决定从公园入口(图 9.1 中 O 点)到旅游景点(T 点)的电瓶车线路(每趟电瓶车将会按原出发路线返回,所以我们只关注出发路线)。为了避免过度破坏生态平衡和野生动物的生活区域,公园严格限制每条路上每天流入的电瓶车次数(不能形成有向环,终点是 T 点)。对于每条路来说,旅游方向已经用箭头表示出来,见图 9.6。每个箭头上标出的数字给出了每天允许从出发点输送的最大电瓶车趟数。在这些限制下,一个可行的方案是每天开放 7 趟电瓶车,其中 5 趟用于路线 $O \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow T$, 1 趟用于路线 $O \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow T$, 另一趟用于 $O \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow T$ 。然而,由于这种方案阻止了其他任何以 $O \rightarrow C$ 起始的路线(因为路线 $E \rightarrow T$ 和路线 $E \rightarrow D$ 已经到达了最大能力),所以很容易找到其他更好的可行方案。需要考虑的问题是怎样使每天各路输送旅客趟数达到最大。这类问题就称为最大流问题。

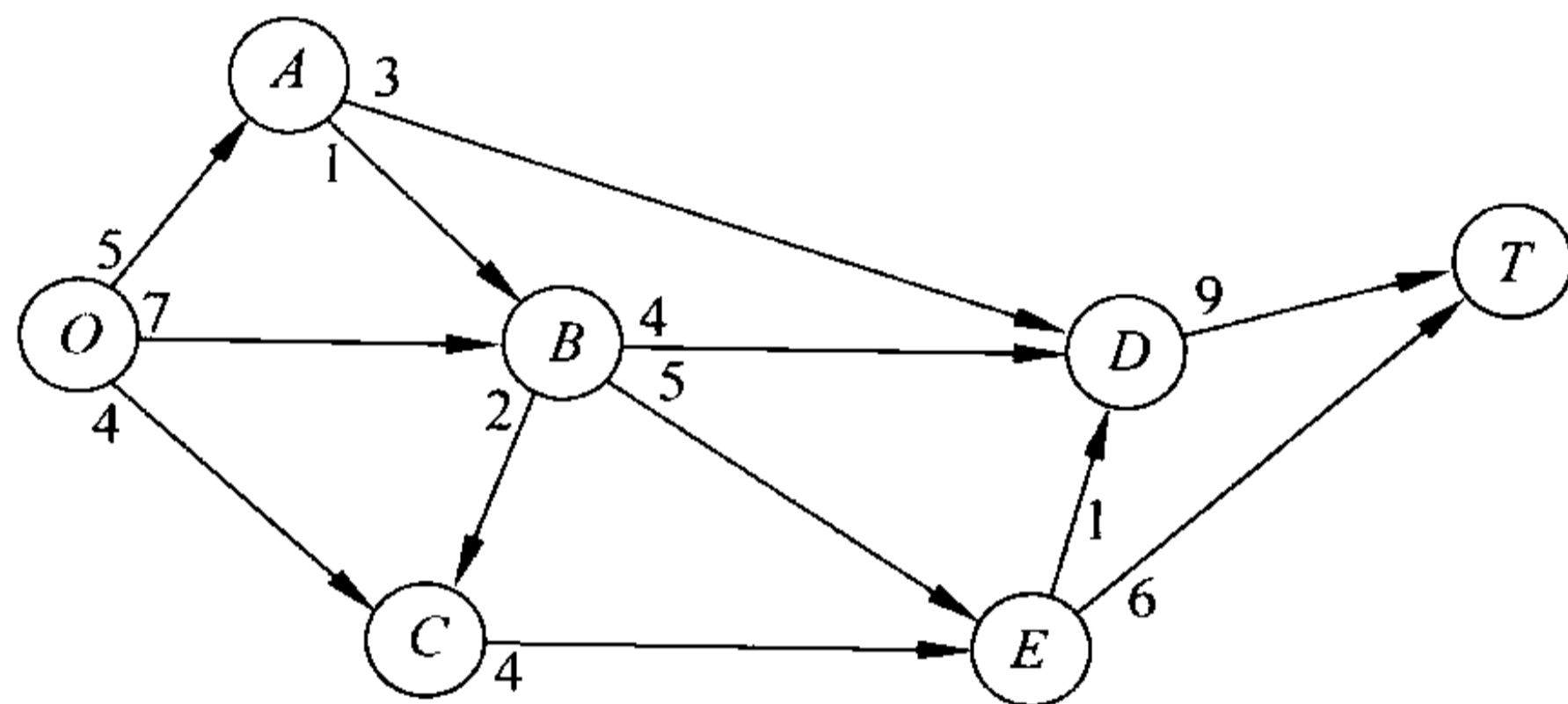


图 9.6 Seervada 公园最大流问题

用更具概括的方式可将最大流问题归纳如下。

1. 所有流经网络(有向且连通)的流都起源于同一点,称为**发点(源)**(source),终止于另一个点,称为**收点(汇)**(sink)(在 Seervada 公园问题中,发点和收点分别是公园的入口 O 和旅游景点 T)。

2. 剩余的其他点称为中间点(如在 Seervada 公园问题中的 A 点、 B 点、 C 点、 D 点和 E 点)。

3. 流的方向由箭头标明,弧的容量就是允许的最大流量。在发点,所有的流都从这一点发出。在收点,所有的流都指向这一点。

4. 问题的目标是使从发点到收点的总流量达到最大。该值可以由两种等价的方式来衡量,即发点的流出量或收点的流入量。

一些应用

下面是最大流问题的几类应用。

1. 公司配送网络中,使从工厂到客户的流量(运送量)最大化。
2. 公司供应网络中,使从供应商到工厂的流量(运送量)最大化。
3. 使石油管道系统的石油流量最大化。

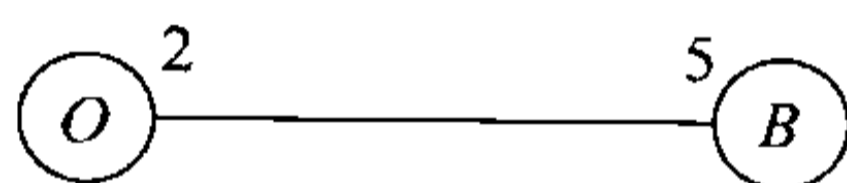
4. 使沟渠系统的水流量最大化。
5. 使交通网络的车流量最大化。

尽管最大流问题中仅有一个发点和一个收点,但是,在这些实际应用中,流可能来自多点,并终于多点。例如一个公司的配送网络通常有多个工厂和多个客户。解决方法是在始网络中引入一个虚拟发点、一个虚拟收点和一些新的弧。虚拟发点被看做网络中所有流的开端,在虚拟发点与实际起源点之间添加一些开始于虚拟发点的弧,令这些弧的容量等于网络中流量的最大值,也就是能从这些点发出最大的流量。类似的,虚拟收点被看做所有流的终点,在虚拟收点与实际终点之间添加一些指向虚拟收点的弧,令这些弧的容量等于网络中流量的最大值,也就是这点能发出最大的流量。变化后原网络中的所有点均变为中间点,于是该扩展了的网络也只有一个必需的发点和收点,从而适合最大流问题。

一个算法(标号法)

由于最大流问题可归结成线性规划问题(见习题 9.5-2),所以可用单纯形法求解。第3章和第4章介绍过的线性规划软件包都是可以使用的。然而,一个更有效的增广链算法用来求解这类问题。这种方法建立在两个直观的概念之上:剩余网络和增广链。

在一些流量被分配到弧中后,剩余网络(residual network)显示了可用来额外分配的剩余的弧容量[称为剩余容量(residual capacities)]。例如,考虑图 9.6 中 $O \rightarrow B$,它的弧容量为 7。假设通过这条弧的流量已分配为 5,则 $O \rightarrow B$ 的剩余容量为 $7 - 5 = 2$,即可再分配给 $O \rightarrow B$ 上的流量为 2,这种状态可用下面的剩余网络来描述。



节点旁边的数字给出了从该节点到另一节点弧的剩余容量。也就是说从 O 到 B 的剩余容量为 2。而右边的 5 则表示可分配到从 B 到 O 的剩余容量(即抵消了先前分配给 $O \rightarrow B$ 的流量)。

最初,在未分配任何流之前,Seervada 公园最大流问题的剩余网络情况如图 9.7 所示。原始网络上的每条弧(如图 9.6 所示)都从有向弧变成了无向弧。但原来方向上的弧容量并未改变,而其相反方向的弧容量则是零,所以原来的弧流量限制没有改变。

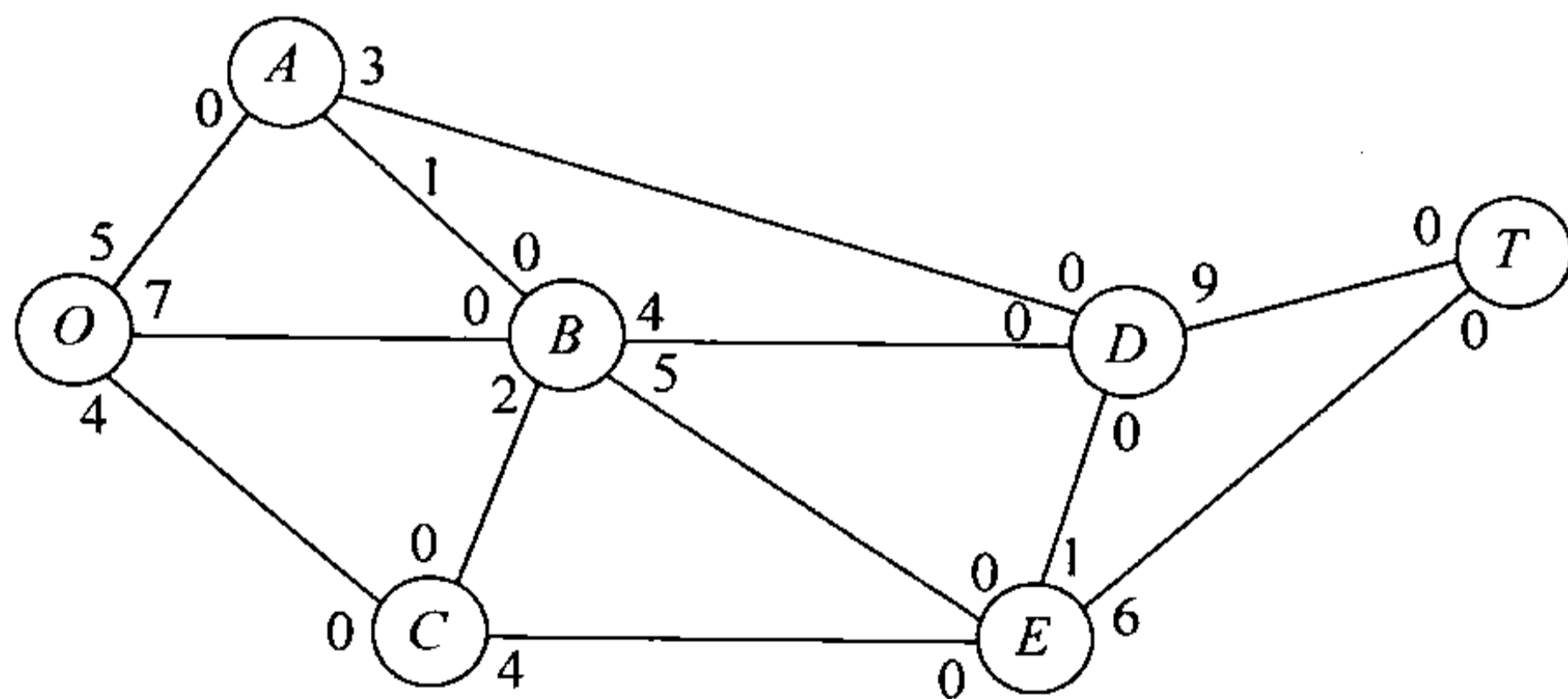


图 9.7 Seervada 公园最大流问题最初的剩余网络

接下来,每当一个流量分配给某个弧后,与该流量同向弧的剩余容量就减少该流量,而与该流量反向的弧的剩余容量则加上该流量。

在剩余网络从发点到收点的一条正向链中,如果每条弧都有非零剩余容量,则称该链为增广链(augmenting path)。其中最小的剩余容量为该增广链的剩余容量,因为它表示还可以加到该链上的流量。因此,每个增广链都为初始网络增加流提供了机会。

增广链算法重复地选取某一增广链并将该增广链的剩余容量增加到原来的网络中。反复进行,直到找不出增广链为止。此时,从发点到收点的流量将不能进一步增加。确保最终解的关键是利用增广链抵消原网络中先前分配的流。所以不区别流量的路径选择是不能充分优化流量组合的。

综上所述,算法的这次迭代由以下三个步骤组成。

最大流问题的增广链算法^①

1. 通过寻找剩余网络中从发点到收点的正向链中每个弧上都有非零剩余容量的链而找到增广链(如果不存在增广链,该网络已达到最大流)。

2. 找出增广链中弧的最小剩余容量 c^* ,这就是该增广链的剩余容量,在该增广链中增加流量为 c^* 的流。

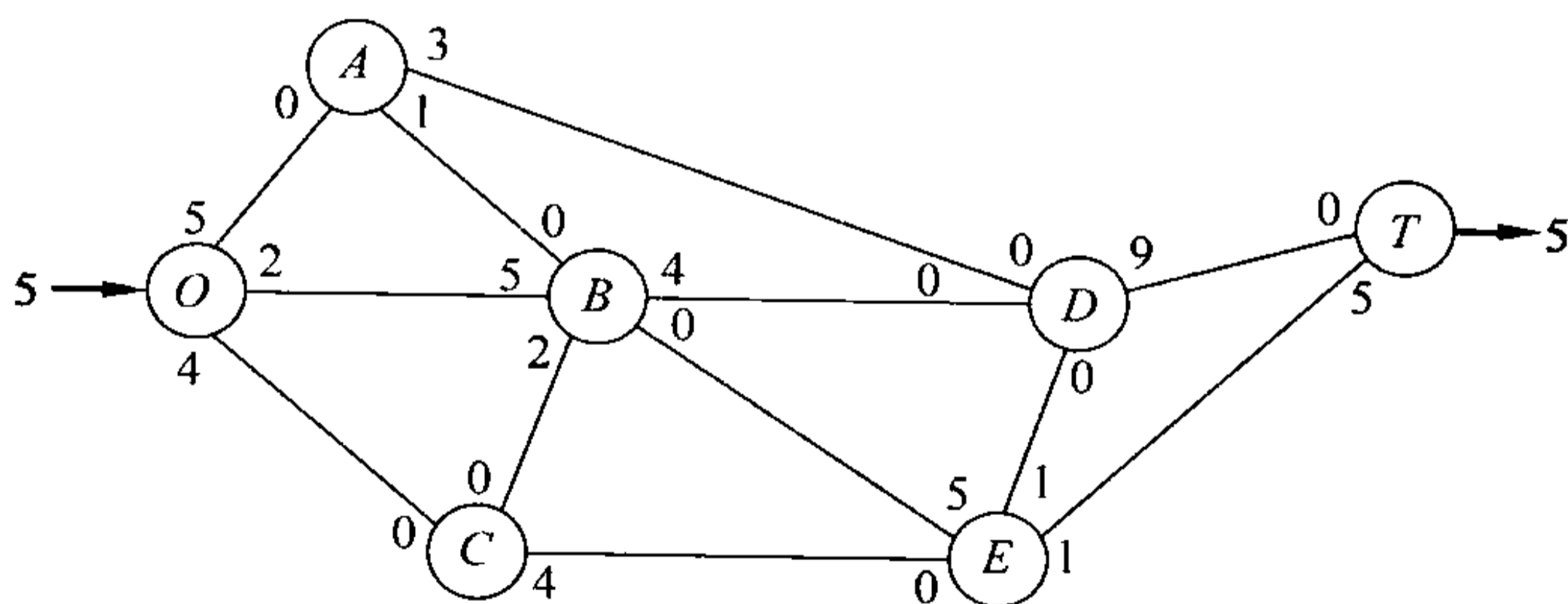
3. 在增广链的每个正向弧的剩余容量中减去 c^* ,而在每个反向弧的剩余容量中加上 c^* 。返回步骤 1。

在进行步骤 1 时,往往有很多增广链可供选择。在用这种方法解决大规模问题时,增广链的正确选择对解决问题的效率是至关重要的,但这里我们暂不深入研究(下一节将介绍一个寻找增广链的系统的步骤)。因此,在下面的例子(以及本章最后的习题)中,可随意地选取增广链。

应用这种算法求解 Seervada 公园最大流问题

下面我们应用这种方法求解 Seervada 公园最大流问题(如图 9.6 所示的初始网络),并把结果总结推广(该算法的另一个应用例子见本书网站的工作例子部分)。从图 9.7 给出的初始的剩余网络开始,通过几次迭代给出新的剩余网络,从 O 到 T 的总流量用粗线标出。

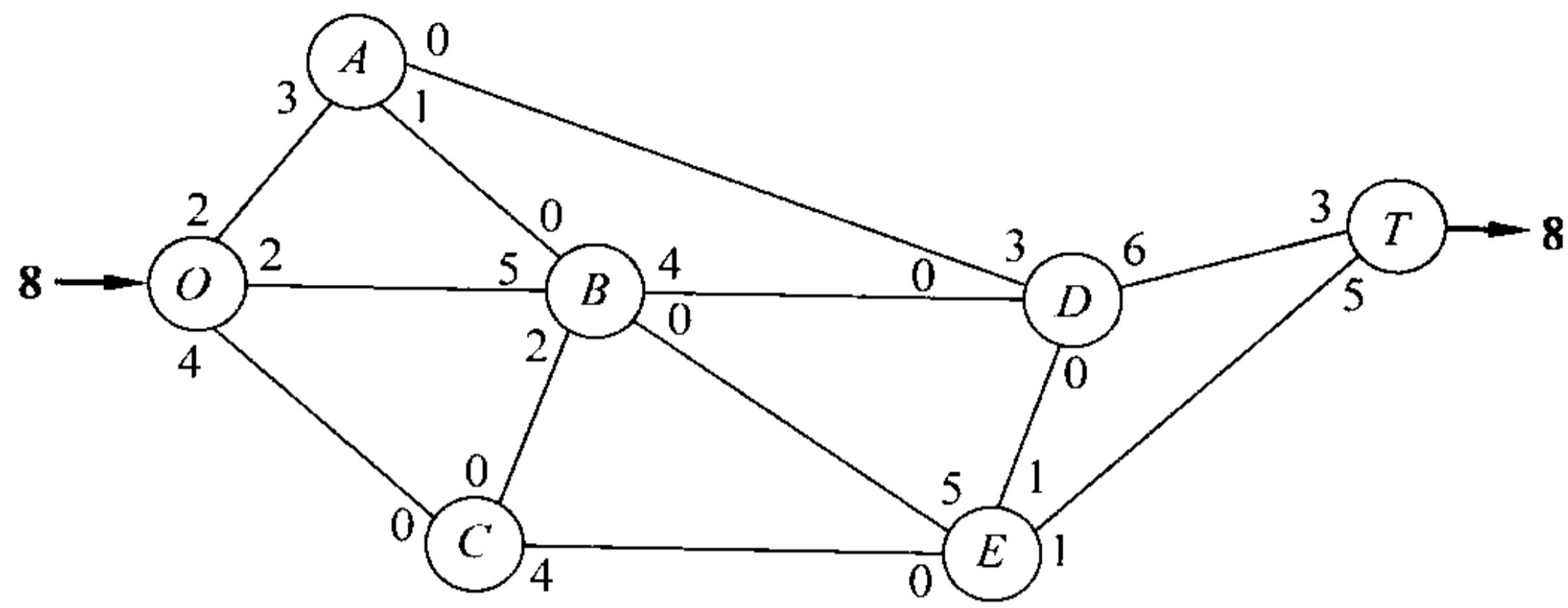
第一次迭代:在图 9.7 中,其中一条增广链是 $O \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow T$,它的剩余容量为 $\min\{7,5,6\}=5$ 。分配给这条路线 5 单位的流量,产生新的剩余网络。



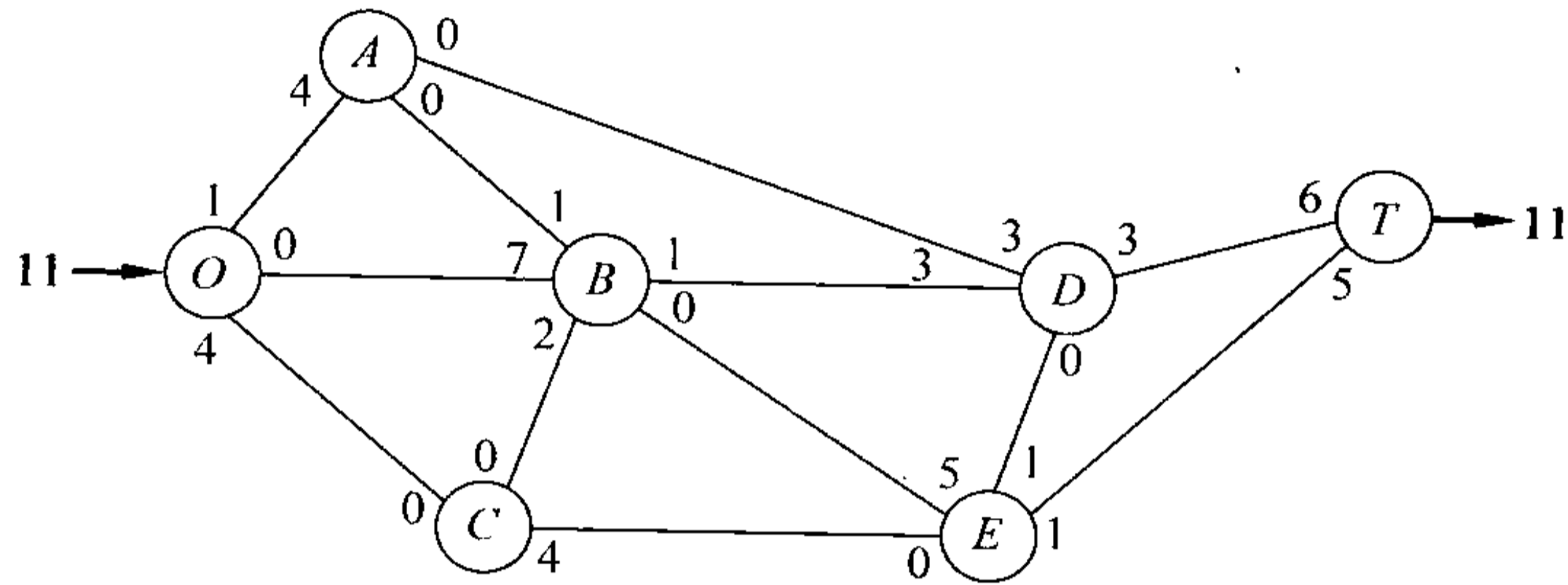
第二次迭代:分配 3 单位的流量给增广链 $O \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow T$,得到新的剩余网络。

第三次迭代:分配 1 流量给 $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$ 。

^① 假定弧的容量为整数或有理数。

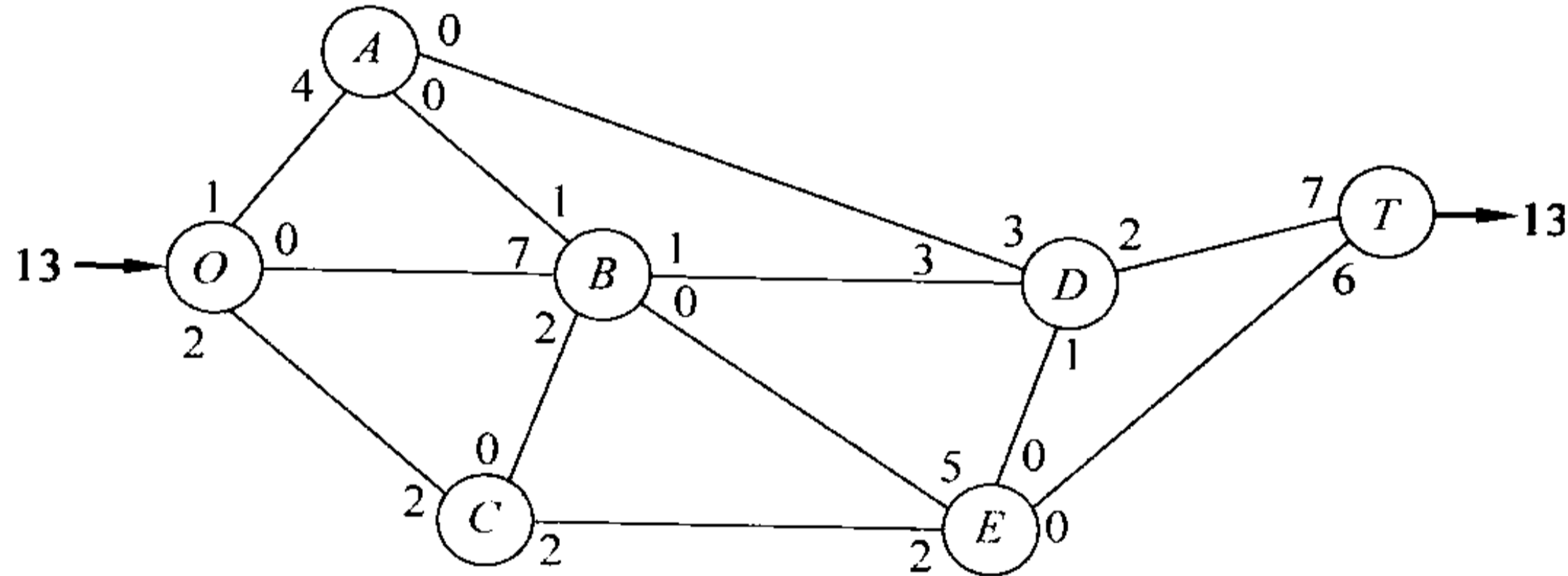


第四次迭代：分配 2 流量给 $O \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$ ，得到新的剩余网络。

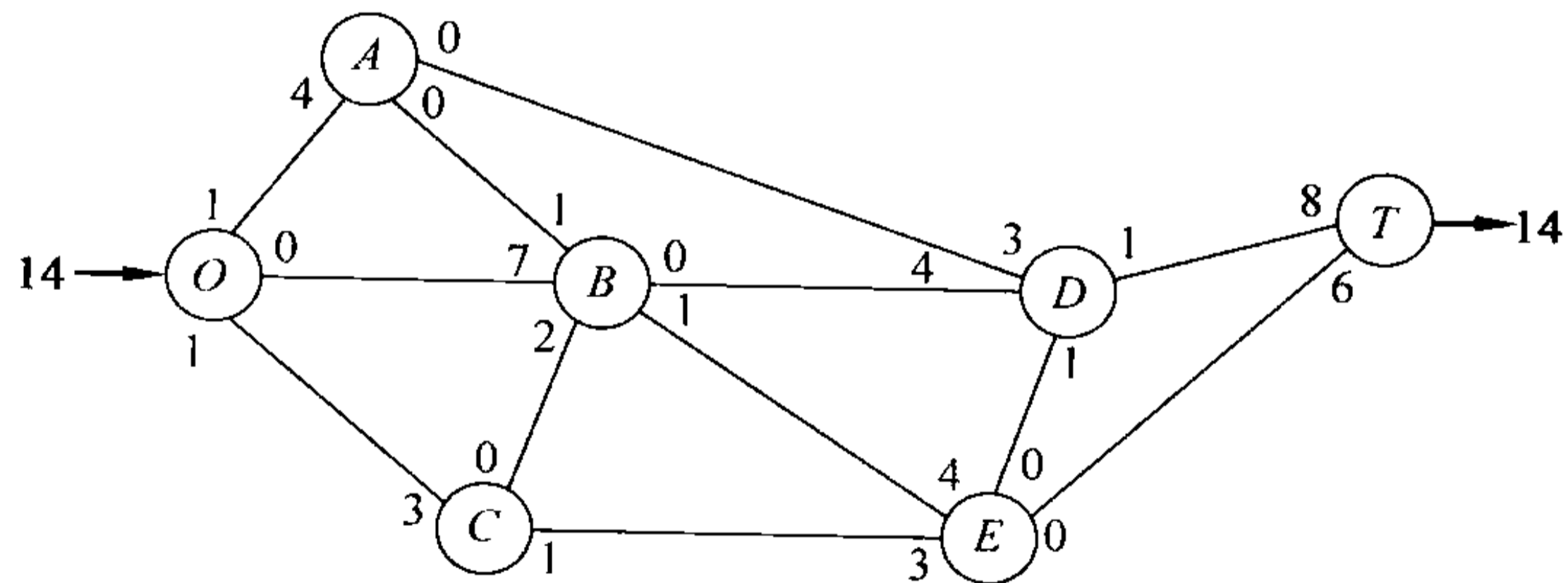


第五次迭代：分配 1 流量给增广链 $O \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow T$ 。

第六次迭代：分配 1 流量给 $O \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow T$ ，得到新的剩余网络。



第七次迭代：分配 1 流量给增广链 $O \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$ ，得到剩余网络。



已经没有增广链了，所以现在的流量方式是最优的。

这种方式可以通过流量分配的积累结果或最后剩余容量和原来的弧容量的比较来辨别。如果我们使用后面介绍的方法，若最后的剩余容量比原来的容量小，将有沿着一条弧的流存在。这个流的大小等于上面两容量的差。通过对从最后一步迭代中得到的剩余网络与图 9.6 或图 9.7 进行比较，这种方法得到的最优流量方式如图 9.8 所示。

这个例子很好地解释了用剩余网络的一条无向弧替代初始网络图中每条有向弧的原因，以及当有流量 c^* 分配到 $i \rightarrow j$ 时，会将 $j \rightarrow i$ 的剩余容量增加 c^* 的原因。如果没有这

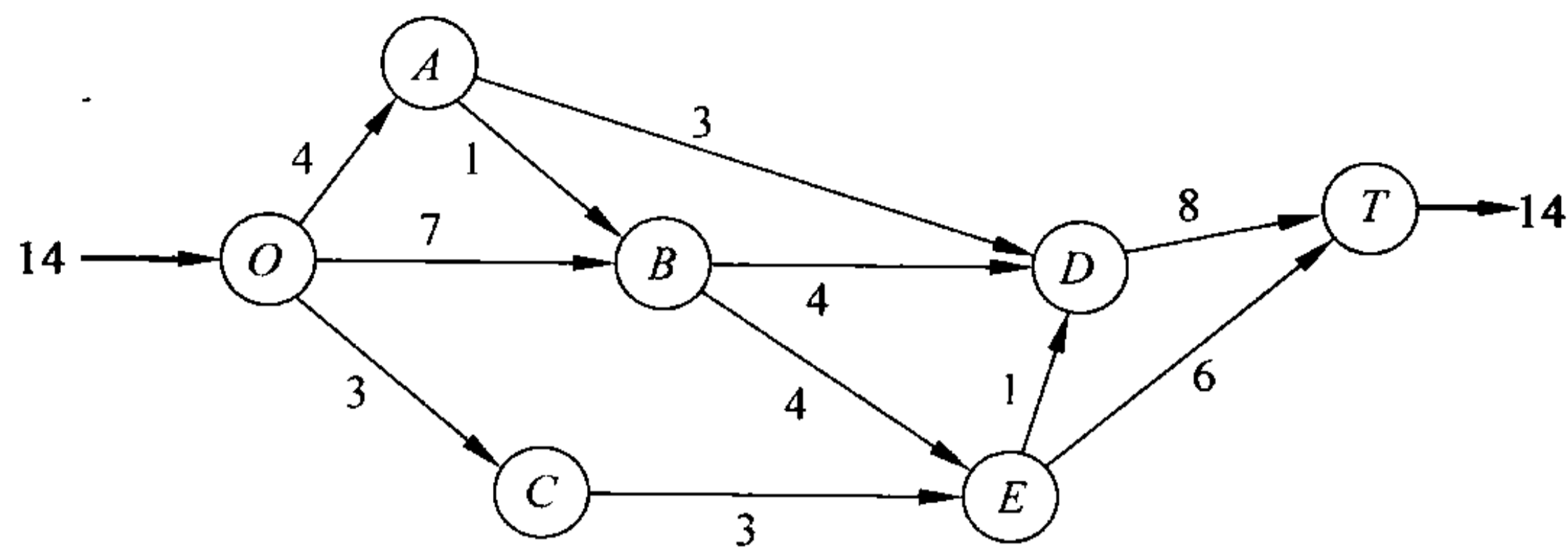


图 9.8 Seervada 公园最大流问题的最优解

个巧妙的设计,前六个迭代将无法进行。但是,从这一点上来讲,就不会存在增广链了(因为没有使用过的 $E \rightarrow B$ 的弧容量为 0)。因此,这个设计允许我们在第七次迭代中增加 1 单位流量到 $O \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$ 中。事实上,增加的流量使在第一次迭代中分配给 $O \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow T$ 的流量减少了 1,取而代之的是分别将 $O \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$ 和 $O \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow T$ 的流量增加 1。

寻找一条增广链

当涉及一个大网络时,这个算法的最大困难是寻找一条增广链。我们可以通过下列系统化的步骤进行简化。首先确定能够通过一条弧到达发点的所有节点,且这条弧具有严格正值的剩余容量。然后,对上面找到的每个节点(已经到达的),确定所有新的能够通过一条弧到达的节点(从那些还未到达的节点中选取),这条弧也需具有严格正值的剩余容量。对于每一个新的到达节点重复上述操作。结果可以得到一个包含所有节点的树,这些节点能够沿着一条具有严格正值的剩余容量的链到达发点。从而,如果增广链存在,通过这种展开式的过程总可以找到一条增广链。这个过程如图 9.9 所示,其中的剩余网络是前例中第六次迭代后所得到的结果。

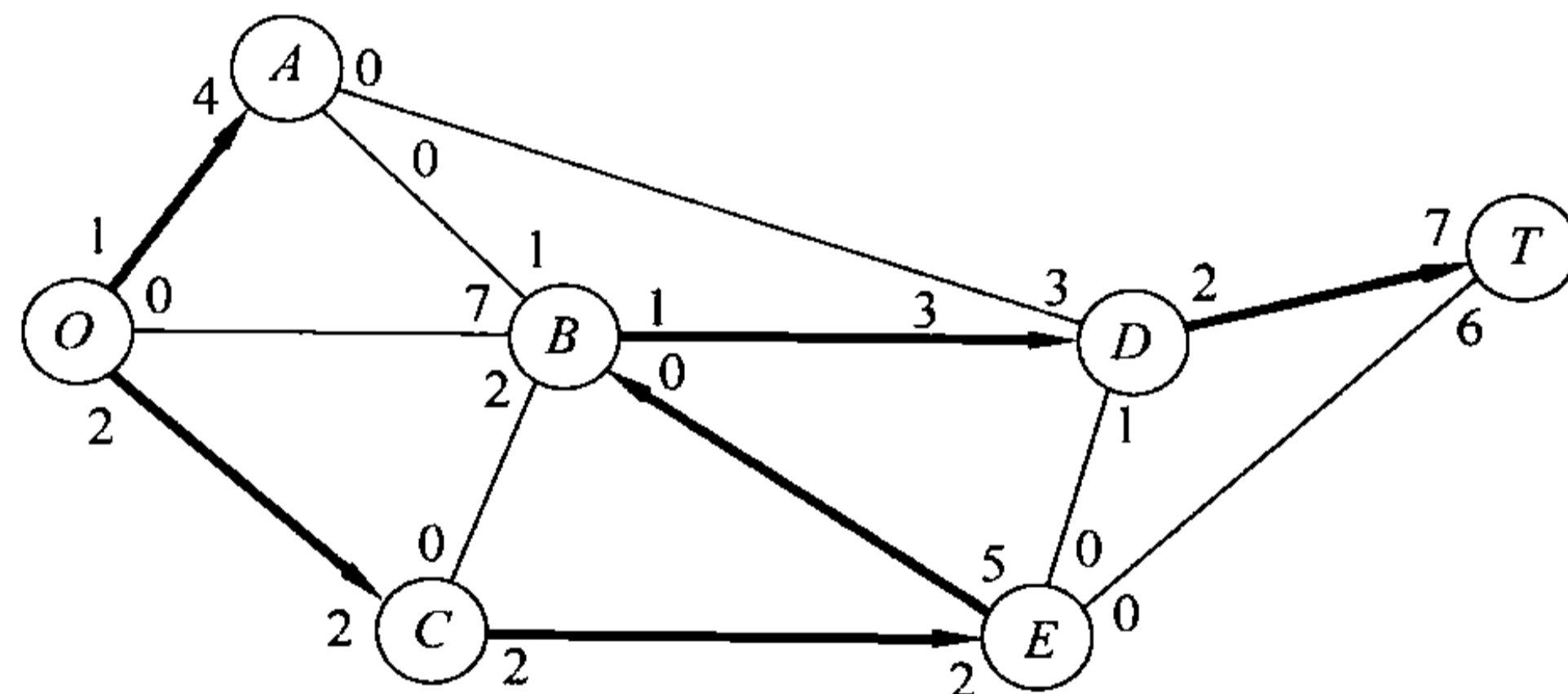


图 9.9 为 Seervada 公园最大流问题第七次迭代寻找增广链的过程

尽管图 9.9 所示的过程比较简单,但有助于我们意识到无须费力去搜索不存在的链就知道何时得到了最优解。一个被称为最大流最小割定理的重要定理也许能帮助我们理解这个问题。一条割(cut)可以定义为:任何一个至少包含一条由源点指向收点的有向链中一条弧的有向弧集。有很多切割网络得到割来分析网络的方法。对于任一给定的割,割值(cut value)是指它所包含的所有弧的容量之和。最大流最小割定理(max-flow min-cut theorem)指出,对于任意一个只含一个发点和收点的网络,从发点到收点的最大可行流等于网络所有割的最小割值。因此,如果我们用 F 来表示从发点到收点的任何可行流的流量,任意一个割都将为 F 提供一个上界,从而最小割值等于 F 的最大值。因此,

如果一个当前网络中存在一个割值与 F 相等的割, 则当前的流量分配方式就是最优的。当剩余网络图中存在一个值为零的割时, 也可获得最优方案。

为了说明上面的方法, 请大家观察图 9.7 中的网络图。网络的其中一条割标在图 9.10 上。注意, 这个割的值是 $3+4+1+6=14$, 这就是上面所求得的 F 的最大值, 所以这条割就是最小割。同样也要注意, 在第七次迭代所产生的剩余网络中, $F=14$, 相应割的值为 0。如果已经发现了这一点, 就没有必要再去寻找另处的增广链了。

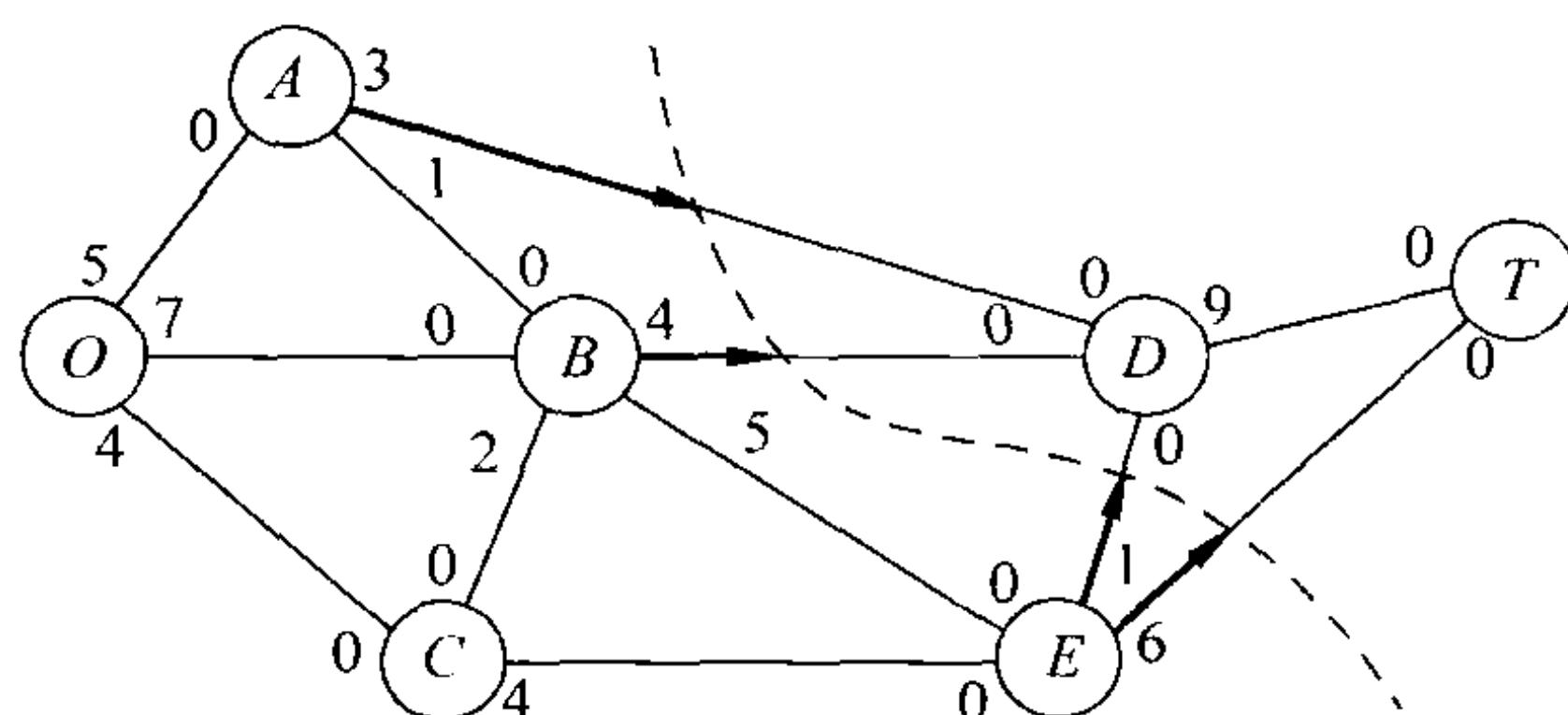


图 9.10 Seervada 公园最大流问题的最小割

用 Excel 来表达和求解最大流问题

大部分来源于实践的最大流问题规模都是远远大于 Seervada 公园问题的。有些问题有数以千计的点和弧。刚刚展示的增广链算法在解决如此大规模的问题时远比单纯形法更加有效。然而对于规模适中的问题, 运用基于单纯形法的 Excel 来求解是比较合理和便捷的。

图 9.11 显示了如何用电子表格来归结和求解 Seervada 公园最大流问题。格式与图 9.4

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Seervada Park Maximum Flow Problem										
2											
3		From	To	Flow		Capacity		Nodes	Net Flow		Supply/ Demand
4		O	A	4	<=	5		O	14		
5		O	B	7	<=	7		A	0	=	0
6		O	C	3	<=	4		B	0	=	0
7		A	B	1	<=	1		C	0	=	0
8		A	D	3	<=	3		D	0	=	0
9		B	C	0	<=	2		E	0	=	0
10		B	D	4	<=	4		T	-14		
11		B	E	4	<=	5					
12		C	E	3	<=	4					
13		D	T	8	<=	9					
14		E	D	1	<=	1					
15		E	T	6	<=	6					
16											
17				Maximum Flow		14					

Range Name		Cells
Capacity	F4:F15	
Flow	D4:D15	
From	B4:B15	
MaxFlow	D17	
NetFlow	I4:I10	
Nodes	H4:H10	
SupplyDemand	K5:K9	
To	C4:C15	

图 9.11 求解 Seervada 公园最大流问题的电子表格, 图中变化单元格 Flow(D4 : D15) 为由 Excel Solver 得到的最优解, 目标单元格 MaxFlow(D17) 给出了网络的最大流。电子表格左边的网络图为原在图 9.6 给出的 Seervada 公园的最大流问题。

的 Seervada 公园最短路径问题相似。在 B 列和 C 列列出弧,在 F 列列出相对应的弧容量。决策变量是各个弧的流量,其数值通过可变单元格 Flow(D4 : D15)输入。通过图右下角给出的公式,用这些流量计算每个节点产生的净流量(见 H 列和 I 列)。根据求解对话框中的第一组约束(I5 : I9 = SupplyDemand),中间节点的净流量(A、B、C、D 和 E)应该为 0。第二组约束($\text{Flow} \leq \text{Capacity}$)限制了弧容量。从发点(O 点)到收点(T 点)的总流量必须与由发点产生的流量(单元格 I4)相等,所以目标单元格 MaxFlow(D17)应等于单元格 I4。在指定目标单元格最大化的目标后,点击 Solve 按钮,获得的最优解就显示在 Flow(D4 : D15)中。



9.6 最小费用流问题

最小费用流问题在网络优化模型中具有核心的位置,因为它不仅具有广泛类型的应用,而且可以被极其有效地求解。与最大流问题类似,它关注的是通过有弧容量限制的网络的流量问题。与最短路径问题类似,它关注经过一条弧的流量的费用(或距离)。类似于第 8 章的运输问题或分配问题,它能够研究具有多个发点(供应节点)和多个终点(需求节点)的问题,同时还考虑费用问题。事实上,在此前学习的四个问题都是特殊形式的最小费用流问题,我们将做扼要的证明。

最小费用流问题之所以能够有效地求解,是因为它能转化为线性规划模型,所以能够使用单纯形法的简化方式,即网络单纯形法来求解。我们将在下一节描述这一算法。

最小费用流问题描述如下:

1. 网络是有向的,并且是连通的;
2. 至少有一个节点是供应节点;
3. 其他节点中至少有一个是需求节点;
4. 剩余的其他节点都是中间节点;
5. 一条弧的流向只允许按箭头所指的方向,其最大流量由该弧的容量给出(如果两个方向上都有流,则表示存在一对方向相反的弧);
6. 网络拥有足够的有充分容量的弧,使供应节点产生的所有流量都可以到达所有的需求节点;
7. 经过每条弧的流的费用与其流量成正比,流的单位费用是已知的;
8. 目标是在满足给定需求的前提下,使得通过网络发送的有效供给的总成本最小(目的是从中获取最大利益)。

一些应用

或许最小费用流问题的最重要应用是一个公司配送网络的运营。正如表 9.3 第一行所示,这种应用通常涉及货物从货源(工厂等)到转储设施(如有必要),再到客户的运输计划的制订。

表 9.3 最小流程问题的典型应用

应用类型	供应节点	转载节点	需求节点
配送网络运营	货源	中间存储设施	客户
固体废物管理	固体废物源	处理设施	垃圾场
供应网络运营	供应商	中途仓库	加工设施
产品车间组装	车间	某种产品的生产	某一产品的市场
现金管理	在某一时刻的现金来源	短期的投资机会	在某一时间的现金需求

应用案例

任何一家大型航空公司每天均要面对一个特殊挑战,即怎样有效弥补飞行时刻表破坏带来的影响。糟糕的天气或机械故障可能破坏飞机的到达和离开。某个航班的延误或取消都会引起连锁性的延误或取消,因该航班而无法保证下一航班的正常起飞。

这种延误和取消可能需要对航班重新分配员工或者是调整计划保证飞机仍然执行各自的飞行航班。2.2节中的应用案例描述了大陆航空公司是如何应用运筹学快速为航班重新分配员工以达到成本最小化目的。然而,要快速解决为航班重新分配飞机需要不同的方法。

一个航空公司在航班延误和取消的情况下有两种方法为航班重新分配飞机。一种方法是更换飞机使随后航班的飞机时刻表能够代替延误或取消的飞机。另一种方法是应用空闲的飞机来代替延误或取消的飞机。然而,当每天发生的延误或取消较多时,快速制订相应的决策是一项艰巨的任务。

联合航空公司在应用运筹学解决该问题方面是一个领先者。对于该问题的建模和求解可以看成是一个最小成本流问题,其中网络中的每个节点代表一条机场,每条弧代表一个航线。模型的目标是保证飞机飞过整个网络,并且使延误和取消所造成的成本最小。当一个状态监控子系统警告操作控制者延误或取消将要发生时,操作者向模型输入必要的输入变量,接着对模型进行求解,模型在几分钟内提供更新后的操作计划。最小化成本流问题的应用减少了大约50%的乘客延误。

资料来源: A. Rakshit, N. Krishnamurthy, and G. Yu: "System Operations Advisor: A Real-Time Decision Support System for Managing Airline Operations at United Airlines," *Interfaces*, 26(2): 50-58, Mar. - Apr. 1996. (以下网址提供本文的链接: www.mhhe.com/hillier.)

对于最小费用流问题的一些应用,所有的转载节点都是处理设施而不是中间存储设施。正如表9.3第二行列出的固体废物处理的例子,通过网络的材料流以固体垃圾的产生为发点,然后到达能将垃圾处理成适合垃圾场处理的形式设施,最后再送到各处垃圾场。因此,目标仍然是做出决策以使总费用最低,只是包括运输费用和处理费用。

在其余的例子中,需求节点也可以看做处理设施。例如,在表9.3的第三行,目标是从不同的可能供应商获得货物,将货物存入仓库(如果需要),然后运到公司的加工场所(工厂等)的过程找出最小费用决策。因为所有供应商提供的供应合计多于公司的需求,因此网络应包括一个虚拟需求节点,接受供应商所有未使用的供应能力。

表 9.3 中的另一个应用实例(产品车间组装)说明弧可以代表实物运输路线以外的东西。这个例子中公司拥有几个工厂(供应节点),可以以不同的成本生产同一种产品。从供应节点出发的每一条弧表示可能的产量在该工厂生产,这条弧指向相应的转载节点。因此,转载节点连接的是工厂可能生产的产品和各自的顾客(需求节点)。目标是决定如何分配各个车间的产量,以使满足需要的产品总费用最小。

表 9.3 的最后一个应用实例(分配现金流)说明了不同的节点可以代表在不同时间发生的事件。在这个例子中,每一个供应节点表示某个时间(或时期),在这个时间公司有某些可用的现金。类似的,每个需求节点表示某个时间(或时期),这时公司将动用这些现金储备。每个节点的需求量代表将会被用到的现金额。其目标是通过在现金宽裕时期将其投资,而使公司获得最大收入。因此,每个转载节点代表在某个短期内投资方式的选择(如存入银行等)。结果网络是获得一个流的序列,安排可用现金、投资、收回投资后使用的时间表。

模型的建立

对于一个有向且连通的网络,其 n 个节点中至少包含一个供应节点和一个需求节点。决策变量是

$$x_{ij} = \text{经过弧 } i \rightarrow j \text{ 的流。}$$

已知的信息包括:

c_{ij} = 流经弧 i 到 j 的流的每单位费用;

u_{ij} = 弧 i 到 j 的弧容量;

b_i = 在节点 i 产生的净流量;

b_i 的价值取决于节点 i 的性质,其中

$b_i > 0$, 若节点 i 为供应节点;

$b_i < 0$, 若节点 i 为需求节点;

$b_i = 0$, 若节点 i 为转载节点。

我们的目标是在满足预定需求的情况下,使通过网络传送的可用供应量的总费用最小。

可用下面的线性规划来表达这个问题。

$$\min \quad Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

s. t.

$$\text{对任意的节点 } i, \text{ 满足 } \sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{j=1}^n x_{ji} = b_i$$

且对任意的弧 $i \rightarrow j, 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$

在节点约束中,第一个求和表示流出节点 i 的总流量,而第二个求和表示流入节点 i 的总流量,所以两者之差就是在这个节点产生的网络流量。

这些节点约束系数的样式是最小费用流问题关键特征。它并不总是那么容易辨别最小流程问题,但归结为这类问题后,约束系数的这一特点给了这类问题一个很好的解决方

式。接下来就可以使用网络单纯形法极为有效地求解了。

在一些应用中,通过每个弧 $i \rightarrow j$ 的流量都必须有下界 $L_{ij} > 0$ 。当这种情况出现时,可以使用一个替代变量 $x'_{ij} = x_{ij} - L_{ij}$,则 x_{ij} 可由 $x'_{ij} + L_{ij}$ 替换,就转换成了上面的非负约束形式。

在网络弧流量中,并不能保证这个问题实际上都有可行的解,这部分取决于弧及弧容量。所以,对一个设计合理的网络,下面的几个主要条件是必要的。

可行解的性质: 最小费用流量有可行解的一个必要条件是: $\sum_{i=1}^n b_i = 0$ 。也就是说,在供应节点产生的总流量等于在需求节点被吸收的总流量。

如果一些应用的 b_i 值违反了条件,通常的解释是供给量或需求量(无论哪一个)表示上界而非精确值。这种情形曾在 8.1 节的运输问题中出现,我们的做法是或增加一个虚拟收点来接收额外供给量,或增加一个发点来产生额外的需求量。现在类似的步骤是或增加一个虚拟需求节点吸收剩余的供给(从这个节点添加到每个供应节点的弧容量 $c_{ij} = 0$),或增加一个虚拟供应节点产生多余的需求量(从这个节点添加到每个需求节点的弧容量 $c_{ij} = 0$)。

对于很多应用来说, b_i 和 u_{ij} 都有整数值,这就要求流量 x_{ij} 也是整数。幸运的是与运输问题一样,由于下面的性质,虽然这个变量没有明确的整数约束,结果仍被确保为整数解。

整数解性质: 对于 b_i 和 u_{ij} 都为整数的最小费用流问题,每个基本可行解(BF)(包括最优解)的所有基本变量也有整数值。

例 图 9.12 给出了最小费用流的一个例子。这个网络实际上是 3.4 节中 Distribution Unlimited 公司的配送网络问题(见图 3.13)。图 3.13 给出了 b_i 和 c_{ij} 的值, u_{ij} 现在给出。 b_i 的值在图 9.12 中的节点附近的方括号内标出,所以供应节点($b_i > 0$)是 A 和 B(公司的两个工厂),需求节点($b_i < 0$)是 D 和 E(两个仓库),转载点($b_i = 0$)是 C(一个配送中心)。 c_{ij} 的值显示在弧旁边。

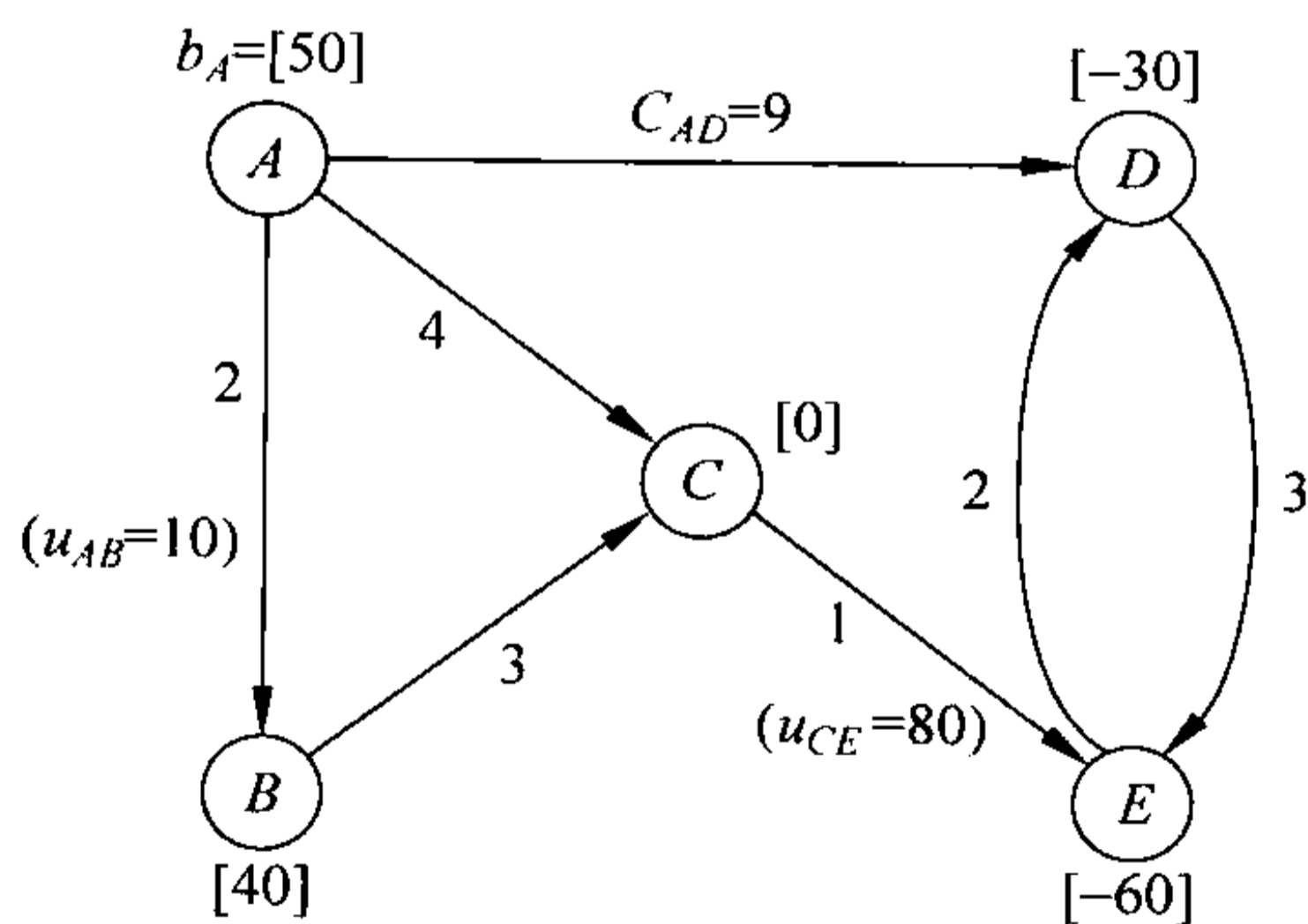


图 9.12 将 Distribution Unlimited 公司的问题看成是一个最低成本流问题

在此例中,除了两条弧以外的弧的容量都超过了总的发生流量(90),所以实际上 $u_{ij} = \infty$ 。这两条例外的弧是弧 $A \rightarrow B$,其中 $u_{AB} = 10$,和弧 $C \rightarrow E$,其中 $u_{CE} = 80$ 。

这个例子的线性规划模型如下

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = 2x_{AB} + 4x_{AC} + 9x_{AD} + 3x_{BC} + x_{CE} + 3x_{DE} + 2x_{ED} \\ \text{s. t.} \quad & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{AB} + x_{AC} + x_{AD} &= 50 \\ -x_{AB} + x_{BC} &= 40 \\ -x_{AC} - x_{BC} + x_{CE} &= 0 \\ -x_{AD} + x_{DE} - x_{ED} &= -30 \\ -x_{CE} - x_{DE} + x_{ED} &= -60 \end{aligned}$$

且 $x_{AB} \leq 10$, $x_{CE} \leq 80$, 所有 $x_{ij} \geq 0$ 。

现在注意在这五个节点约束(等式约束)中的每个变量的系数。每个变量都有两个非零系数,一个是+1,另一个是-1。这个形式出现在每个最小费用流问题中,正是这种特殊的结构导致了整数解性质。

这个特殊结构的另一个含义是节点约束中有(任意)一个是冗余的。原因是对这些约束方程求和后,两端都为零(假设可行解存在,那么 b_i 的总和为零)。只需 $n-1$ 个节点约束方程,恰可为 BF 的解提供 $n-1$ 个基本变量。在下一节中,读者会看到,使用网络单纯形法时,把 $x_{ij} \leq u_i$ 约束看做非负约束,所以基本变量的总个数是 $n-1$ 。这导致了生成树的 $n-1$ 个弧和 $n-1$ 个基本变量一一对应——我们会在后面详细地阐述。

用 Excel 归结和求解最小费用流问题

Excel 为小规模的最小费用流问题提供了一种简便的归结和求解方法,有时较大规模的问题也可使用。图 9.13 展示了具体做法。其格式几乎与图 9.11 的最大流问题一样。不同的是单位费用(c_{ij})现在需要被包含进去(在第 G 列)。因为 b_i 的值要具体分配到每个节点,所以所有节点都必须包括净流量约束。但是,仅有两个弧恰好需要弧容量约束。目标单元格 TotalCost(D12)现在给出的是通过网络的流量(运输量)的总费用,所以 Solver 对话框的具体目标是求这个总费用的最小值。点击 Solver 按钮后,可变单元格 Ship(D4:D10)显示的就是最优解。

对于大多数较大规模的最小费用流问题,下一节将要介绍的网络单纯形法为其提供了一种相当高效的求解方法。这种方法对求解下面简要描述的最小费用流问题也有一定的吸引力。一些数学软件包通常包含了这种算法,比如 CPLEX。

下面我们将用网络单纯形法求解同样的例子。但是,首先让我们看看一些特殊案例是如何适用于最小费用流问题形式的网络的。

特殊案例

运输问题

将 8.1 节中的运输问题归结为一个最小费用流问题,为所有货源提供一个供应节点,且为所有终点提供一个需求节点,但转节点不包括在网络中。所有弧都沿着从供应节点到需求节点这个方向, x_{ij} 表示通过弧 $i \rightarrow j$ 的流量,与从供应节点到需求节点的运输量。流量的单位费用 c_{ij} 等于是单位运输费用 c_{ij} 。因为运输问题对 x_{ij} 没有上界约束,所以所有的 $u_{ij} = \infty$ 。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Distribution Unlimited Co. Minimum Cost Flow Problem											
2												
3		From	To	Ship		Capacity	Unit Cost		Nodes	Net Flow		Supply/ Demand
4		A	B	0	≤	10	2		A	50	=	50
5		A	C	40			4		B	40	=	40
6		A	D	10			9		C	0	=	0
7		B	C	40			3		D	-30	=	-30
8		C	E	80	≤	80	1		E	-60	=	-60
9		D	E	0			3					
10		E	D	20			2					
11												
12		Total Cost		490								

Solver Parameters

Set Target Cell:

Equal To: Max Min

By Changing Variable Variable Cells:

Subject to the Constraints:

\$D\$4 <= \$F\$4
\$D\$8 <= \$F\$8
NetFlow = SupplyDemand

Range Name	Cells
Capacity	F4:F10
From	B4:B10
NetFlow	J4:J8
Nodes	I4:I8
Ship	D4:D10
SupplyDemand	L4:L8
To	C4:C10
TotalCost	D12
UnitCost	G4:G10

	J
3	Net Flow
4	=SUMIF(From,I4,Ship)-SUMIF(To,I4,Ship)
5	=SUMIF(From,I5,Ship)-SUMIF(To,I5,Ship)
6	=SUMIF(From,I6,Ship)-SUMIF(To,I6,Ship)
7	=SUMIF(From,I7,Ship)-SUMIF(To,I7,Ship)
8	=SUMIF(From,I8,Ship)-SUMIF(To,I8,Ship)

Solver Options

Assume Linear Model

Assume Non-Negative

	C	D
12	Total Cost	=SUMPRODUCT(D4:D10,G4:G10)

图 9.13 归结和求解 Distribution Unlimited 公司最小费用流问题的电子表格,图中变化单元格 Ship(D4 : D10)为应用 Excel Solver 求得的最优解,目标单元格 TotalCost (D12)给出了通过该网络运送流量的总费用

使用这种方式解决表 8.2 中的 P&T 公司运输问题,产生如图 8.2 所示的网络图。一般运输问题对应的网络如图 8.3 所示。

指派问题

在 8.3 节讨论过的指派问题是一种特殊的运输问题,它也可以归结为相同形式的最小费用流问题,附加因素有:产销平衡;对每个产地来说 $b_i = 1$;对每个销地来说 $b_i = -1$ 。

图 8.5 为一般分配问题的形式。

转载问题

这种特殊的案例实际上包含了所有最小费用流问题的一般特征,除了没有包括(有限的)弧容量。因而,对于任何最小费用流问题,只要它的每个弧都可以承受所期望的流量,就可以称为转载问题。

例如,如图 9.13 所示的 Distribution Unlimited 公司的问题,如果经由弧 $A \rightarrow B$ 和 $C \rightarrow E$ 流容量的上界被取消,那么它就是一个转载问题。

转载问题通常起源于一般的运输问题,在那些运输问题中,分布在产地和销地之间的物资可以首先通过中转接点。那些中转站可能包括其他产地与销地,额外的转移站也会以转载节点的形式出现。例如, Distribution Unlimited 公司的问题可以看做有两个产地(图 9.13 中,两个工厂分别用 A 和 B 表示)、两个销地(两个仓库分别用 D 和 E 表示),和

一个额外的中转站(分布中心用 C 表示)的一般运输问题。

最短路径问题

现在考虑图 9.3 节中描述的最短路径问题(在一个无向的网络中找出从起点到终点的最短路径)。为了将这个问题归结为最小费用流问题,把起点作为供应量为 1 的供应节点,把终点看做需求量为 1 的供应节点,剩余的节点为转载节点。因为最短路径问题的网络是无定向的,但是最小费用流是有向的,因此我们把每条边替换为一对方向相反的有向弧(用带有双向箭头的线表示),唯一的例外是供应节点和需求节点不需要双向。用节点 i 和 j 之间的距离作为流的单位费用 c_{ij} 或 c_{ji} 。与前面的案例一样,弧上没有容量限制,所以所有的 $u_{ij} = \infty$ 。

图 9.14 描述了图 9.1 中提到的 Seervada 公园最短路径问题的最小费用流问题的转化,在图 9.1 中靠近弧的数字现在用来表示每一方向上流量的单位费用。

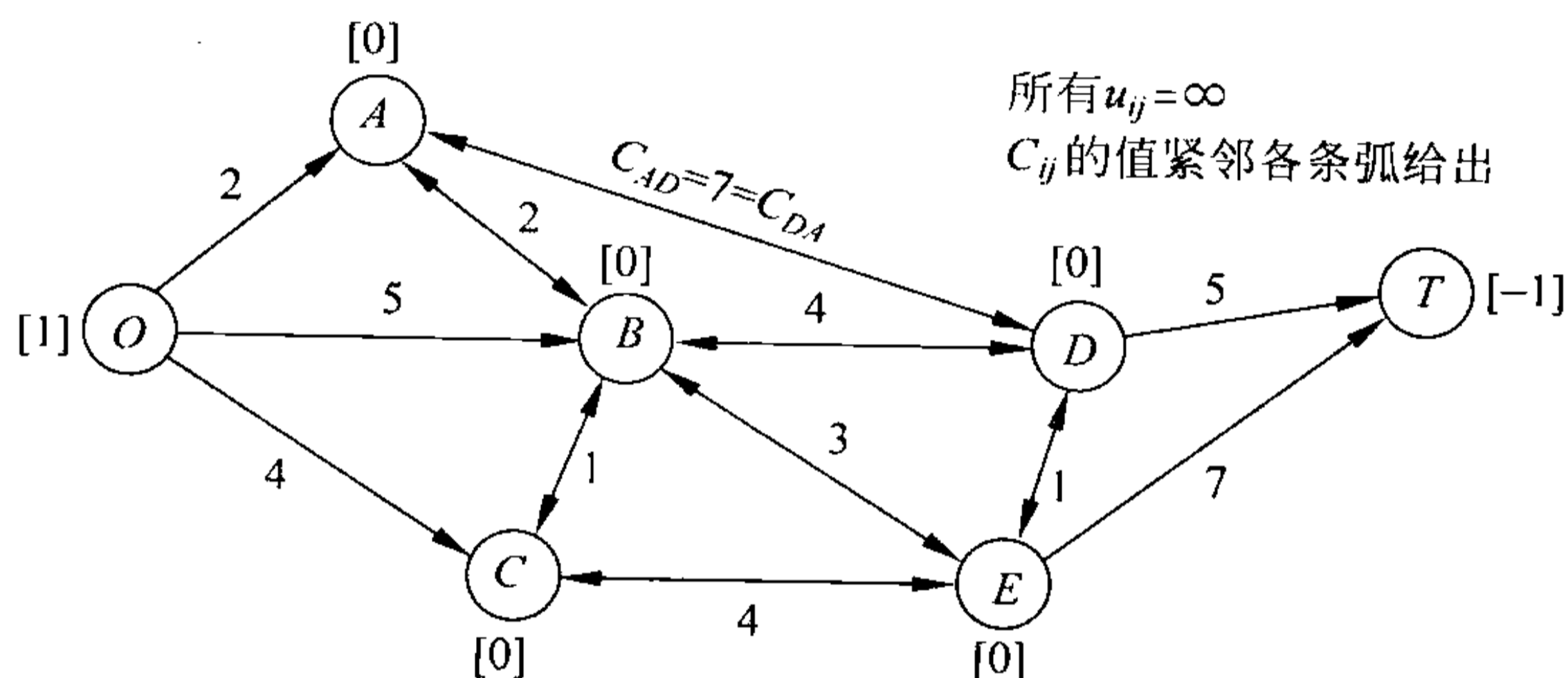


图 9.14 将 Seervada 公园最短路径问题归结为最小费用流问题

最大流问题

我们最后将讨论的特殊案例是 9.5 节中描述的最大流问题。这种情况的网络中提供了一个供应节点(源)、一个需求节点(汇)、其他转载节点以及不同的弧和弧容量。对于这个问题,只需要做三处调整就可转化为最小费用流问题。第一,令 $c_{ij} = 0$,以反映最大流问题所缺少的费用度量。第二,选取网络最大可行流量内的一个值 F ,然后分别为供应节点和需求节点分配 F 个供应量和需求量。第三,添加一条从供应节点指向需求节点的弧,并设其有足够大的单位费用 $c_{ij} = M$,同时具有无限容量(∞)。由于这条弧的单位费用大于零,且其他所有弧上的单位费用为 0,所以最小费用流问题将以最大可能的流量通过其他弧,从而解决最大流问题。

应用这种方式可以转化图 9.6 中的 Seervada 公园最大流问题(见图 9.15),其中各条弧邻近的数字表示弧的容量。

后注:除了运输问题外,其他特殊案例都已经在本章和第 8 章中给出。讨论时,我们已经给出了一个高效的专用求解算法。所以,没有必要将这些特殊案例转化为最小费用流问题来求解。然而,当很难用计算机编码实现这些专用算法时,可以用网络单纯形法替代。事实上,最近的一些应用表明网络单纯形法十分有效,能很好地替换专用算法。

事实上,这些问题是最小费用流问题的特殊情况。一个原因是,最小费用流问题和网络单纯形法的潜在原理为这些特殊案例提供了统一的理论。另一个原因是,最小费用流

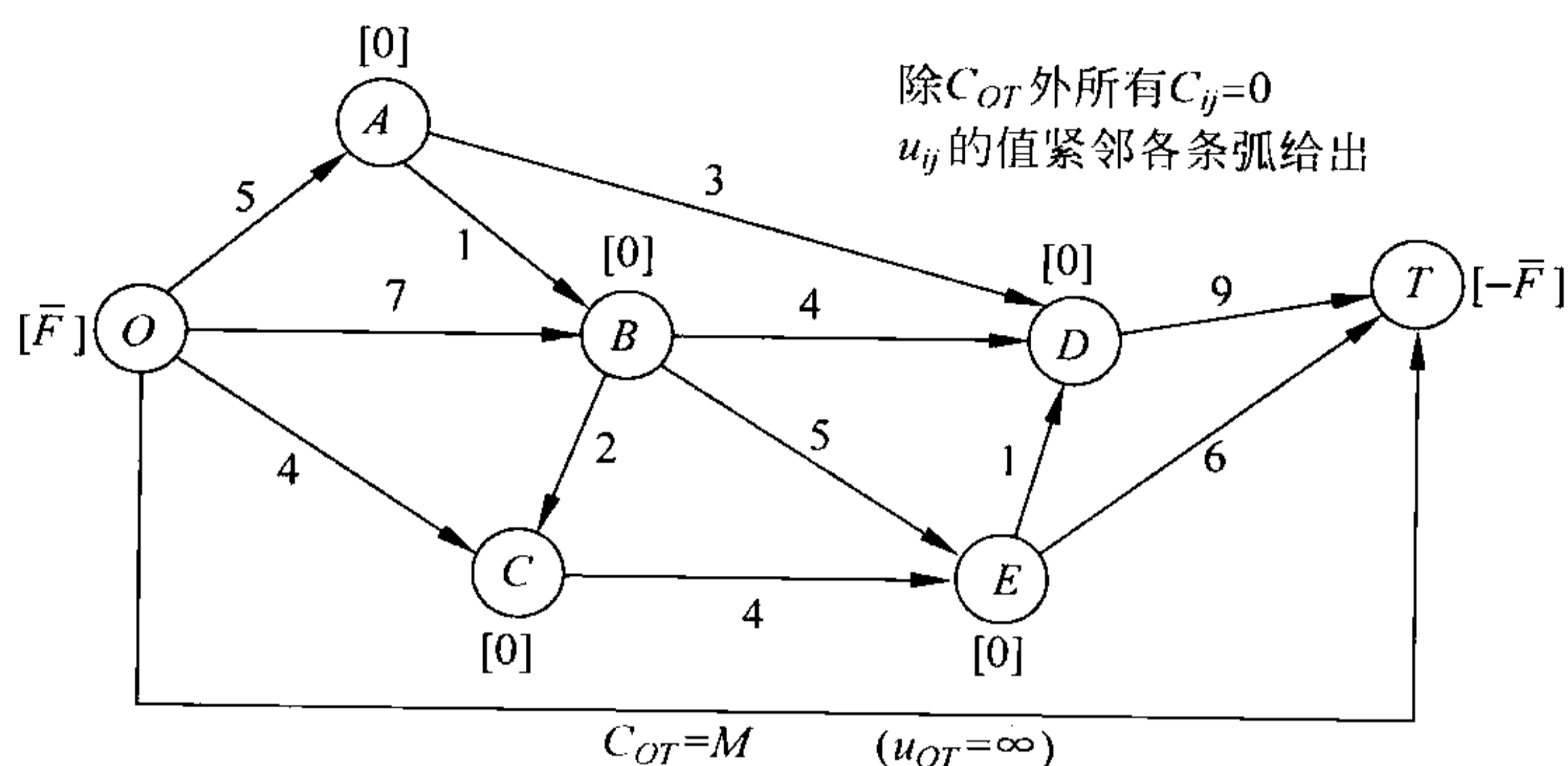


图 9.15 Seervada 公园最大流问题转化为最小费用流问题

问题的许多应用包括了这些特殊案例的一个或多个特点。所以,有必要了解如何利用这些特点分析解决普通问题。



9.7 网络单纯形法

网络单纯形法是指单纯形法以流线形式的方法解决最小费用流问题。因此,在进行每次迭代时有着相同的基本步骤——找到输入基变量,决定输入级变量,给出新的 BF 解,目的是从当前的 BF 解移到另一个相邻的相对更优的 BF 解上。只是在执行上述步骤时不是使用单纯形表,而是利用网络结构。

读者可能注意到网络单纯形法与 9.2 节中的运输单纯形法有一些相似之处。事实上,这两种方法都属于单纯形法的简化形式。类似的,运输单纯形法为解决运输问题提供了一种替代的算法。网络单纯形法也为解决一些类型的最小费用流问题拓展了思路。

本节我们只对网络单纯形法的主要概念提供简洁的描述,不涉及完整的计算机应用过程所需要的详细过程,包括如何构建初始 BF 解,怎样以最有效的方式执行特定的计算(例如找输入基变量)。更详细的介绍请阅读其他参考书,如参考文献 1 和 3。

同上界法结合

本节引入 7.3 节所述的上界法来有效解决弧容量的约束 $x_{ij} \leq u_{ij}$ 。与函数约束不同,它们都是非负约束,因此仅当在决定输出基变量时才被考虑。特别是当输入基变量从 0 逐渐增加时,输出基本变量是第一个达到下界(0)或上界(u_{ij})的变量。一个非基变量在它的上界 $x_{ij} = u_{ij}$ 时被 $x_{ij} = u_{ij} - y_{ij}$ 替代,所以 $y_{ij} = 0$ 是非基变量(详见 7.3 节)。

在本节中, y_{ij} 对应一个网络解释。无论 y_{ij} 何时成为一个具有严格正值($\leq u_{ij}$)的基变量,这个值都可以被视为从节点 j 到节点 i 的流量(与弧 $i \rightarrow j$ 的方向相反),更准确地说是先前从节点 i 到节点 j ($x_{ij} = u_{ij}$) 已分配流量的抵消。因此当 $x_{ij} = u_{ij}$ 由 $x_{ij} = u_{ij} - y_{ij}$ 替代时,正向弧 $i \rightarrow j$ 也可由反向弧 $j \rightarrow i$ 替代,新弧具有弧容量 u_{ij} (最多有流 $x_{ij} = u_{ij}$ 可用来抵消)以及单位费用 $-c_{ij}$ (每单位流量可节约成本 c_{ij})。为了反映通过已删除弧的流量 $x_{ij} = u_{ij}$,我们通过减少 b_i (通过 u_{ij}),增加 b_j (通过 u_{ij}),以转移产生自节点 i 到 j 网络流量的总

值。如果 y_{ij} 达到上界成为输出基变量时,将 $y_{ij} = u_{ij}$ 替代为 $y_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$,则 $x_{ij} = 0$ 成为新的非基变量,上述步骤将被反转过来。

图 9.12 通过一个最小费用流展示了上述过程。网络单纯形法延续自 BF 解,假设 x_{AB} 是通过反复迭代达到其上界 10 的输出基变量。接着, $x_{AB} = 10$ 由 $x_{AB} = 10 - y_{AB}$ 代替, $y_{AB} = 0$ 成为新非基变量。同时,弧 $A \rightarrow B$ 被弧 $B \rightarrow A$ 替代(y_{AB} 为其流量),新的弧容量为 10,单位费用为 -2。考虑 $x_{AB} = 10$,将 b_A 从 50 减小到 40,将 b_B 从 40 增加到 50,调整后的网络如图 9.16 所示。

在后面我们将用这个例子展示网络单纯形法的全过程,从 $y_{AB} = 0$ ($x_{AB} = 10$) 作为非基变量开始,并使用网络图 9.16。经过迭代 x_{CE} 达到上界 80 因而被 $x_{CE} = 80 - y_{CE}$ 替代,类似的,下一步迭代 y_{AB} 达到它的上界 10。所有这些运算都通过网络直接进行,不需要使用标签 x_{ij} 或 y_{ij} 标记弧流量或跟踪哪些弧是正向弧哪些是反向(我们在记录最终解时除外)。使用上界法仅保留节点约束(流出/流入 = b_i)作为唯一的函数约束。最小费用流问题倾向于具有远多于

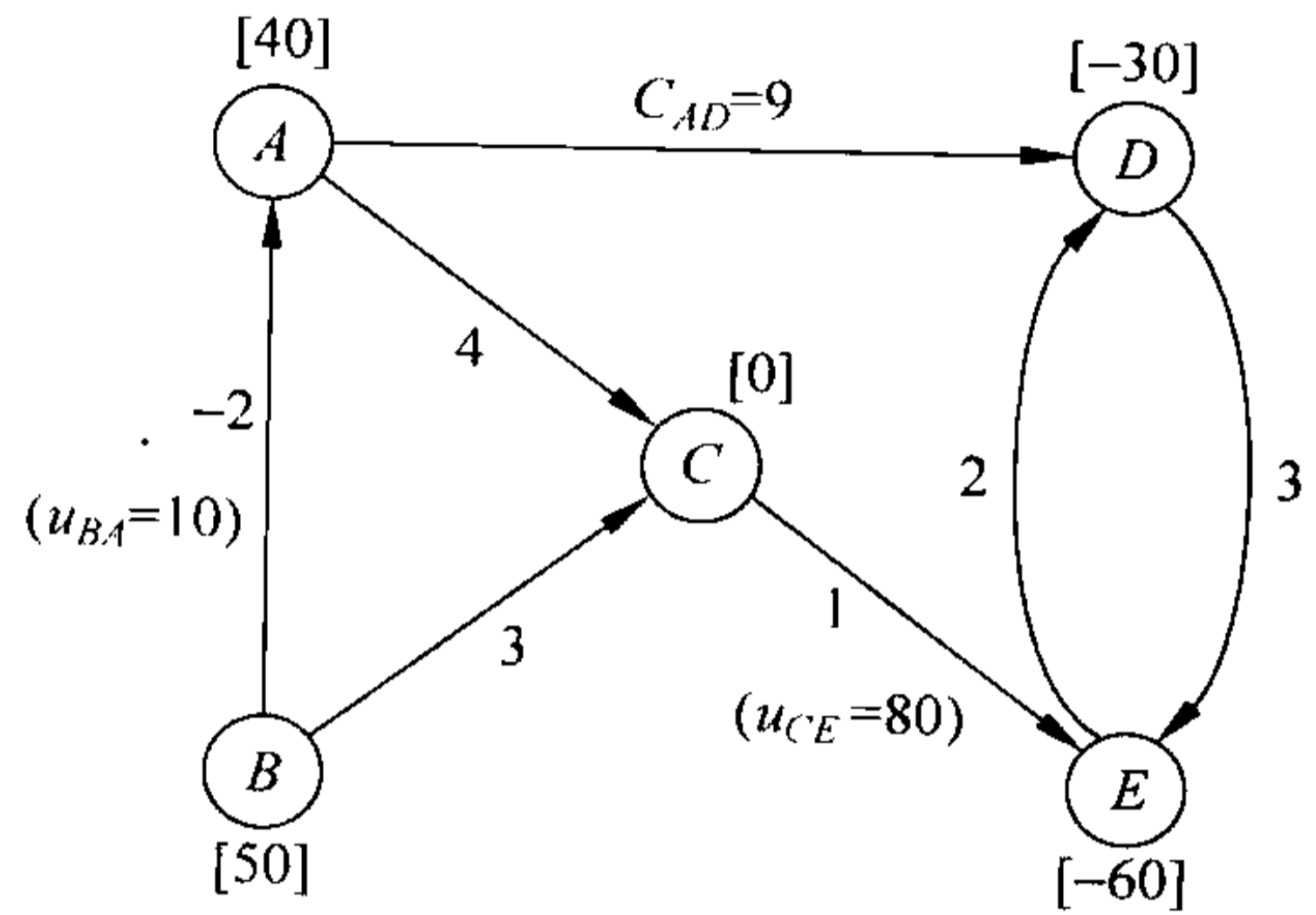


图 9.16 使用上界法调整后的网络

节点的弧数,因而导致函数约束数仅仅是其中的一小部分,如果弧容量约束被包含进去的话。网络单纯形法的计算时间随着函数约束的数量增加而增加,但是由于变量数(或变量的函数约束数)仍然较慢,因此,采取上界法可以节约大量计算耗时。

然而,这种方法对无容量的最小费用流问题(包括上一节除最后一个特殊例子以外的所有例子)是不必要的,因为这类问题没有弧容量约束。

BF 解和可行生成树之间的一致性

应用网络单纯形法最重要的概念是 BF 解的网络表示。回忆 9.6 节所述的一些内容,具有 n 个节点的每个 BF 解有 $(n-1)$ 个基变量,每个基变量 x_{ij} 代表通过弧 $i \rightarrow j$ 的流量。这 $(n-1)$ 条弧被称为基本弧(basic arcs)。类似的,与非基变量对应的弧 $x_{ij} = 0$ 或 $y_{ij} = 0$ 被称为非基本弧(nonbasic arcs)。

基本弧的一个关键属性是从不形成无方向的环(这个属性阻止其他对可行解的线性组合成为结果解,破坏了 BF 解的一个通用属性)。然而, $n-1$ 条弧的不含无方向环的任意集合构成一个生成树,因而 $n-1$ 条基本弧的任意全集合构成一个生成树。

BF 解能够通过解生成树获得。获得生成树解(spanning tree solution)的步骤如下:

1. 对于不在生成树中的弧(即非基本弧),将相应的变量(x_{ij} 或 y_{ij})设置为 0;
2. 对于在生成树中的弧(即基本弧),通过节点约束构成的线性方程解出相应的变量(x_{ij} 或 y_{ij})。

(事实上,网络单纯形法从当前状态去寻求 BF 解比解线性方程效率更高。)需要注意的是,上面的过程并没有考虑基变量的非负约束或弧容量约束,所以得出的生成树解并不一定是满足这些约束条件的可行解,这也引出了可行生成树的定义。

可行生成树(feasible spanning tree): 不仅满足节点约束,并且满足非负约束或弧容量约束($0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ 或 $0 \leq y_{ij} \leq u_{ij}$)的生成树解。

基于以上的定义,总结出网络单纯形法基本定理,如下:

网络单纯形法基本定理: 生成树解是基本解,可行生成树解是 BF 解(逆命题也成立)。

现以如图 9.16 所示的网络来示例基本定理的应用。图 9.16 是图 9.12 中将 $x_{AB} = 10$ 由 $x_{AB} = 10 - y_{AB}$ 替代的结果,图 9.16 中的网络的一个生成树如图 9.3(e)所示,即弧 $A \rightarrow D$ 、 $D \rightarrow E$ 、 $C \rightarrow E$ 和 $B \rightarrow C$ 。由这些基本弧,通过下面的过程可以找到生成树解。左侧是 9.6 节给出的节点约束,黑体表示基本弧。右侧从上到下依次表示变量的设置和计算结果。

	$y_{AB} = 0, x_{AC} = 0, x_{ED} = 0$	
$- y_{AB} + x_{AC} + x_{AD}$	$= 40$	$x_{AD} = 40$
$y_{AB} + x_{BC}$	$= 50$	$x_{BC} = 50$
$- x_{AC} - x_{BC} + x_{CE}$	$= 0$	所以 $x_{CE} = 50$
$- x_{AD} + x_{DE} - x_{ED}$	$= -30$	所以 $x_{DE} = 10$
$- x_{CE} - x_{DE} + x_{ED}$	$= -60$	多余

由于这些基变量都满足非负约束和容量约束($x_{CE} \leq 80$),因此该生成树解也是可行生成树解,从而得到 BF 解。

如何将得到的 BF 解使用网络单纯形法表示呢? 图 9.17 通过网络表示了可行生成树和相应的解,其中弧上的数字现在表示流量(x_{ij} 的值)而不是先前的单位费用 c_{ij} 。

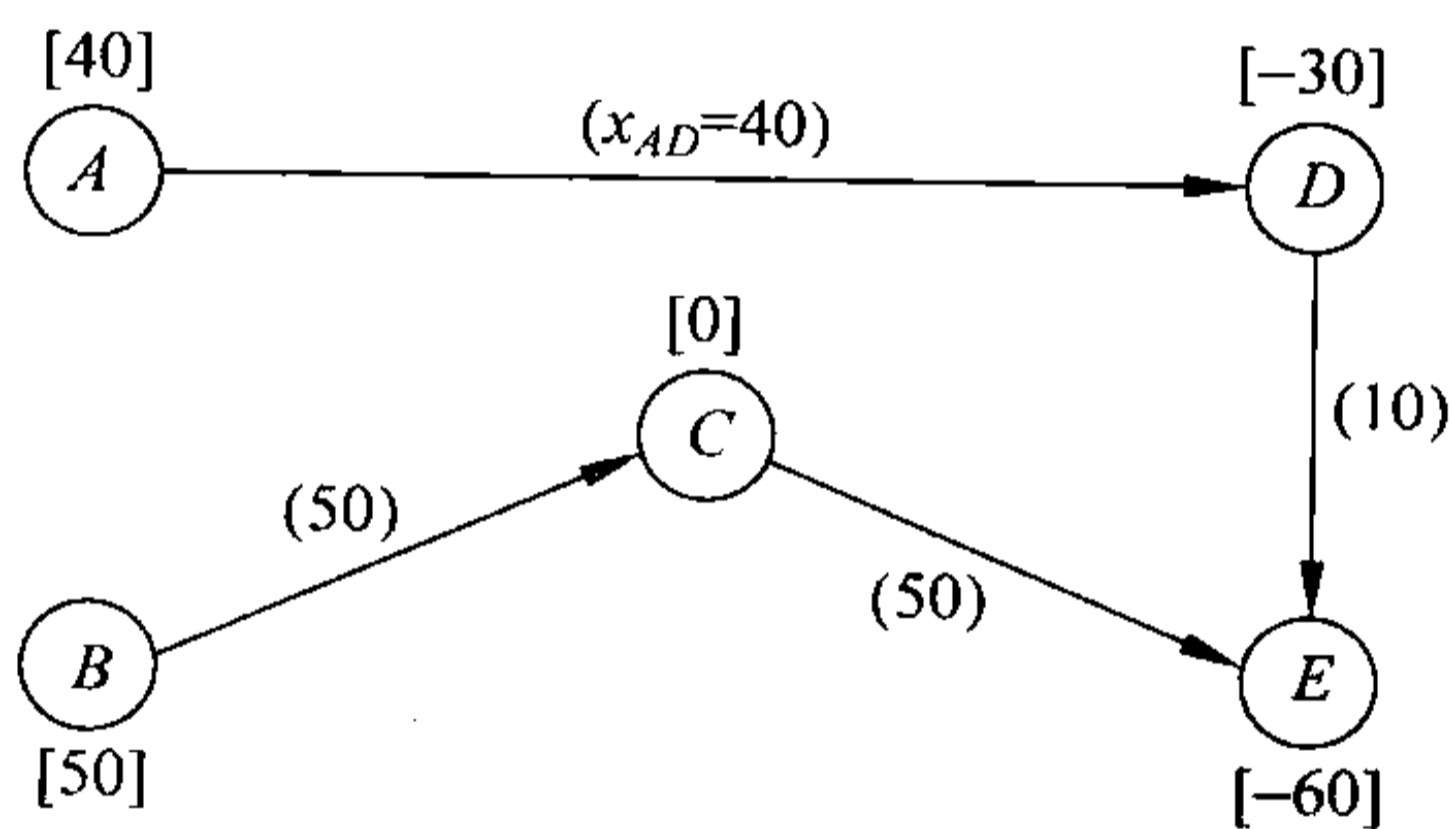


图 9.17 初始可行生成树和解示例

选择入基变量

标准单纯形法选择入基变量的标准是选择当非基变量从 0 增加时使目标 Z 增加速率最快的非基变量。那么不使用单纯形表而使用网络单纯形法应如何做呢?

继续前面的例子, x_{AC} 是一个非基变量,对应的弧 $A \rightarrow C$ 是非基本弧。将 x_{AC} 从 0 增至 θ 意味着需要在图 9.17 中增加流量 θ 的弧 $A \rightarrow C$,从而在生成树中形成了一个唯一的如图 9.18 所示的非定向的环 $AC-CE-DE-AD$ 。同时图 9.18 也表明了弧 $A \rightarrow C$ 流量增加 θ 时其他弧流量减少的状态,即在环中与弧 $A \rightarrow C$ 同向的弧流量都增加了 θ ,反向的弧流量相应减少 θ ,环外的弧流量不变。

弧 $A \rightarrow C$ 流量增加 θ 时对 Z (总流量费用)的增加效果是怎样的呢? 图 9.19 显示了网络中费用的变化。用 ΔZ 表示 Z (总流量费用)的增加情况,因而有

$$\begin{aligned} \Delta Z &= c_{AC}\theta + c_{CE}\theta + c_{DE}(-\theta) + c_{AD}(-\theta) \\ &= 4\theta + \theta - 3\theta - 9\theta \\ &= -7\theta \end{aligned}$$

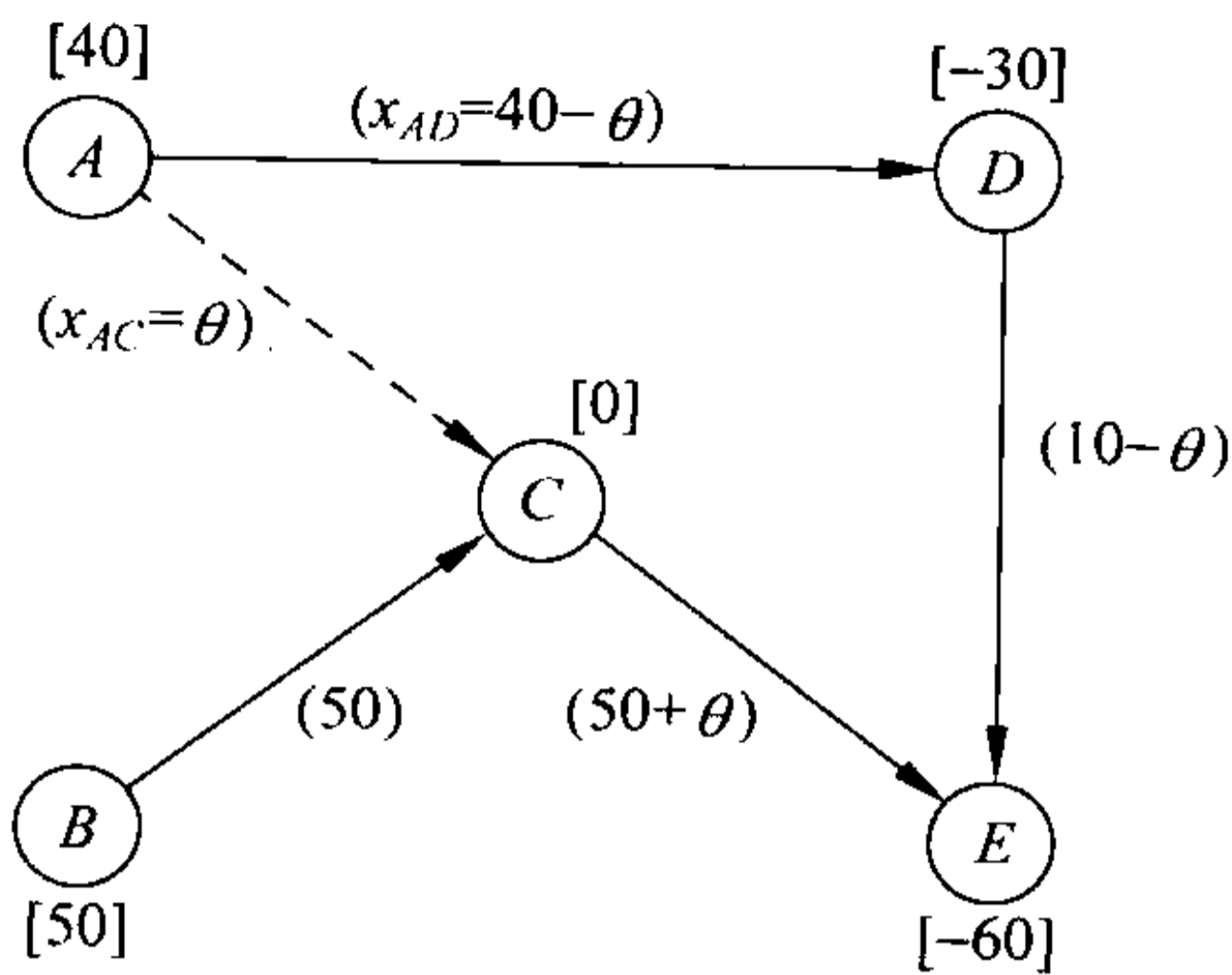


图 9.18 初始可行生成树增加弧 A→C 后的效应

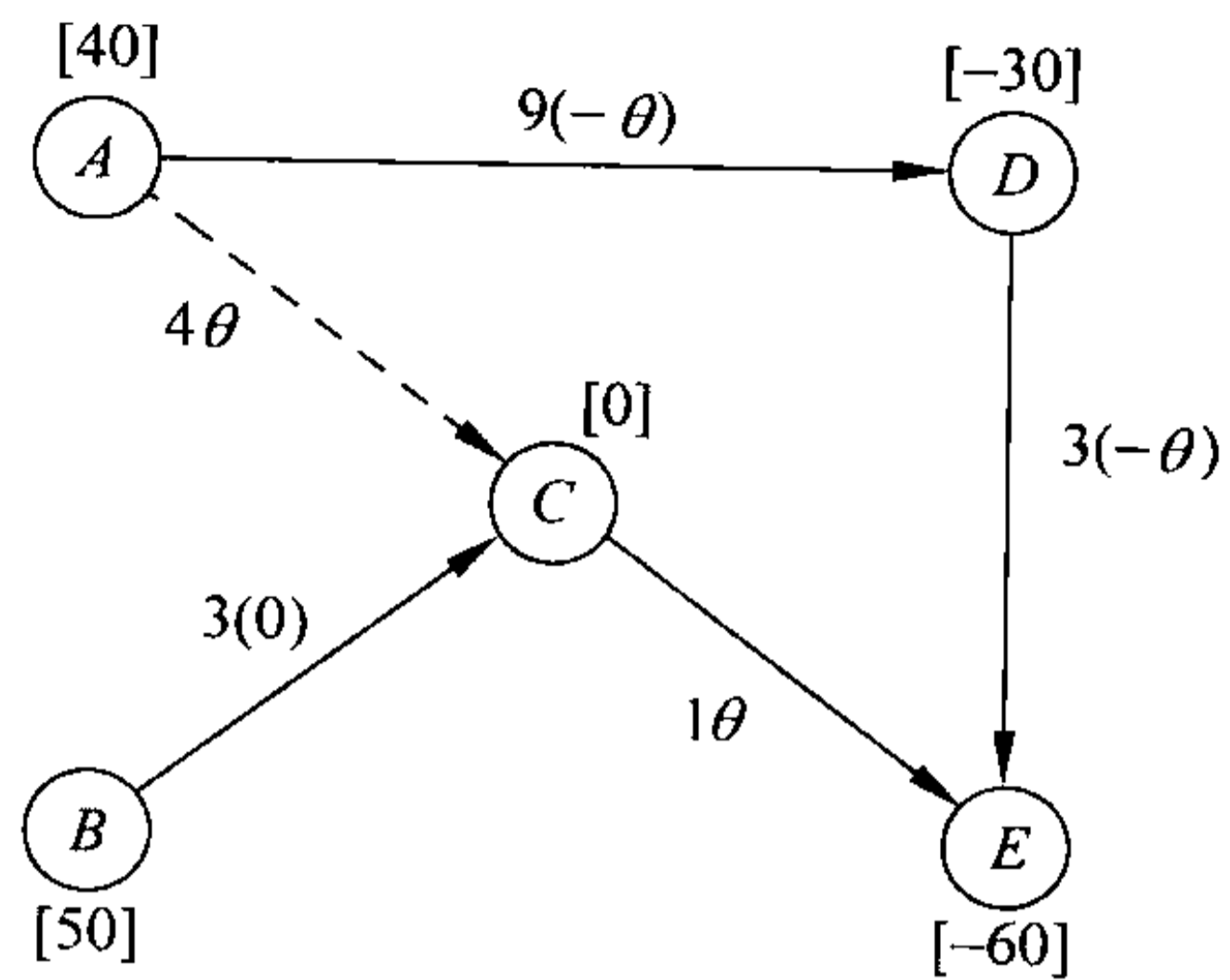


图 9.19 初始可行生成树中增加弧 A→C 流量 θ 后的费用增加示意

设 $\theta=1$, 则 ΔZ 代表了 x_{AC} 增加时 Z 的变化率, 即 $\Delta Z = -7$, 当 $\theta=1$ 时。

因为目的是使 Z 最小化, x_{AC} 增加并不希望 Z 增加, 所以, x_{AC} 可以成为入基变量的候选。我们还需要对其他非基变量进行同样的分析以找到最终的入基变量。在本例中, 还有另外两个非基变量 y_{AB} 和 x_{ED} , 对应着图 9.16 中的另外两个非基本弧 $B \rightarrow A$ 和 $E \rightarrow D$ 。

图 9.20 显示了在初始可行生成树(图 9.17)中增加弧 $B \rightarrow A$ 及其流量 θ 后网络中费用的增加情况。增加弧 $B \rightarrow A$ 后形成了非定向的环 $BA-AD-DE-CE-BC$, 因此

$$\begin{aligned} \Delta Z &= -2\theta + 9\theta + 3\theta + 1(-\theta) + 3(-\theta) = 6\theta \\ &= 6, \quad \text{当 } \theta = 1 \text{ 时} \end{aligned}$$

当 y_{AB} (通过反向弧 $B \rightarrow A$ 的流) 从零开始增加时, Z 不减反升这一事实说明该变量不能作为候选入基变量。(记住, y_{AB} 从零开始增加事实上意味着沿着精确弧的流 x_{AB} 从上界 10 减小)。

对于最后一个非基本弧 $E \rightarrow D$, 得到的结果也是类似的。将该弧与流加到初始可行生成树生成了如图 9.21 所示的非定向的环 $ED \rightarrow DE$, 因此对于弧 $D \rightarrow E$, 流也增加了, 但其他弧都未受到影响。因此

$$\begin{aligned} \Delta Z &= 2\theta + 3\theta = 5\theta \\ &= 5, \quad \text{当 } \theta = 1 \text{ 时} \end{aligned}$$

所以 x_{CD} 也不能作为候选输入基变量。

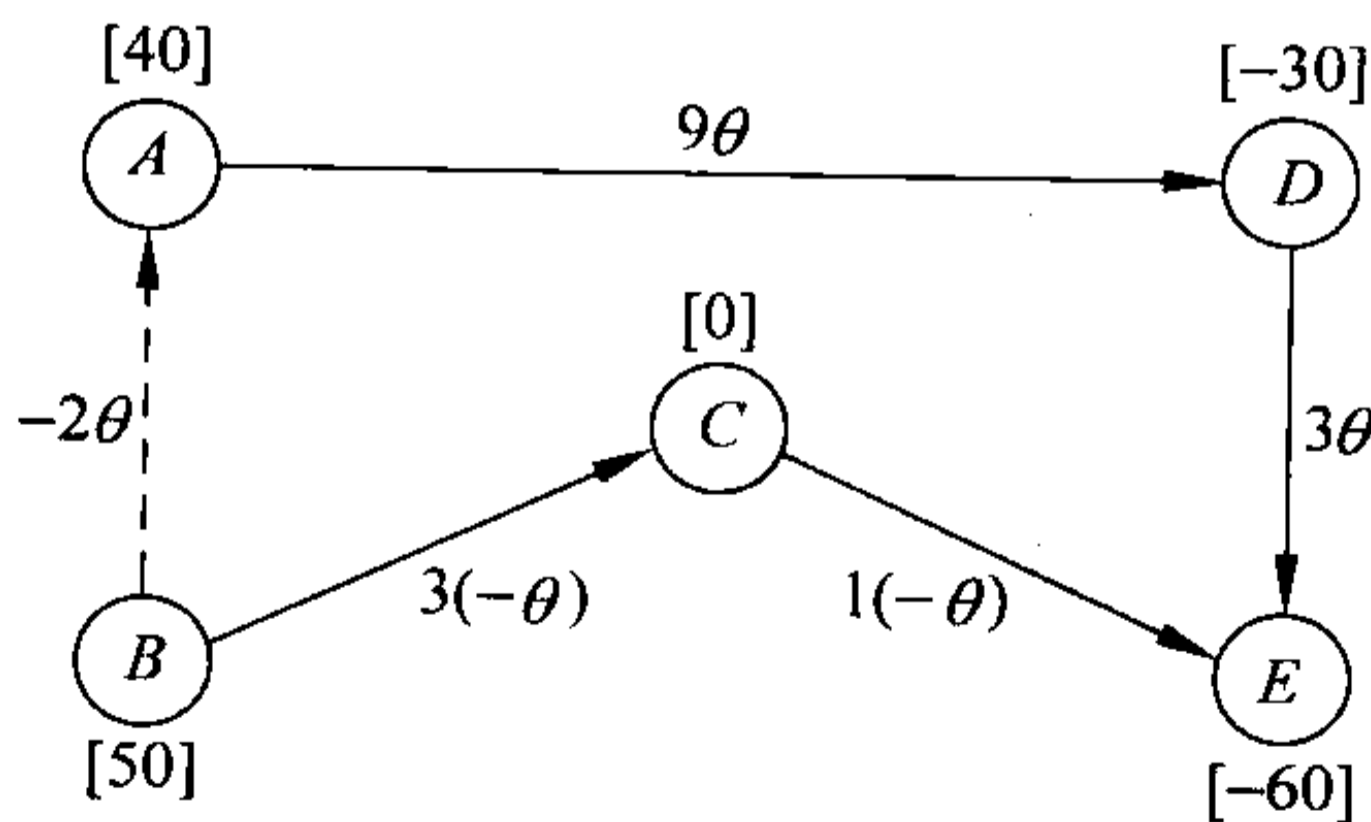


图 9.20 初始可行生成树中增加弧 $B \rightarrow A$ 及其流量 θ 后网络中费用的增加情况

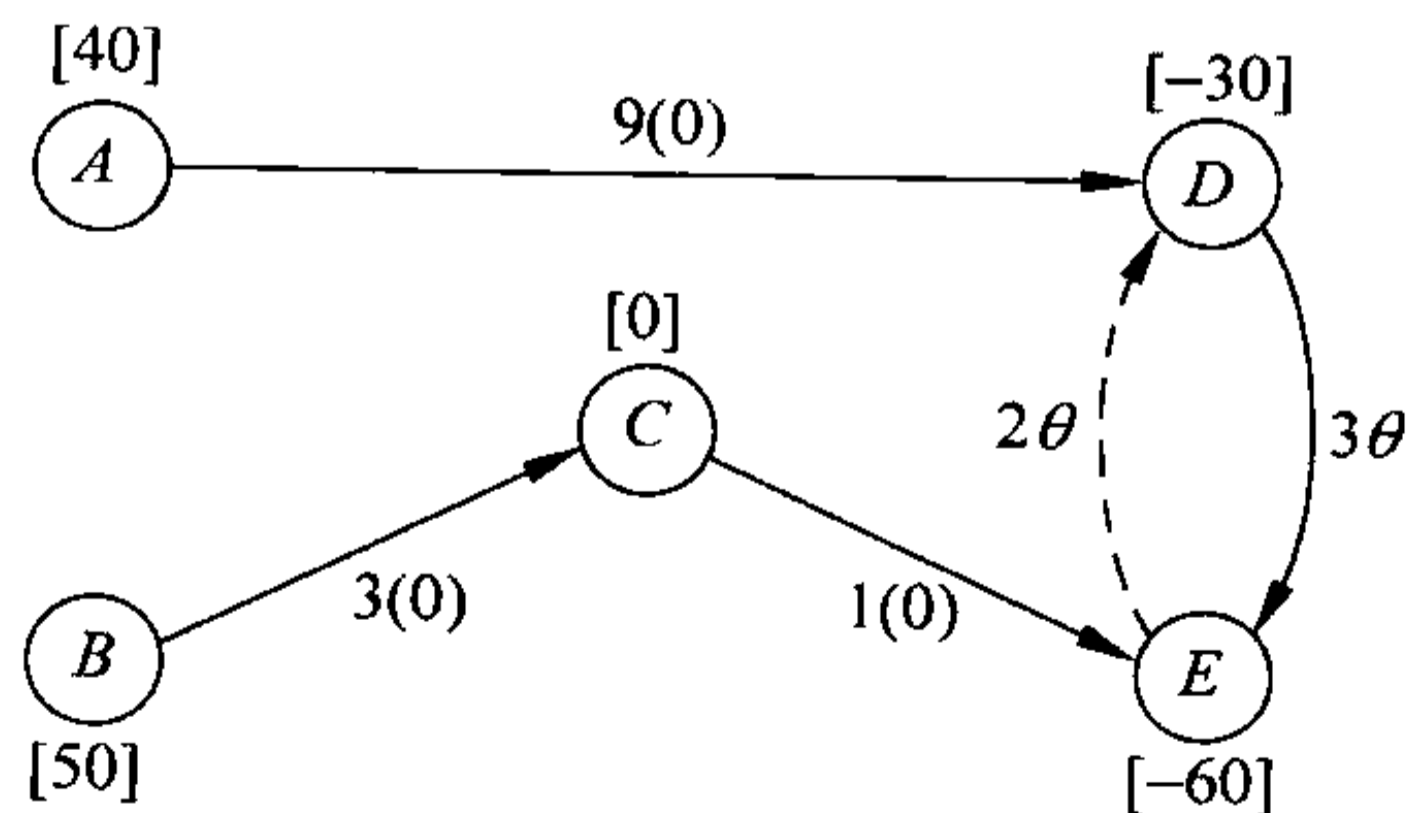


图 9.21 初始可行生成树中增加弧 $B \rightarrow A$ 及其流量 θ 后网络中费用的增加情况

因此,有

$$\Delta Z = \begin{cases} -7, & \Delta x_{AC} = 1 \\ 6, & \Delta y_{AB} = 1 \\ 5, & \Delta x_{ED} = 1 \end{cases}$$

只有 x_{AC} 使 Z 减小,所以 x_{AC} 将作为第一次迭代的入基变量。如果还存在其他使 ΔZ 为负的非基变量,则将使 ΔZ 绝对值最大的非基变量作为入基变量(如果不存在使 ΔZ 为负的非基变量,则当前 BF 解即为最优)。

除辨别非定向环外,用代数方法获得网络单纯形法 ΔZ 的值也较为有效(尤其是对于较大规模的网络)。其过程与运输单纯形法对每个非基变量 x_{ij} 解出 u_i 和 v_j 从而获得 $c_{ij} - u_i - v_j$ 的做法类似(见 8.2 节)。所以本章不再深入介绍这个过程,读者在做本章的习题时可以采用辨别非定向环的方法。

寻找出基变量和下一个 BF 解

确定入基变量后,紧接着下一步需要同时寻找出基变量和下一个 BF 解。对于第一次迭代的例子,最主要的还是图 9.18。 x_{AC} 作为入基变量,弧 $A \rightarrow C$ 的流量 θ 不断从 0 增加,直到其中一个基变量达到它的下界(0)或上界(u_{ij})。对于随 θ 增大而流量增大的弧只需要考虑上界:

$$x_{AC} = \theta \leq \infty,$$

$$x_{CE} = 50 + \theta \leq 80, \quad \text{所以 } \theta \leq 30.$$

对于随 θ 增大而流量减小的弧只需要考虑下界 0:

$$x_{DE} = 10 - \theta \geq 0, \quad \text{所以 } \theta \leq 10.$$

$$x_{AD} = 40 - \theta \geq 0, \quad \text{所以 } \theta \leq 40.$$

流量不受 θ 影响的其他弧(例如不属于非定向环的弧)可以不予考虑,如图 9.18 中的弧 $B \rightarrow C$ 。

对于图 9.18 中的 5 条弧, x_{DE} 应作为出基变量,因为它达到边界值时, θ 具有最小值 10。当 $\theta=10$ 时,下面是新的 BF 解得基本弧的流量值。

$$x_{AC} = \theta = 10$$

$$x_{CE} = 50 + \theta = 60$$

$$x_{AD} = 40 - \theta = 30$$

$$x_{BC} = 50$$

相应的可行生成树如图 9.22 所示。

如果输出基变量已经达到它的上界,对于上界法需要对在这一点上的调整进行讨论(读者在下两次迭代中将会看到)。在本次迭代中由于它是较小的下界 0,所以不需要进一步讨论。

完成本例

本例中,再经过两次迭代将获得最优解,下面将集中说明上界法的应用。寻找入基变量、出基变量和下一个 BF 解的方法与第一次迭代类似,不再重复,只对这些步骤进行简要总结。

第二次迭代:以如图 9.22 所示的可行生成树开始,引用图 9.16 中的单位费用数据,

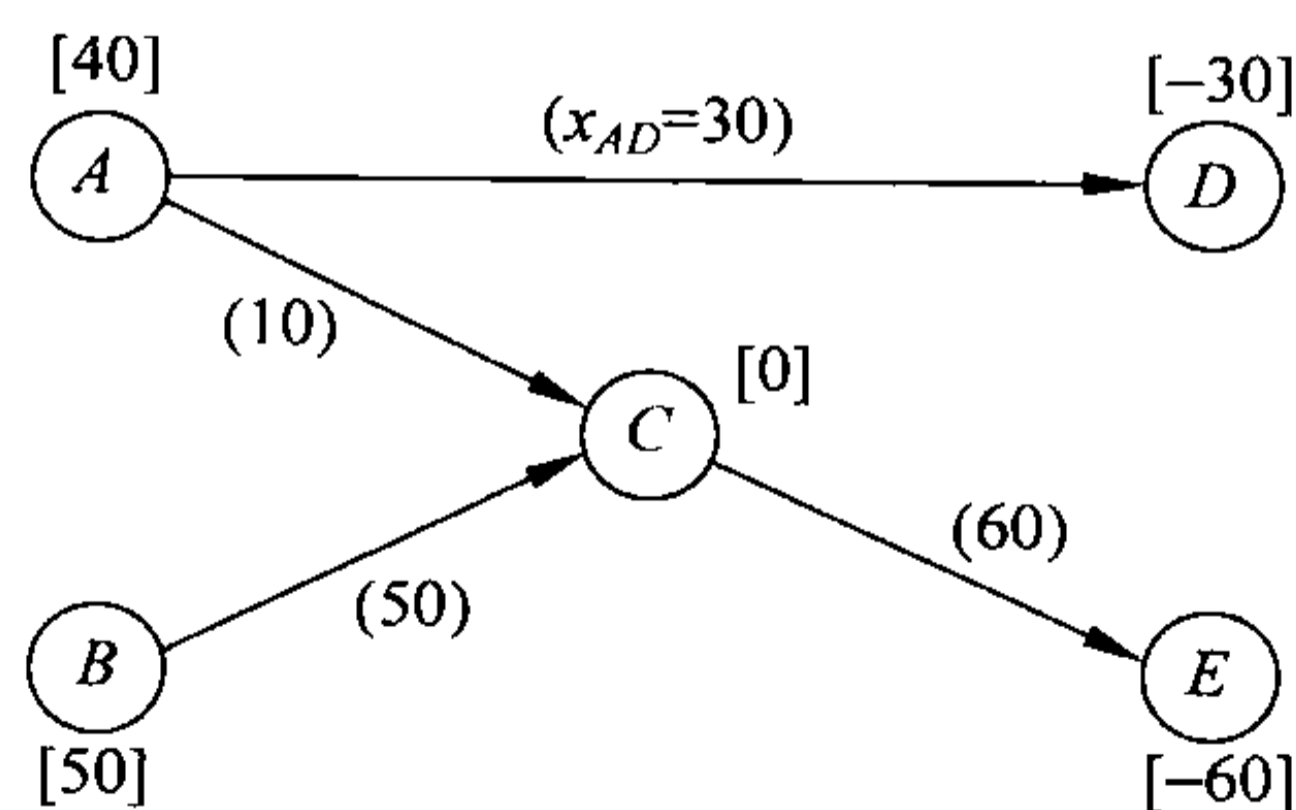


图 9.22 第二个可行生成树和解示例

为选择入基变量得出如表 9.4 所示的计算结果。第二列表示增加非基本弧(第一列表示)后得到的非定向环,第三列表示相应的网络总费用 Z 在 $\theta=1$ 时的增加量。弧 $E \rightarrow D$ 能引起 ΔZ 最大的负增长,因此 x_{ED} 即为入基变量。

非基本弧	生成环	当 $\theta=1$ 时的 ΔZ
$B \rightarrow A$	$BA-AC-BC$	$-2+4-3=-1$
$D \rightarrow E$	$DE-CE-AC-AD$	$3-1-4+9=7$
$E \rightarrow D$	$ED-AD-AC-CE$	$2-9+4+1=-2$ 最小值

在满足下列约束条件时,使通过弧 $E \rightarrow D$ 的流量 θ 尽可能大,从而求得 θ

$$\begin{aligned} x_{ED} = \theta &\leq u_{ED} = \infty, && \text{所以 } \theta \leq \infty; \\ x_{AD} = 30 - \theta &\geq 0, && \text{所以 } \theta \leq 30; \\ x_{AC} = 10 + \theta &\leq u_{AC} = \infty, && \text{所以 } \theta \leq \infty; \\ x_{CE} = 60 + \theta &\leq u_{CE} = 80, && \text{所以 } \theta \leq 20. \quad \leftarrow \text{最小值} \end{aligned}$$

因为 x_{CE} 达到上界时使 θ 获得最小值 20,所以 x_{CE} 为入基变量。令 $\theta=20$,在上面的方程中可以看出,应以 x_{ED} 、 x_{AD} 和 x_{AC} 为基本弧生成下一个 BF 解(其中 $x_{BC}=50$ 不受 θ 的影响),如图 9.23 所示。

需要特别注意,入基变量 x_{CE} 的获得是在其达到上界值 80 时。因此,根据上界法, x_{CE} 将由 $80 - y_{CE}$ 替代,并将 $y_{CE}=0$ 作为新的非基变量,同时原来的弧 $C \rightarrow E$ 及 $c_{CE}=1$ 、 $u_{CE}=80$ 分别由反向弧 $E \rightarrow C$ 及 $c_{CE}=-1$ 、 $u_{EC}=80$ 替代。调整后的网络图如图 9.24 所示,其中虚线部分表示非基本弧,弧上的数字表示单位费用。

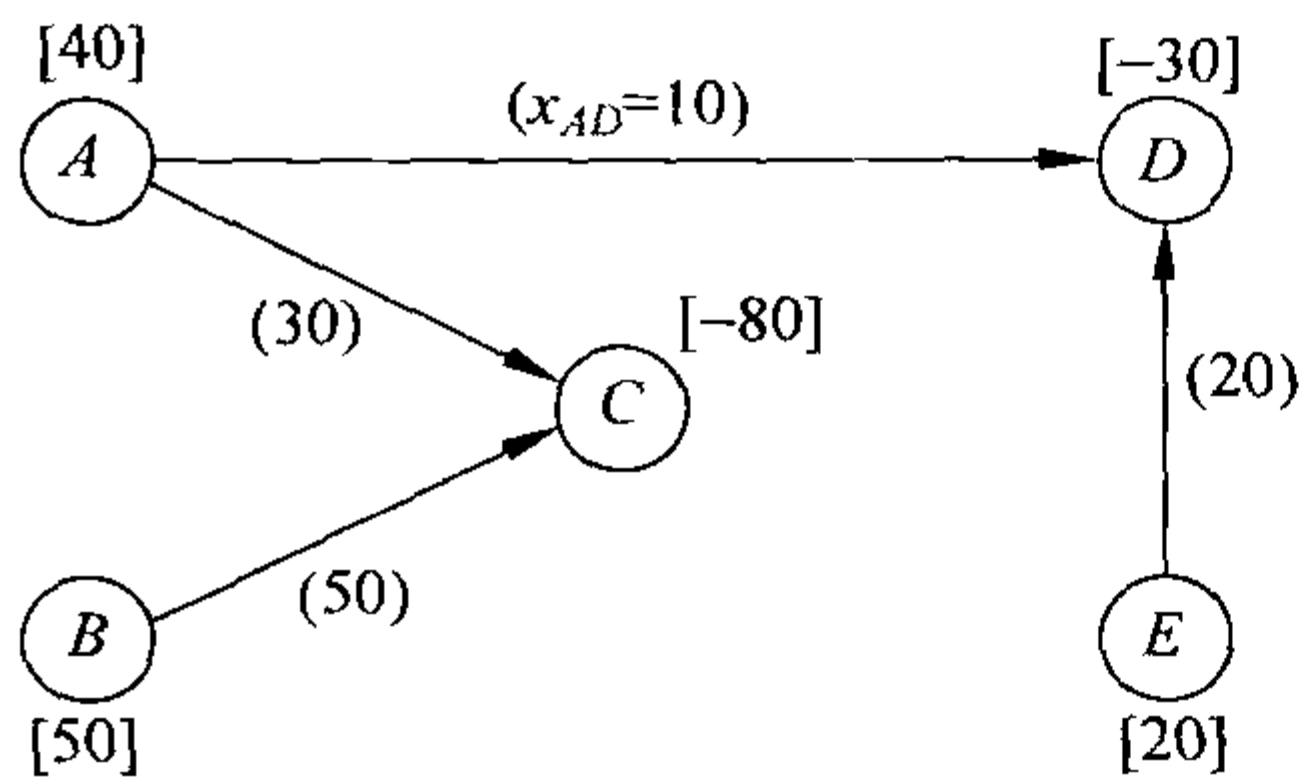


图 9.23 第三个可行生成树和解示意

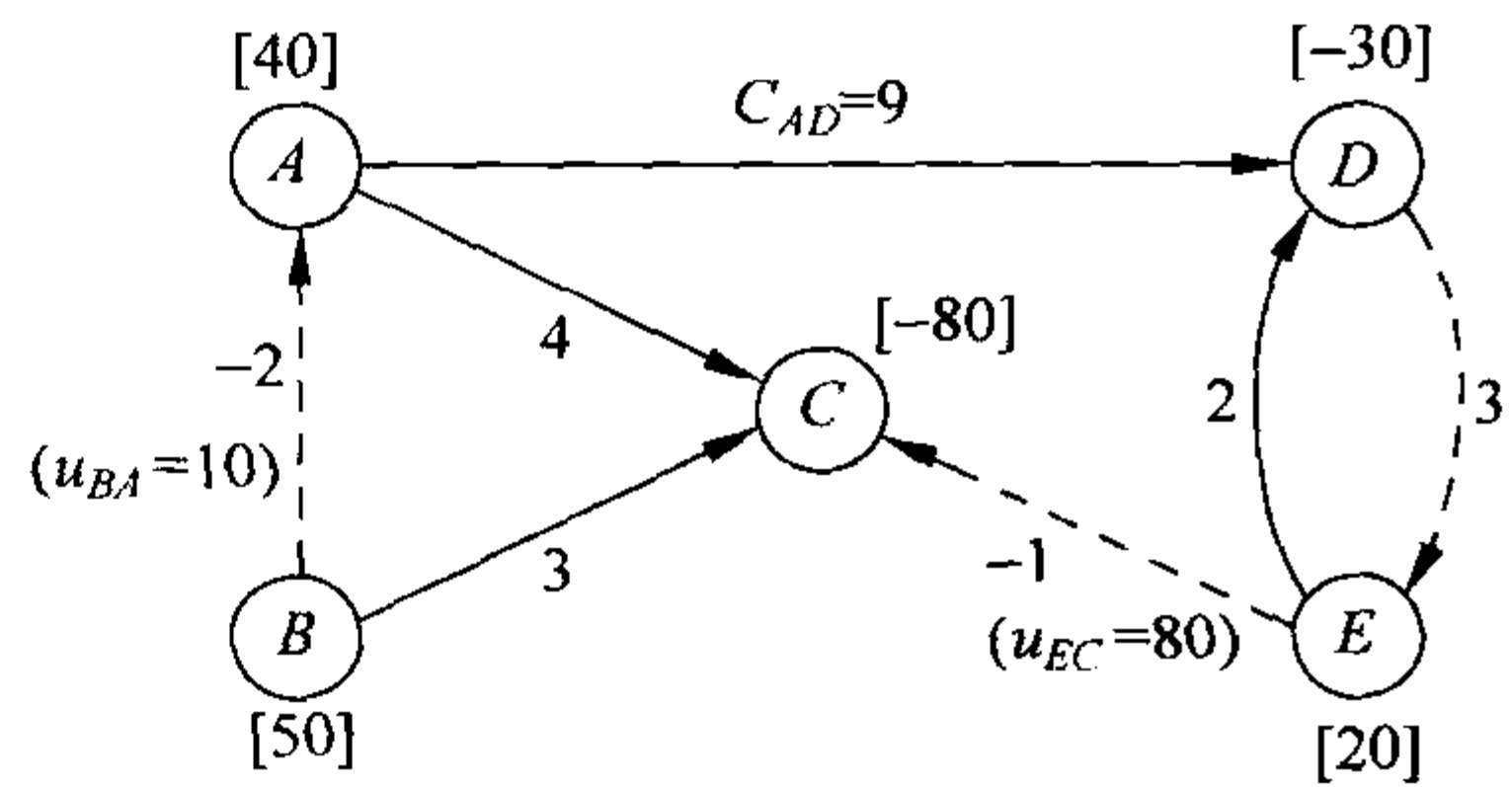


图 9.24 完成第二次迭代的调整后费用网络

非基本弧	生成环	当 $\theta=1$ 时的 ΔZ
$B \rightarrow A$	$BA-AC-BC$	$-2+4-3=-1$ ← 最小值
$D \rightarrow E$	$DE-ED$	$3+2=5$
$E \rightarrow C$	$EC-AC-AD-ED$	$-1-4+9-2=2$

第三次迭代: 将图 9.23、图 9.24 应用于第三次迭代,通过如表 9.5 所示的计算过程选出 y_{AB} (反向弧 $B \rightarrow A$)作为入基变量。在满足下面约束的条件下增加通过弧 $B \rightarrow A$ 的流量 θ :

$$\begin{aligned} y_{AB} = \theta &\leq u_{BA} = 10, && \text{所以 } \theta \leq 10; && \leftarrow \text{最小值} \\ x_{AC} = 30 + \theta &\leq u_{AC} = \infty, && \text{所以 } \theta \leq \infty; \\ x_{BC} = 50 - \theta &\geq 0, && \text{所以 } \theta \leq 50. \end{aligned}$$

y_{AB} 使得 θ 取得最小的上界值为 10, 所以 y_{AB} 成为出基变量。在上面的方程中, 令 $\theta=0$, 得出 x_{AC} 和 x_{BC} ($x_{AD}=10$ 和 $x_{ED}=20$ 保持不变) 组成下一个 BF 解, 如图 9.25 所示。

与第二次迭代一样, 出基变量是在变量 (y_{AB}) 达到上界时获得的。另外, 在进行这种特殊的选择时有两点需要特别注意。一是入基变量 y_{AB} 在同一次迭代中同时也是出基变量。当入基变量 (从 0 增加时) 在其他基变量达到边界时, 它已先到达上界值。这种情况在上界法中会偶尔出现。

另外一点就是曾为一个反向弧的弧 $B \rightarrow A$ ($c_{BA} = -2, u_{BA} = 10$), 现在需要由其反向弧 $A \rightarrow B$ ($c_{AB} = 2, u_{AB} = 10$) 替代。毋庸置疑, 反向弧的反向弧仍为原来的正向弧 (图 9.12 中节点 A、B 之间的弧), 但是网络流量由节点 B ($b_B = 50 \rightarrow 40$) 向节点 A ($b_A = 40 \rightarrow 50$) 转移了 10。同时, 变量 $y_{AB} = 10$ 由 $y_{AB} = 10 - x_{AB}$ 代替, 且有 $x_{AB} = 0$ 作为新的非基变量。调整后的网络图如图 9.26 所示。

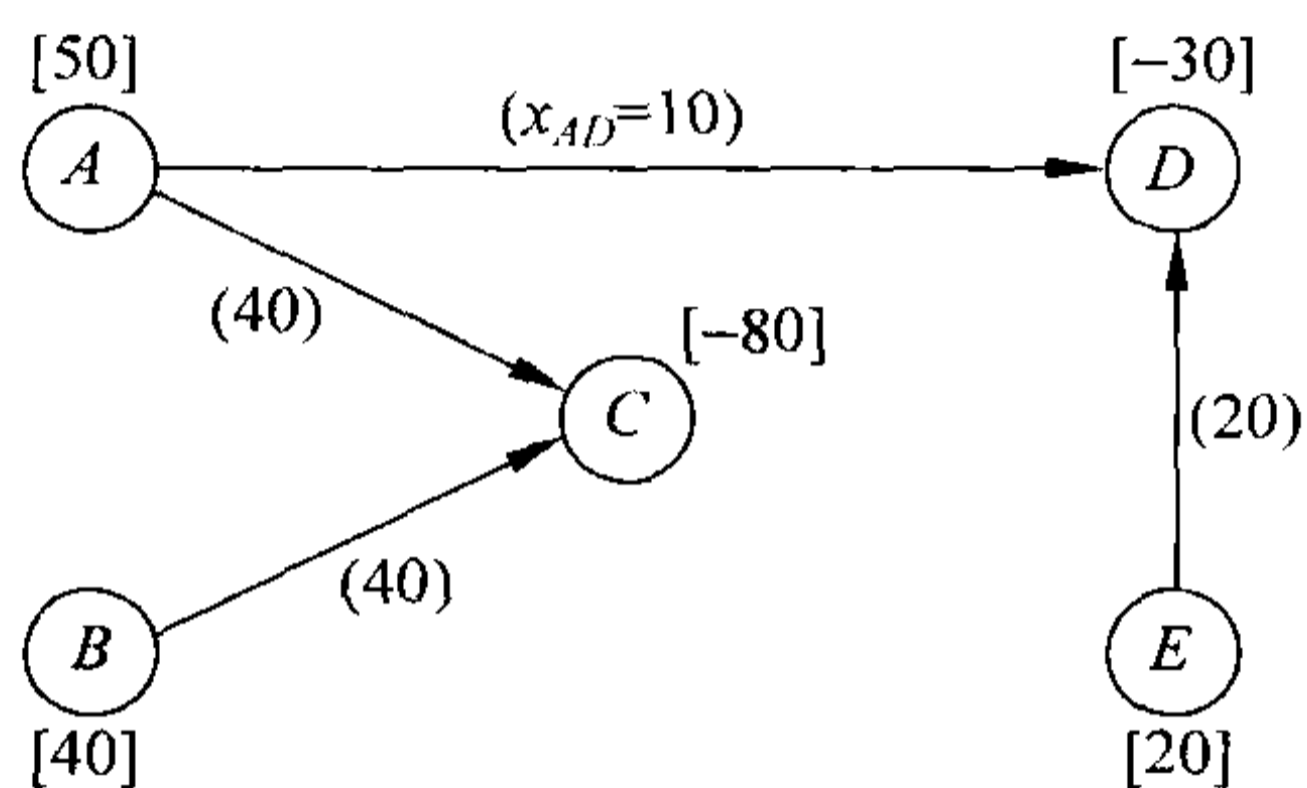


图 9.25 第四个 (最终) 可行生成树和解示意

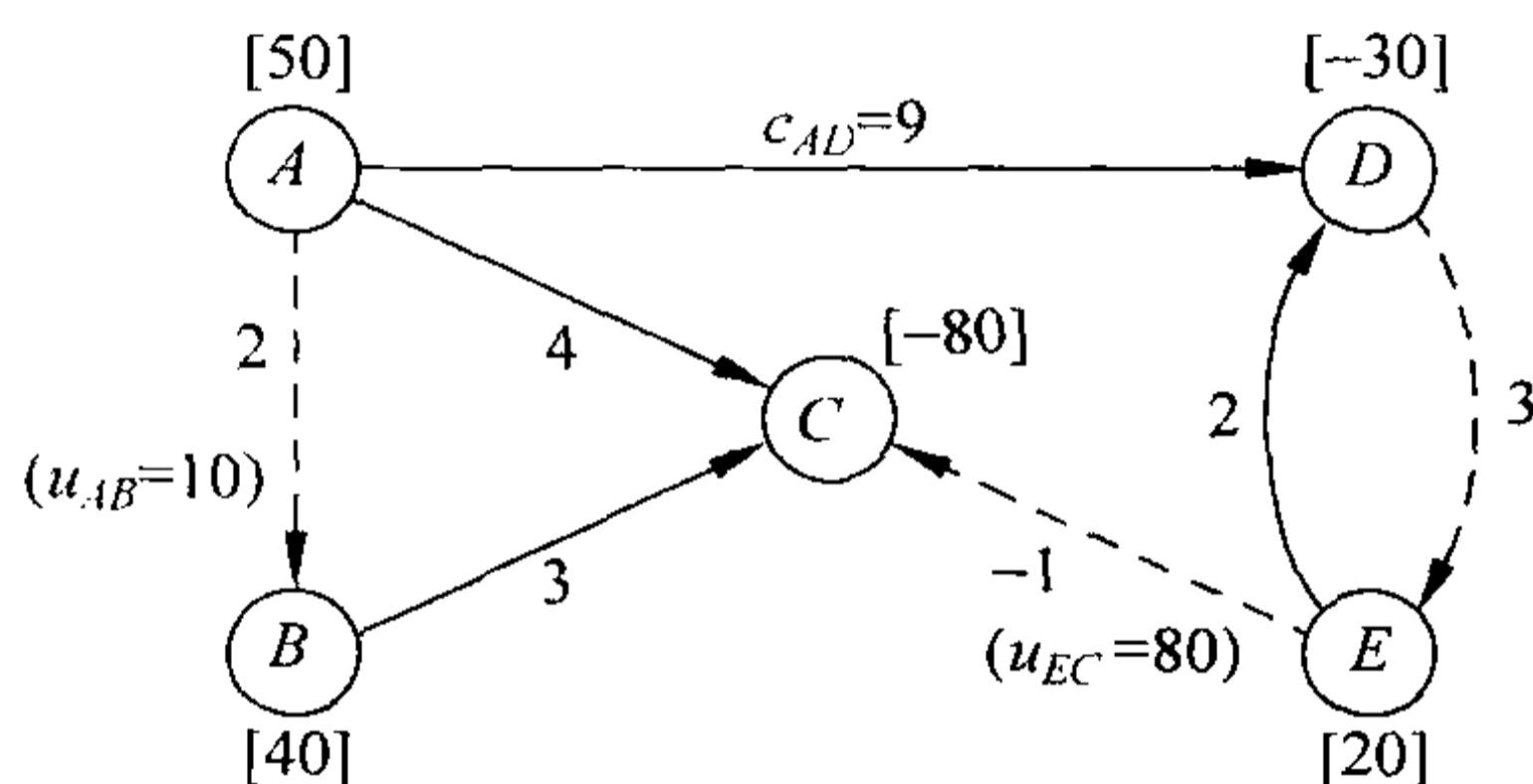


图 9.26 完成第三次迭代的调整后费用网络

通过最优测试: 使用图 9.25 和图 9.26, 通过表 9.6 的计算过程利用数学方法继续寻找下一个入基变量。然而, 没有一个非基变量使 ΔZ 的值为负, 即通过任意一个非基变量引入的流量都不能使 Z 值减小, 这就意味着当前的 BF 解 (图 9.25) 通过了最优检测, 应该停止进一步的运算。

表 9.6 第三次迭代后的最优测试		
非基本弧	生成环	当 $\theta=1$ 时的 ΔZ
$A \rightarrow B$	$AB-BC-AC$	$2+3-4=1$
$D \rightarrow E$	$DE-ED$	$3+2=5$
$E \rightarrow C$	$EC-AC-AD-ED$	$-1-4+9-2=2$

在进行最优测试时, 通过比较调整后的网络 (图 9.26) 与初始网络 (图 9.12), 识别正向弧的流量, 而不是使用反向弧的流量。可以看到, 除了节点 C 和节点 E 之间的弧之外, 其他弧的流向都是一致的。也就是说在图 9.26 中, 仅仅弧 $E \rightarrow C$ 是反向弧, 设其流量为 y_{CE} , 因而有 $x_{CE} = u_{CE} - y_{CE} = 80 - y_{CE}$, 弧 $E \rightarrow C$ 恰好是非基本弧, 所以通过正向弧 $C \rightarrow E$ 的流量为 $y_{CE} = 0$, $x_{CE} = 80$ 。其他弧的流量都与图 9.25 所给出的相同。因此, 最终得出的最优解如图 9.27 所示。

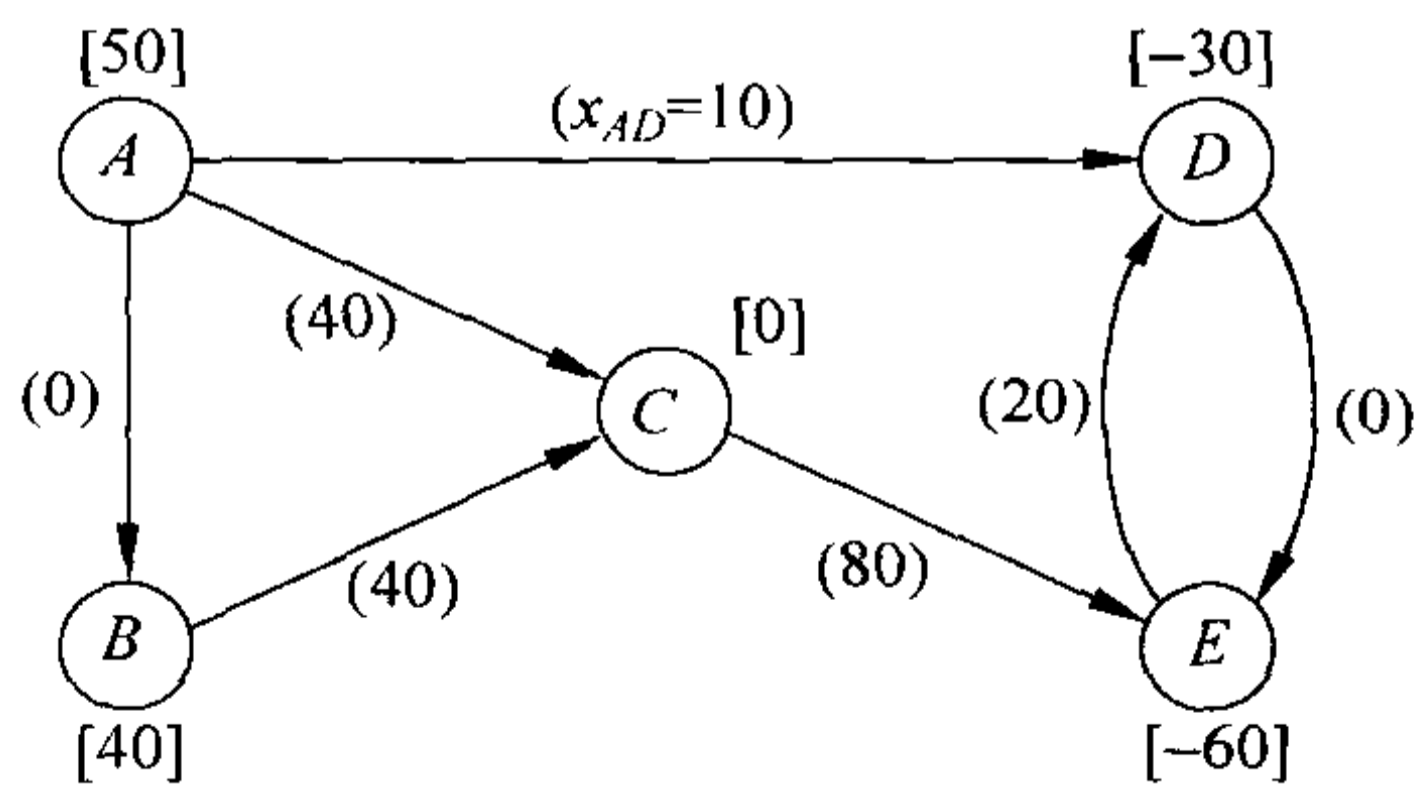


图 9.27 Distribution Unlimited 公司例子的最初网络的最优流



9.8 一个项目时间—费用平衡优化的网络模型

网络能以图形化的自然方式来描述一个大型项目的作业流程,如建筑项目、研发项目等。因此,网络理论的一个重要应用领域是辅助这种类型项目的管理。

20世纪50年代后期,两种基于网络的运筹学技术——PERT(项目评审技术)和CPM(关键路径技术)开始被分别开发独立地用来帮助项目管理人员完成工作。这些技术起初用于为如何协调不同的项目作业制订计划,为项目制订真实的日程表,并在项目实施中监测项目过程。多年以后,两种技术的优点被融合起来,形成目前通常所指的PERT/CPM技术。现在,这种用于项目管理的网络方法仍然有着广泛的应用。

项目时间—费用平衡的CPM方法是当初CPM技术的关键部分。这种方法能帮助解决下面的一个问题(项目必须在截止日期前完成)。假设项目所有的作业都以常规方式进行,项目将无法在截止日期前完成,但是可以通过花费更多的费用来加速某些作业等方法来满足项目在时间上的要求。然而选择什么样的最优方案才能在项目截止日期前完成项目并使总费用最小呢?

通常的做法是使用一个网络图来描述各项活动以及执行它们的顺序。通过边际分析或线性规划建立优化模型并找到解。与本章前面的其他网络优化模型一样,特殊的结构能高效地寻求这类问题的解。

一个原形实例——Reliable 建筑公司问题

Reliable 建筑公司中标了一份价值 540 万美元的建筑合同,为一家大型制造企业建造一个新车间。制造企业要求车间务必在 40 周内交付使用。

Reliable 公司指派其最优秀的项目经理 David Perty 负责该项目,确保工程进度。Perty 先生需要在不同的时间为许多员工分配不同的建筑作业。表 9.7 列出了需要完成的不同作业,第三列提供了其他重要的信息。

表 9.7 Reliable 建筑公司项目作业表

作 业	作业描述	紧前作业	估计工期
A	挖掘	—	2 周
B	基础	A	4 周
C	砌墙	B	10 周
D	盖屋顶	C	6 周
E	安装外管道	C	4 周
F	安装内管道	E	5 周
G	外墙板装修	D	7 周
H	电力系统	E,G	9 周
I	外部油漆	C	7 周
J	砌墙板	F,I	8 周
K	地板安装	J	4 周
L	内部油漆	J	5 周
M	外固定设备安装	H	2 周
N	内固定设备安装	K,L	6 周

对于任意给定的作业, **紧前作业**(immediate predecessors)(如表 9.7 的第三列所示)是指给定作业开始前必须完成的前一道作业。类似的, 将给定作业开始后方可开始的后一道作业称为**紧后作业**(immediate successor)。

例如, 第三列的前几项表示:

1. 挖掘作业不需要等待其他作业;
2. 挖掘作业必须在打基作业之前完成;
3. 打基作业必须在砌墙作业之前完工等。

当前作业多于一项紧前作业时, 所有的紧前作业都必须在该作业开始前完成。

为了给各项作业安排时间, Perty 先生咨询了各工作组的负责人, 对每项作业的常规作业时间进行评估, 评估结果如表 9.7 最后一列所示。

如果将各作业时间加起来总计为 79 周, 远远超过 40 周的工期要求。然而, 有些作业是可以同时进行的。在下面的内容中, 读者将会看到如何利用网络图来可视化地表示作业流程并获得完成项目所需要的总时间(如果各项作业都不延误的话)。

在本章, 读者已经看到赋予权值的网络是如何表示和帮助分析许多种类问题的。类似的, 网络图在项目管理时也可起到关键的作用。网络图不仅能够表达各项作业之间的关系、简洁地描述项目的整体计划, 也可以帮助项目分析。

项目网络图

用于表示一个项目的网络图称为**项目网络图**(project network)。一个项目网络图由一些节点(常用圆圈或三角形表示)和连接两个不同节点的弧(用箭头表示)组成。

如表 9.7 所示, 描述一个项目需要三种类型的信息。

1. 作业信息: 将项目分为多个独立的作业(按需要的详细程度);
2. 紧前关系: 找出每项作业的紧前作业;
3. 时间信息: 评估每项作业的工期。

项目网络图应该能够传达上述所有信息。有两种可以相互替代的项目网络图可以满足要求。

第一种是用弧来表示每项作业的 AOA(activity-on-arc)弧作业项目网络。节点用来分隔作业(发出弧)与其紧前作业(到达弧), 弧与弧之间的顺序代表了作业间的次序关系。

第二种是用节点表示每项作业的 AON(activity-on-node)节点作业项目网络。节点之间的弧用来表示作业的次序, 具有紧前作业的节点都有来自其紧前作业的弧指向它。

早期的 PERT 和 CPM 都是使用 AOA 项目网络图表达, 并且使用了很多年。但 AON 项目网络图与 AOA 项目网络图相比, 除了能表达相同的信息外, AON 项目网络图还具有以下优点:

1. AON 项目网络图比 AOA 项目网络图更容易构建;
2. AON 项目网络图比 AOA 项目网络图更容易被无经验的使用者理解, 包括许多管理者;
3. 当项目发生变化时, AON 项目网络图比 AOA 项目网络图更容易修改。

由于以上原因, AON 项目网络图已经比 AOA 项目网络图得到了更广泛的应用, 有

望成为项目网络图的标准。因此我们接下来只关注 AON 项目网络图。

图 9.28 表示了 Reliable 车间项目的项目网络图。^① 根据表 9.7 第三列的内容,注意

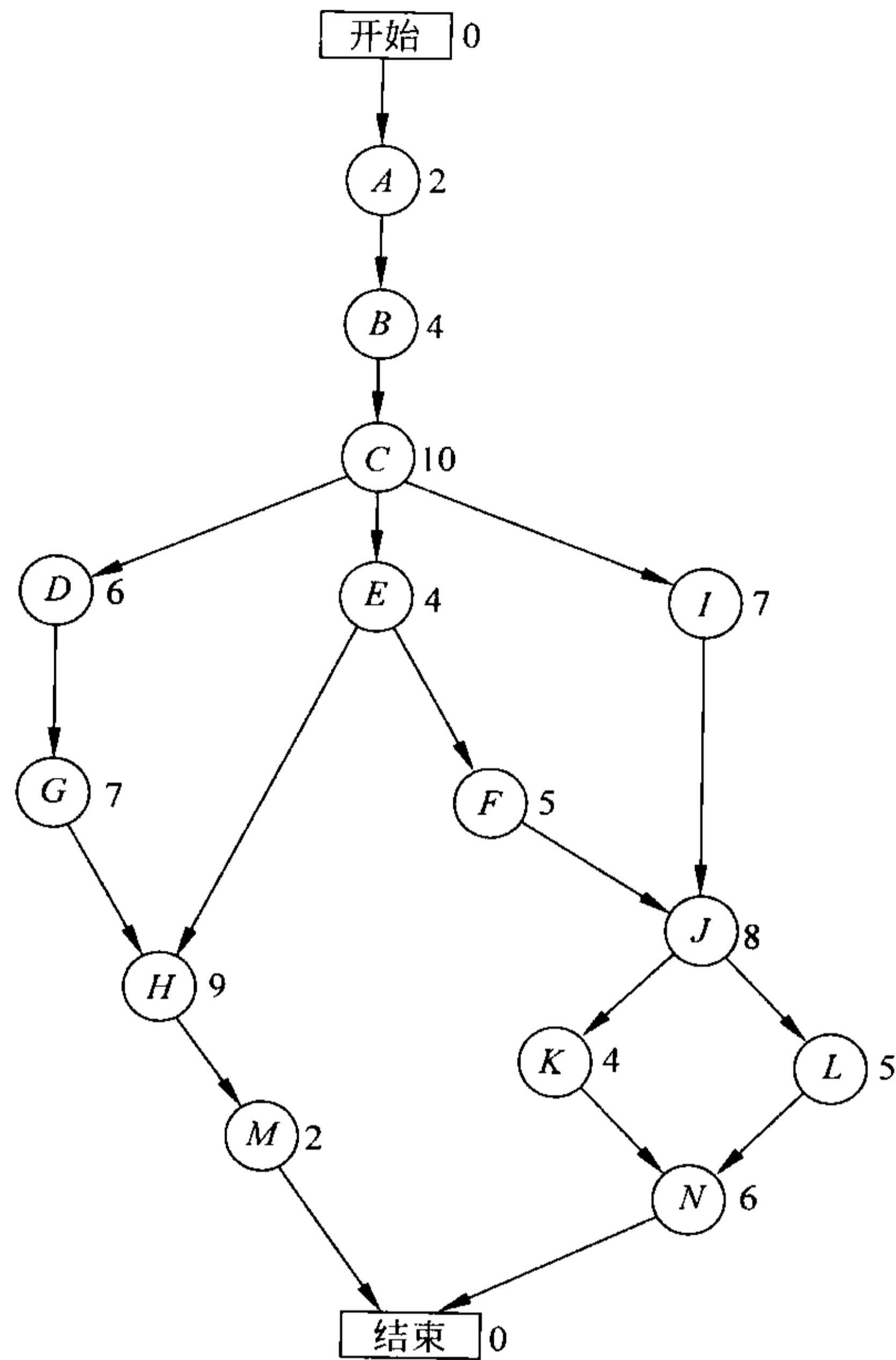


图 9.28 Reliable 建筑公司车间项目的项目网络

活动节点: A. 挖凿 B. 打地基 C. 粗墙 D. 房顶 E. 外部管道 F. 内部管道 G. 外部划线 H. 外部粉刷
I. 布电路 J. 墙板 K. 铺地板 L. 内部粉刷 M. 安装外部设备 N. 安装内部设备

观察弧是如何从紧前作业节点指向当前作业节点的。因为作业 A 没有紧前作业,我们增加了一个开始作业节点,并指向作业 A。类似的,节点 M、节点 N 没有紧后作业,从上述活动发出的弧指向最终节点。因此这个项目网络图表达了项目所有活动和次序的全貌(增加了项目的开始作业和结束作业)。引用表 9.7 最右一列的数据,节点旁边的数字记录了这项作业的估计工期(以周为单位)。

关键路径

前面曾计算过案例项目所有作业的合计工期是 79 周,但有些作业是可以同时进行的,那么项目究竟需要多长时间呢?

下面介绍项目网络图中的两个概念的含义。

路径(path): 在项目网络图中,表示从起始作业(start)到结束作业(finish)连贯组成

^① 虽然网络图的画法通常是从左到右,但为了方便排版,我们按从上到下的顺序。

的一条线路。路径长度(length):完成该路径上所有作业的持续时间(工期)总和。

在表 9.8 中列出了 Reliable 项目网络图中的 6 条路线及路线的长度。表中,路径长度最短为 31 周,最长为 44 周。

表 9.8 Reliable 项目网络图的路线及其长度

路 线	长度/周
开始→A→B→C→D→G→H→M→结束	$2+4+10+6+7+9+2=40$
开始→A→B→C→E→H→M→结束	$2+4+10+4+9+2=31$
开始→A→B→C→E→F→J→K→N→结束	$2+4+10+4+5+8+4+6=43$
开始→A→B→C→E→F→J→L→N→结束	$2+4+10+4+5+8+5+6=44$
开始→A→B→C→I→J→K→N→结束	$2+4+10+7+8+4+6=41$
开始→A→B→C→I→J→L→N→结束	$2+4+10+7+8+5+6=42$

在这些已经计算出的路径长度中,哪个应该作为该项目的工期(project duration)呢?下面我们分析导出。

因为在某路径上的各项作业都应该无交叉地按次序完成,所以项目工期不能短于该路径的长度。而项目工期也可能长于该路径的长度,由于该路径上有多个紧前作业的作业需要等到持续时间较长的那个紧前作业完成后才能开始进行,而持续时间较长的紧前作业可能位于其他路径中。例如,在表 9.8 中的第二条路径上的作业 H 就有两个紧前作业 G 和紧前作业 E,其中 G 就不在该路径上。作业 C 完成后,作业 E 仅需 4 周就可以完成,而完成作业 D 和完成作业 G 还需要 13 周的时间。因此项目工期应考虑较长的路径。

但项目工期不能长于项目网络图中的最长路径。在这条路径中作业能够不间断地按顺序完成(否则将不是最长路径)。在这条路径上,到达结束作业的时间正好等于路径的长度。

可以得出一个重要的结论:

(估计)项目工期等于项目网络图中最长路径的长度。这条最长的路径称为**关键路线**(critical path)。^①

对于 Reliable 项目,关键路径为:

START → A → B → C → E → F → J → L → N → FINISH

(估计)项目工期=44 周。

因此,如果没有延误出现的话,完成项目的总时间应该是 40 周。关键路径上的各作业都是瓶颈作业,任何一个作业完成时间的延误都将延误整个项目。这对于 Perty 先生来说是一个非常有价值的信息,他只需把注意力放在关键路径中的项目的规划表上,就可以规划出整个项目的时间表。另外,为了缩减项目的工期(合同要求是 40 周),关键路径上的作业是主要的缩减对象。

接下来,Perty 先生需要决定哪些作业的工期应该缩减,缩减多少,以使项目在 40 周的最迟完工工期内完成,并且花费的费用最小。他记起 CPM 提供了一个寻求时间—费

^① 虽然表 9.8 描述了列举所有路径和路径长度,对较小项目可用于找出关键路径。但第 22 章中描述了通常如何用 PERT/CPM 可以更方便获得各类信息,包括关键路径。

用平衡的优秀算法,所以他将使用这个算法解决问题。

下面让我们了解一下有关的背景。

各项作业的时间—费用平衡

先了解一下赶工的概念。

作业赶工:通过采取增加一定费用的特殊措施以将作业工期缩减到常规值以下。这些特殊措施包括加班、雇用临时的帮手、使用节省时间的材料、获得特殊的设备等。

项目赶工:指通过一些作业赶工使项目工期缩减至常规水平以下。

时间—费用平衡的 CPM 方法关心的是决定花费多少费用用于赶工,以使工期达到期望值。

时间—费用图可以给出解决这个问题所需要的数据。图 9.29 是一个典型的时间—费用关系图。注意图中标号为常规和赶工两个关键点。

常规点(normal point)在时间—费用图中表示某个作业以常规方式进行所需要的费用和时间。**赶工点**(crash point)在时间—费用图中表示某个作业全赶工时所需要的费用和时间,这时不再有多余的费用可用于缩减该作业的工期。作为一种近似算法,CPM 方法假设时间和费用都可以可靠地预测,且没有重大的误差。

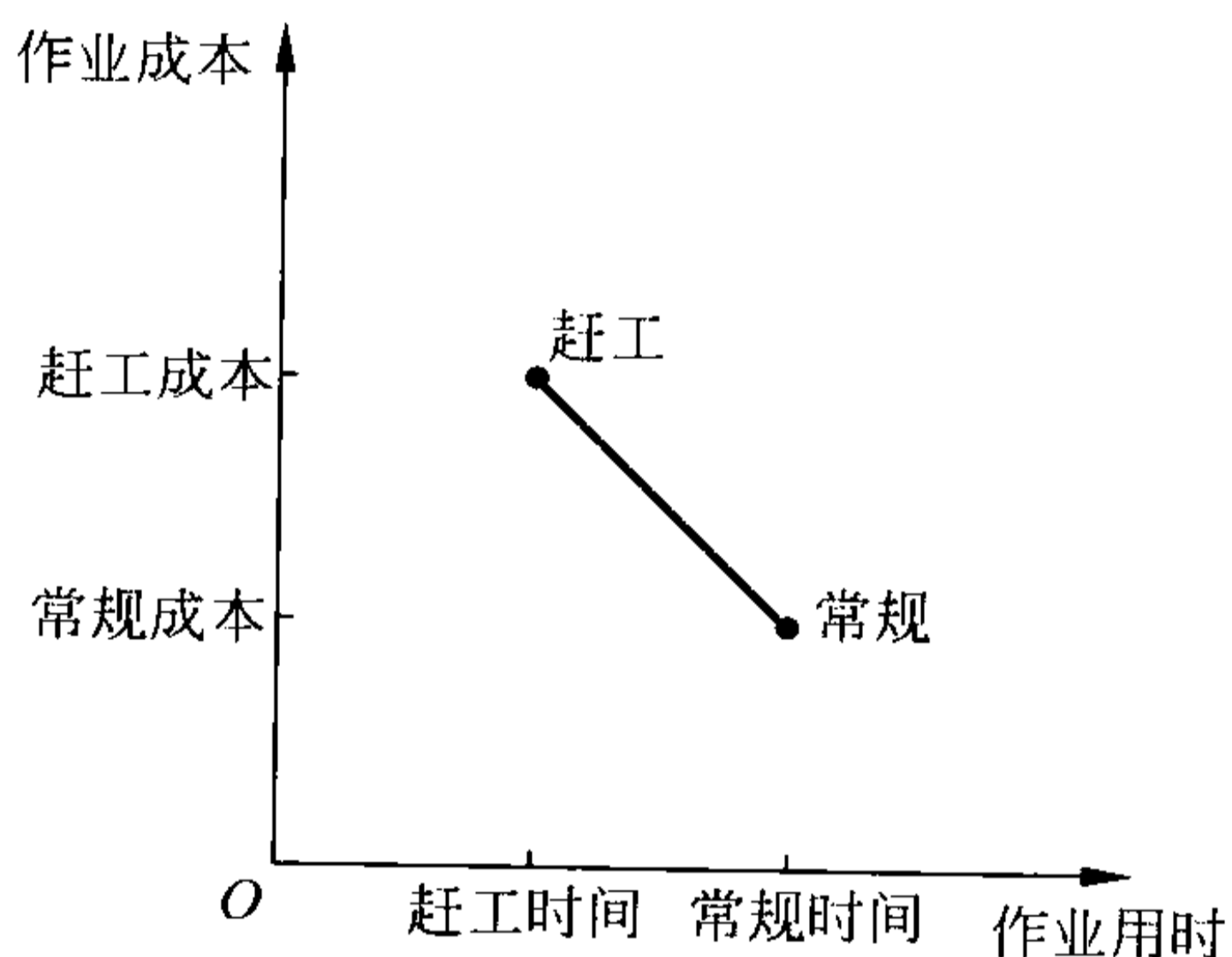


图 9.29 一个典型的作业时间—费用图

对于大多数的应用,在一定范围内的部分赶工作业情况下,假定时间和费用成线形关系,即时间和费用的组合为两点连线上的某一点^①(例如一半的赶工将为常规点与赶工点连线的中点)。这种近似将用于估计时间和费用的必要数据减少到两种情形,即常规情形(获得常规点)和全赶工情形(获得赶工点)。

使用这种方法,Perty 先生让员工和作业组负责人收集项目各项作业的上述数据。例如,墙板搭建作业组负责人认为增加两名员工并且加班能够确保墙板搭建作业工期从 8 周缩减到 6 周,且不能再缩小了。接着 Perty 的手下估算了这种方式全赶工的成本,并与常规作业的 8 周计划进行比较,数据如下:

作业 J(墙板搭建):

常规点: 时间=8 周,费用=430 000 美元;

赶工点: 时间=6 周,费用=490 000 美元;

最大缩减时间=8 周-6 周=2 周;

节省的每周赶工费用=(490 000 美元-430 000 美元)/2=30 000 美元。

以这种方式分析每项作业的时间—费用关系,可以获得如表 9.9 所示的数据。

^① 这是为方便作出的假设,只是一种粗略的近似,因为这种比例性和可整除性不成立,实际上时间—费用图是凸的曲线。线性规划的应用只能在各小段内线性近似,然后应用 12.8 节介绍的分离规划方法。

表 9.9 Reliable 项目各作业的时间—费用平衡数据

作 业	时 间		费 用		最大缩减 时间/周	节省一周的赶 工费用/美元
	常规/周	赶工/周	常规/美元	赶工/美元		
A	2	1	180 000	280 000	1	100 000
B	4	2	320 000	420 000	2	50 000
C	10	7	620 000	860 000	3	80 000
D	6	4	260 000	340 000	2	40 000
E	4	3	410 000	570 000	1	160 000
F	5	3	180 000	260 000	2	40 000
G	7	4	900 000	1 020 000	3	40 000
H	9	6	200 000	380 000	3	60 000
I	7	5	210 000	270 000	2	30 000
J	8	6	430 000	490 000	2	30 000
K	4	3	160 000	200 000	1	40 000
L	5	3	250 000	350 000	2	50 000
M	2	1	100 000	200 000	1	100 000
N	6	3	330 000	510 000	3	60 000

哪些作业应该赶工?

将表 9.9 中的常规费用和赶工费用分别进行合计,可得

常规费用总计=455 万美元,

赶工费用总计=615 万美元。

而这个项目公司将只收到 540 万美元,这包含了表中所列作业的所有成本,而且还包括提供给公司的合理利润。在赢得这 540 万美元合同的时候,Reliable 公司的经理认为,只要项目总成本控制在常规作业的 455 万美元左右,540 万美元这个数额就能够带来合理的利润。Perty 先生明白,他的责任就是尽可能地使项目的费用和工期接近预算和合同要求工期。

表 9.8 表明,如果按常规方式施工,项目预计工期为 44 周(没有任何作业延误的话)。如果所有作业都以全赶工方式施工,一个近似的计算表明,工期可能被缩减到只有 28 周。但是这样下来总费用将达到 615 万美元,因此全赶工方式是不可行的。

然而,Perty 先生想调查只对少数几个作业进行部分或全部赶工而将预期工期缩减到 40 周的可行性。

问题: 将(估计)工期缩减到特定程度时(40 周)赶工费用最小的方式是什么?

解决这个问题的方法之一是用**边际费用分析法**(marginal cost analysis),利用表 9.9 最右一列的数据(结合表 9.8)比较得出项目周期每缩减 1 周费用最小的赶工方式。使用这种方法时最简便的方式是建立一个与表 9.10 一样的表,列出项目网络图中所有路线及其当前长度。开始时,这些数据可以从表 9.8 中复制。

表 9.10 Reliable 项目边际费用分析的初始数据表

赶工作业	赶工费用	路径长度/周					
		ABCDGHM	ABCEHM	ABCEFJKN	ABCEFJLN	ABCIJKN	ABCIJLN
		40	31	43	44	41	42

由于表 9.10 中第四条路径是最长的(44 周), 缩减工期 1 周的唯一方式是缩减这条特殊路线——关键路径上作业的 1 周工期。对表 9.9 最右列给出的这些作业节省的每周赶工费用进行比较, 最小的是作业 *J* 的 30 000 美元(注意: 作业 *I* 虽具有相同的费用但不在关键路径上)。因此, 首先将作业 *J* 缩减一周。

变化后, 包含作业 *J* 的路径的长度都会发生变化(包括表 9.10 中第三、第四、第五、第六条路径), 变化结果见表 9.11 中的第二行数字。因为第四条路径仍是最长的(43 周), 进行同样的工期缩减, 再将作业 *J* 的工期缩减 1 周, 达到作业 *J* 能够赶工的最大值(2 周)。第二次缩减作业 *J* 后各路径的长度见表 9.11 中的第三行数字。

表 9.11 Reliable 项目边际费用分析过程的最终数据表

赶工作业	赶工费用 /美元	路径长度/周					
		ABCDGHM	ABCEHM	ABCEFJKN	ABCEFJLN	ABCIJKN	ABCIJLN
		40	31	43	44	41	42
<i>J</i>	30 000	40	31	42	43	40	41
<i>J</i>	30 000	40	31	41	42	39	40
<i>F</i>	40 000	40	31	40	41	39	40
<i>F</i>	40 000	40	31	39	40	39	40

这时最长的路径仍是第四条路径(42 周), 但作业 *J* 已经不能再缩减了。在这条路径上的其他作业中, 根据表 9.9 作业 *F* 成了费用最小的作业, 应该缩减作业 *F* 的工期, 缩减后结果见表 9.11 中的第四行数字。同理, 将作业 *F* 的工期再缩减 1 周(最多 2 周), 结果见表 9.11 中的最后一行数字。

这时最长的路径(第四条、第六条)长度已经达到了期望的 40 周, 所以不需要再进行多余的赶工。赶工作业费用的计算见表 9.11 的第二列, 总计为 14 000 美元。图 9.30 显示了最终的项目网络图, 加粗线表示关键路径。

由于作业 *J* 和作业 *F* 的赶工使图 9.30 中有三条关键路径, 原因是这三条路径的长度都是最长的 40 周。

对于规模较大的网络图, 边际费用分析就不再适用了, 需要使用效率更高的方法。因此标准的 CPM 过程改由先行规划替代(通常使用专门的软件开发特殊结构的网络优化模型)。

用线性规划制订赶工决策

需求费用最小的赶工作业方式的线性规划可以参考下面所列的其他比较熟悉的线性规划方法。

问题重述: 令 Z 表示赶工作业的总费用。问题是在满足项目工期小于或等于项目经理预期的时间的限制条件下, 使 Z 达到最小值。

自然的决策变量为:

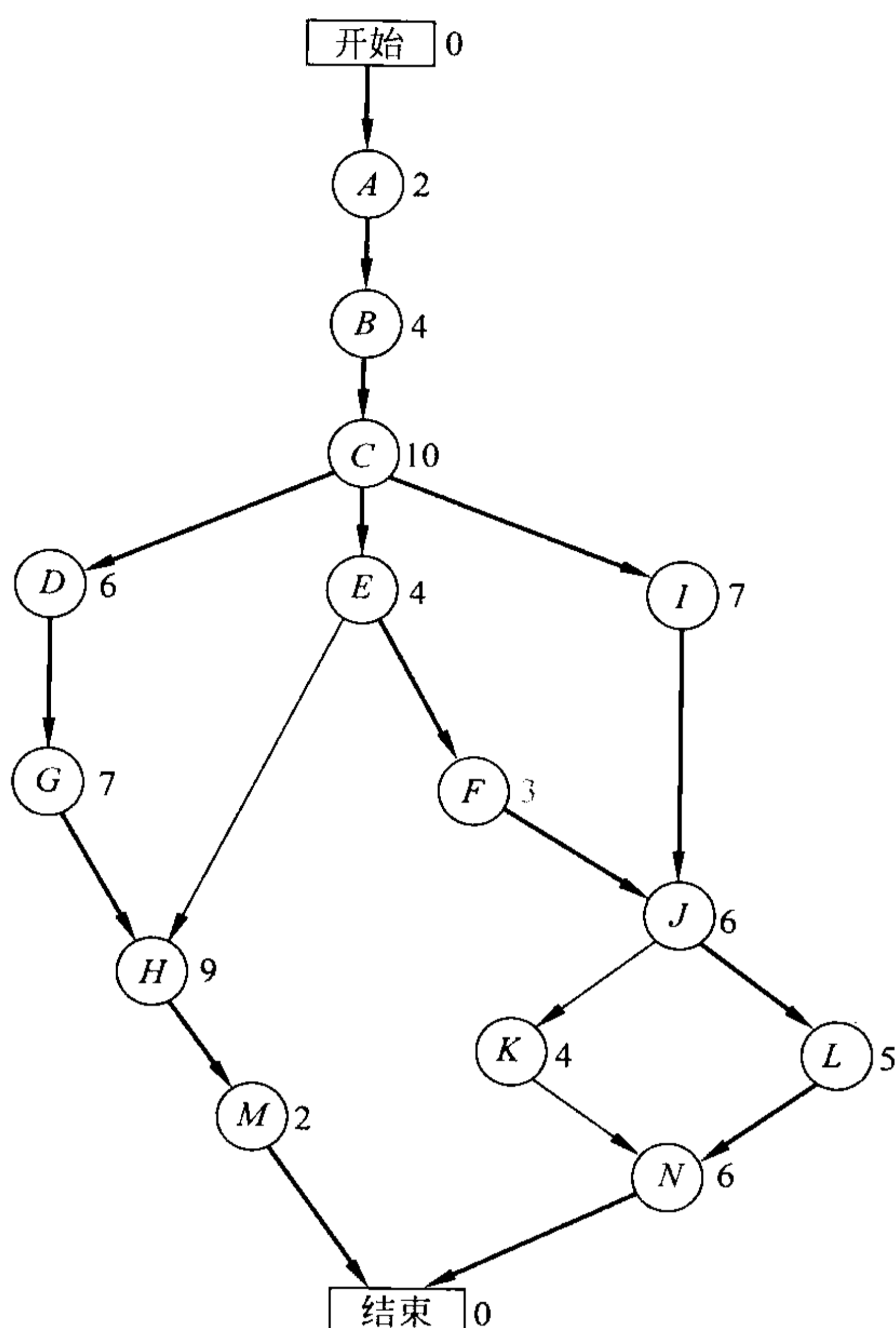


图 9.30 Reliable 项目赶工作业 J 、作业 F 后的项目网络(粗线表示关键路径)

x_j = 赶工作业 J 时缩减的工期, 其中 $j = A, B, \dots, N$ 。

使用表 9.9 的数据来表达目标函数:

$$Z = 100\,000x_A + 50\,000x_B + \dots + 60\,000x_N。$$

右边的 14 个决策变量都应该非负的, 且不能超过表 9.9 倒数第二列所给出的最大值。

而另一个限制条件是工期不能多于 40 周, 令

$$y_{\text{结束}} = \text{项目工期(即项目到达节点结束时所需要的时间)}。$$

则限制条件为

$$y_{\text{结束}} \leq 40$$

为了帮助线性规划给 $y_{\text{结束}}$ 分配恰当的值, 给定 x_A, x_B, \dots, x_N 的值, 在模型中引入下列辅助变量将带来很大便利。

y_j = 作业 j ($j = B, C, \dots, N$) 的开始时间, 对应决策变量 x_j (作业 A 不需要辅助变量, 因为作为项目的开始作业将自动地指定为 0)。将结束节点作为一个工期为 0 的作业对待, 因此对应作业结束的 y_j 的定义也与先前的 $y_{\text{结束}}$ 的定义一致。

每项作业的开始时间(包括结束)与其紧前作业的开始时间和工期有关。

对于每项作业($B, C, \dots, N, \text{结束}$)与其紧前作业, 作业的开始时间 \geq 紧前作业(的开始时间 + 工期)。

进一步,利用表 9.9 的常规作业时间数据,可知

作业 j 的工期 = 常规时间 - x_j 。

例如,对于项目网络图(见图 9.28)中的作业 F ,作业 F 的紧前作业为 E : E 的工期 = $4 - x_E$ 。

两个作业之间有这样的关系:

$$y_F \geq y_E + 4 - x_E$$

即作业 F 直到作业 E 开始并完成工期的 $4 - x_E$ 后才能开始。

对于另一个作业 J ,它有两个紧前作业:

$$\text{作业 } F, \text{ 工期} = 5 - x_F$$

$$\text{作业 } I, \text{ 工期} = 7 - x_I$$

它们之间的关系是:

$$y_J \geq y_F + 5 - x_F$$

$$y_J \geq y_I + 7 - x_I$$

这些不等式表明作业 J 必须在其两个紧前作业完成后才能开始。

现在,包括完整的所有作业的约束条件,可得到如下的线性规划模型:

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = 100\,000x_A + 50\,000x_B + \cdots + 60\,000x_N \\ \text{s. t.} \end{aligned}$$

1. 最大缩减约束(表 9.9 中倒数第二列数字)

$$x_A \leq 1, x_B \leq 2, \cdots, x_N \leq 3$$

2. 非负约束

$$x_A \geq 0, x_B \geq 0, \cdots, x_N \geq 0$$

$$y_B \geq 0, y_C \geq 0, \cdots, y_N \geq 0, y_{\text{结束}} \geq 0$$

3. 开始时间约束

如前面的目标函数所描述的,除了作业 A 没有紧前作业外,有一个紧前作业的各项作业有一个时间约束;而有两个紧前作业(作业 B 、作业 C 、作业 D 、作业 E 、作业 F 、作业 G 、作业 I 、作业 K 、作业 L 、作业 M)的作业(作业 H 、作业 J 、作业 N 、作业结束)有两个时间约束。

一个紧前作业:

$$y_B \geq 0 + 2 - x_A$$

$$y_C \geq y_B + 4 - x_B$$

$$y_D \geq y_C + 10 - x_C$$

⋮

$$y_M \geq y_H + 9 - x_H$$

两个紧前作业:

$$y_H \geq y_G + 7 - x_G$$

$$y_H \geq y_E + 4 - x_E$$

⋮

$$y_{\text{结束}} \geq y_M + 2 - x_M$$

$$y_{\text{结束}} \geq y_N + 6 - x_N$$

4. 项目工期约束

$$y_{\text{结束}} \leq 40$$

图 9.31 显示了利用电子表格来计算这个线性规划模型的过程。将决策的变量列在可变单元格中,如开始时间(I6 : I19),时间缩减(J6 : J19),项目完成时间(I22)。

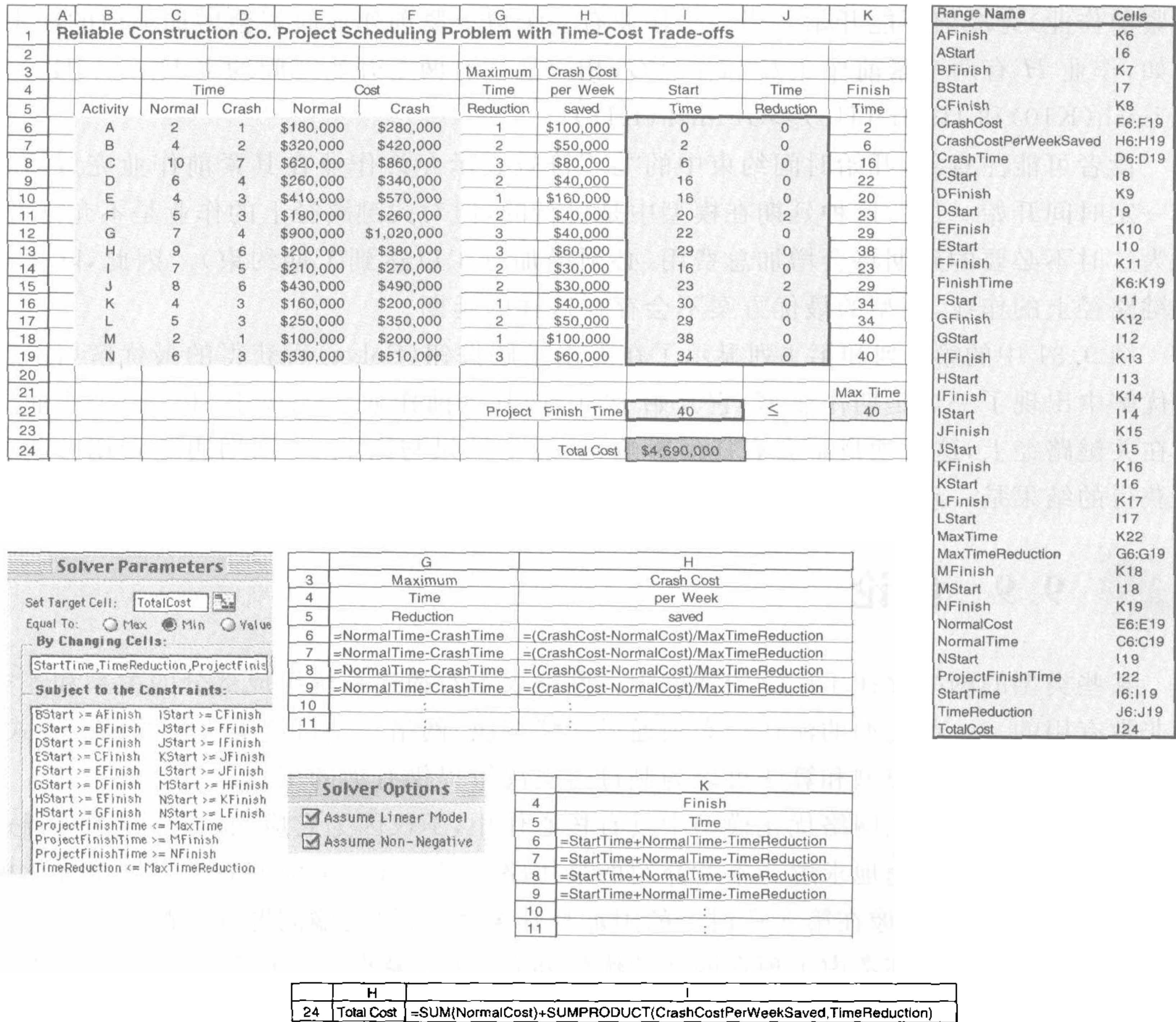


图 9.31 Reliable 项目应用 CPM 时间—费用平衡法在电子表格(Excel)中计算的结果(其中第 I 列、第 J 列显示了最优解)

B 列到 H 列引自表 9.9。根据图中间部分的等式,G 列和 H 列的数字以从上至下的计算顺序获得。K 列的数字表示作业的完成时间,等于作业开始时间加上常规工期再减去由于赶工而缩减的时间。目标单元格 I24 表示总费用(Total),等于常规时间总和减去赶工缩减的时间之和。

求解对话框的最后一列约束条件,时间缩减(J6 : J19) ≤ 最大时间缩减(G6 : G19),

即每项作业的时间缩减不能超出 G 列所给出的最大值。另外两个前提约束,项目完成时间(I22) \geq MFinish (K18)和项目完成时间(I22) \geq NFinish K19)表明项目不能先于两个紧前作业 M 和作业 N 完成。最后,约束条件项目完成时间(I22) \leq 最大时间(K22)是一个关键的约束条件,表示项目必须在 40 周内完成。

涉及开始时间(I6 : I19)的开始时间约束表示作业不能在它的任何一个紧前作业完成之前开始。例如,第一个约束条件,Bstart(I7) \geq AFinish(K6)表示作业 B 在作业 A (B 的紧前作业)完成前不能开始。当一个作业有一个以上紧前作业时就会增加类似的约束。例如,作业 H 有两个紧前作业 E 和作业 G,相应地就有两个开始时间约束 Hstart(I13) \geq EFinish(K10)和 Hstart(I13) \geq GFinish(K12)。

读者可能注意到,开始时间约束中的“ \geq ”符号表示允许作业在其紧前作业完成后延期一定时间开始。虽然这种延期在模型中是可行的,但对关键路径上的作业是不允许的,因为这时不必要的延期将会增加总费用(必须增加赶工以达到工期约束)。因此,除了非关键路径上的作业,模型的最优方案不会存在这样的延期。

图 9.31 中的第 I 列和第 J 列显示了在点击求解按钮(Solve)后获得的最优解(注意:最优解中出现了一个延期作业 K,它开始于 30,而其紧前作业 J 完成于 29。因为作业 K 不在关键路径上,这对项目不会有任何影响)。这个结果与图 9.30 利用边际费用分析方法获得的结果是一致的。



9.9 结论

某些类型的网络存在于广泛的情境中。网络表示对描述系统组成部分的关系和连接是非常有用的。一些类型的流往往必须通过网络解决,网络是制订这类决策的最好方式。本章介绍的网络优化模型和算法可以为制订这类决策提供有力的工具。

最小费用流问题在网络优化模型中具有核心作用,不仅因为它应用广泛,还因为通过网络单纯形法能够快速求解。本章介绍的最短路径问题和最大流问题也是网络优化模型的两个基本问题,就像在第 8 章讨论的附加特殊案例一样(运输问题和分配问题)。

本章所有的模型都考虑了现存网络的优化问题,其中最小生成树是优化新网络设计的典型例子。

费用—时间平衡的 CPM 方法为项目管理提供了一个非常优秀的网络模型解决方法,能够使项目以最少的费用达到工期的限制。

本章仅仅是对网络方法学的当前研究和应用状况作了一些简单的介绍。由于网络具有的组合格性,网络问题通常比较难以解决。然而,在功能强大的设计和求解方法学方面我们已取得了巨大进步。事实上,近年来算法的发展已做到使我们能够成功求解大规模的复杂网络问题。

参考文献

1. Ahuja, R. K., T. L. Magnanti, and J. B. Orlin: *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.
2. Bertsekas, D. P.: *Network Optimization: Continuous and Discrete Models*, Athena Scientific Publishing, Belmont, MA, 1998.
3. Cai, X., and C.K. Wrong: *Time Varying Network Optimization*, Springer, New York, 2007.
4. Dantzig, G. B., and M. N. Thapa: *Linear Programming 1: Introduction*, Springer, New York, 1997, chap. 9.
5. Hillier, F. S., and M. S. Hillier: *Introduction to Management Science: A Modeling and Case Studies Approach with Spreadsheets*, 3rd ed., McGraw-Hill/Irwin, Burr Ridge, IL, 2008, chap. 6.
6. Magnanti, T. L., and R. T. Wong: "Network Design and Transportation Planning: Models and Algorithms," *Transportation Science*, **18**: 1–55, 1984.
7. Vanderbei, R. J.: *Linear Programming: Foundations and Extensions*, 3rd ed., Springer, New York, 2008, chapters. 14 and 15.

习题

网络优化模型的一些得奖应用:

(下列所有论文可由本书网站提供,可查 www.mhhe.com/hillier)

- A1. Ben-Khedher, N., J. Kintanar, C. Queille, and W. Stripling: "Schedule Optimization at SNCF: From Conception to Day of Departure," *Interfaces*, **28**(1): 6–23, January–February 1998.
- A2. Blais, J.-Y., J. Lamont, and J.-M. Rousseau: "The HASTUS Vehicle and Manpower Scheduling at the Société de transport de la Communauté urbaine de Montréal," *Interfaces*, **20**(1): 26–42, January–February 1990.
- A3. Cosares, S., D. N. Deutsch, I. Saniee, and O. J. Wasem: "SONET Toolkit: A Decision-Support System for Designing Robust and Cost-Effective Fiber-Optic Networks," *Interfaces*, **25**(1): 20–40, January–February 1995.
- A4. Huisingh, J. L., H. M. Yamauchi, and R. Zimmerman, "Saving Federal Tax Dollars," *Interfaces*, **31**(5): 13–23, September–October 2001.
- A5. Klingman, D., N. Phillips, D. Steiger, and W. Young: "The Successful Deployment of Management Science throughout Citgo Petroleum Corporation," *Interfaces*, **17**(1): 4–25, January–February 1987.
- A6. Powell, W. B., Y. Sheffi, K. S. Nickerson, K. Butterbaugh, and S. Atherton: "Maximizing Profits for North American Van Lines' Truckload Division: A New Framework for Pricing and Operations," *Interfaces*, **18**(1): 21–41, January–February 1988.
- A7. Prior, R. C., R. L. Slavens, J. Trimarco, V. Akgun, E. G. Feitzinger, and C.-F. Hong: "Menlo Worldwide Forwarding Optimizes Its Network Routing," *Interfaces*, **34**(1): 26–38, January–February 2004.
- A8. Srinivasan, M. M., W. D. Best, and S. Chandrasekaran: "Warner Robins Air Logistics Center Streamlines Aircraft Repair and Overhaul," *Interfaces*, **37**(1): 7–21, January–February 2007.
- A9. Vasquez-Marquez, A.: "American Airlines Arrival Slot Allocation System (ASAS)," *Interfaces*, **21**(1): 42–61, January–February 1991.

一些问题(或它们中的一部分)左侧的符号有下列意义:

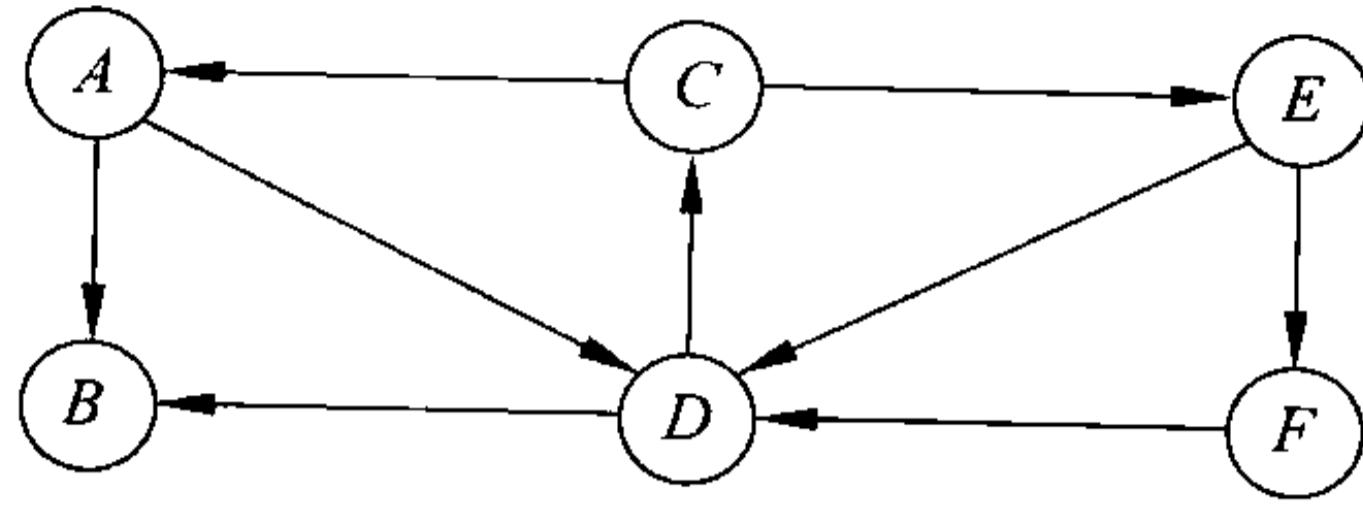
D: 学习支持中列出的展示例子可能会有帮助。

I: 使用本章所给出的相关程序。

C: 使用任一软件方案用计算机解决问题。

习题前面的星号提示读者问题至少与所示章节的部分内容有关。

9.2-1 考虑下面的有向网络图,然后回答问题。



- 在节点 A 与节点 F 之间找到一条有向路径,并指出其他三条非有向路径;
- 找到三条有向环,并指出一条包含所有节点的非定向环;
- 指出组成一个生成树的弧集合;
- 使用如图 9.3 所示的过程,以一次增加一条弧的方式构建两个生成树,要求与 (c) 不同的树。

9.3-1 阅读 9.3 节应用案例中概述并在其参考文献中详述的运筹学研究的文章。简述网络优化模型如何在该项研究中得到应用的,然后列出这项研究结果的各类财务与非财务的效益。

9.3-2 假设你需要驾车到一个陌生的城市,因此你通过研究地图来决定到达目的地的最短路线。沿途可能经过 5 个城市(分别用 A、B、C、D、E 表示),你将如何选择路线? 下表中的数字表示两个城市直达的距离,“—”线表示两个城市无法直接到达。

城市	距 离					终点
	A	B	C	D	E	
始点	40	60	50	—	—	—
A		10	—	70	—	—
B			20	55	40	—
C				—	50	—
D					10	60
E						80

- 将此问题归结为最短路径问题,并画出网络图;
- 使用 9.3 节介绍的算法解决此最短路径问题;
- 使用电子表格为此问题建模并给出解;
- 如果表中的数字代表驾车的费用,给出问题(b)和问题(c)有关最小费用的答案;
- 如果表中的数字代表驾车的的时间,给出问题(b)和问题(c)有关最少时间的答案。

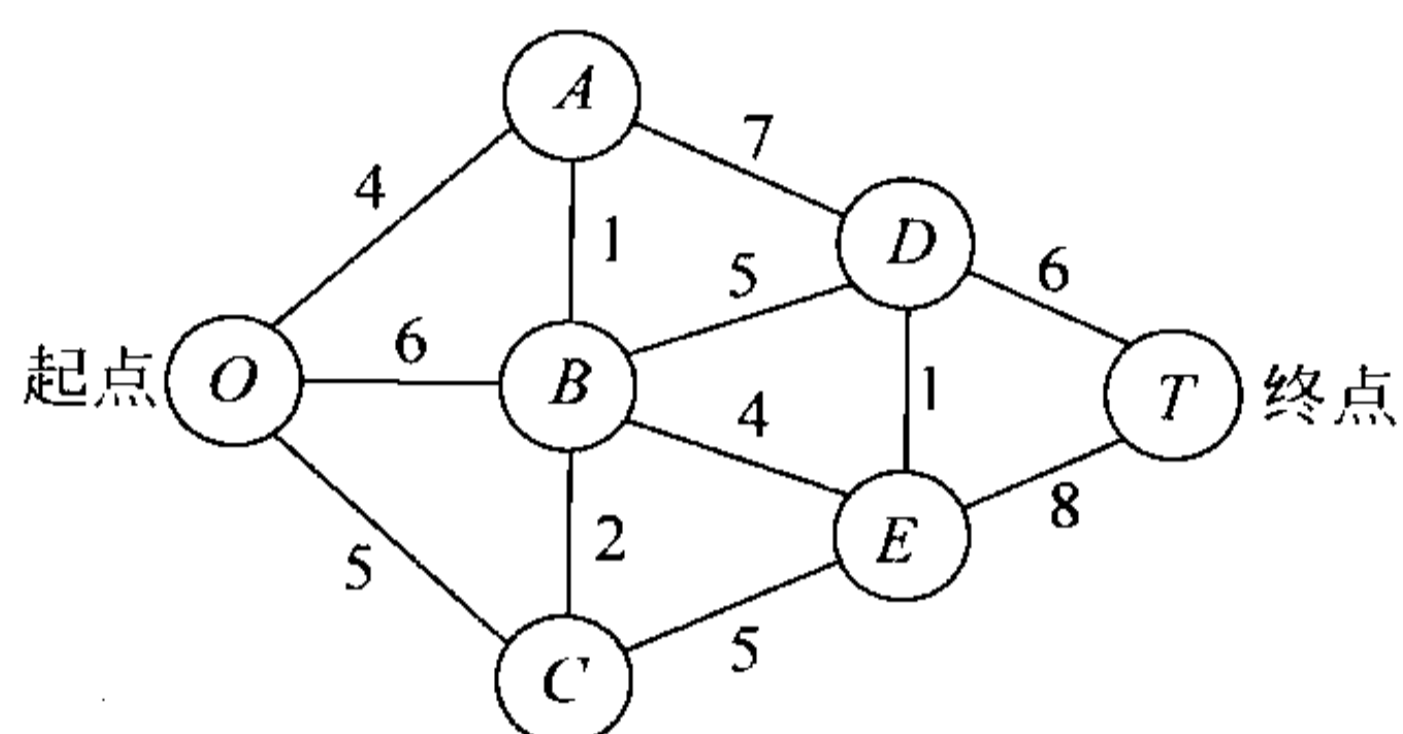
9.3-3 在一个不断发展壮大的小型机场,当地的航空公司计划购买一辆新的拖车在机场中托运行李。自动化的行李搬运系统将在 3 年后投入使用,那时拖车将不再使用。由于承载重量,拖车的使用和维修成本将随着使用年限的增加而快速增加,也可能 1 年或 2 年后更换新的拖车更加经济。下表给出了在第 i 年年底购买、在第 j 年年底卖出的相关的总成本(购价减去折扣,再加上运行和维修费用)。请问如何决策才能使 3 年内总费用最小?

- 将此问题归结为最短路径问题;

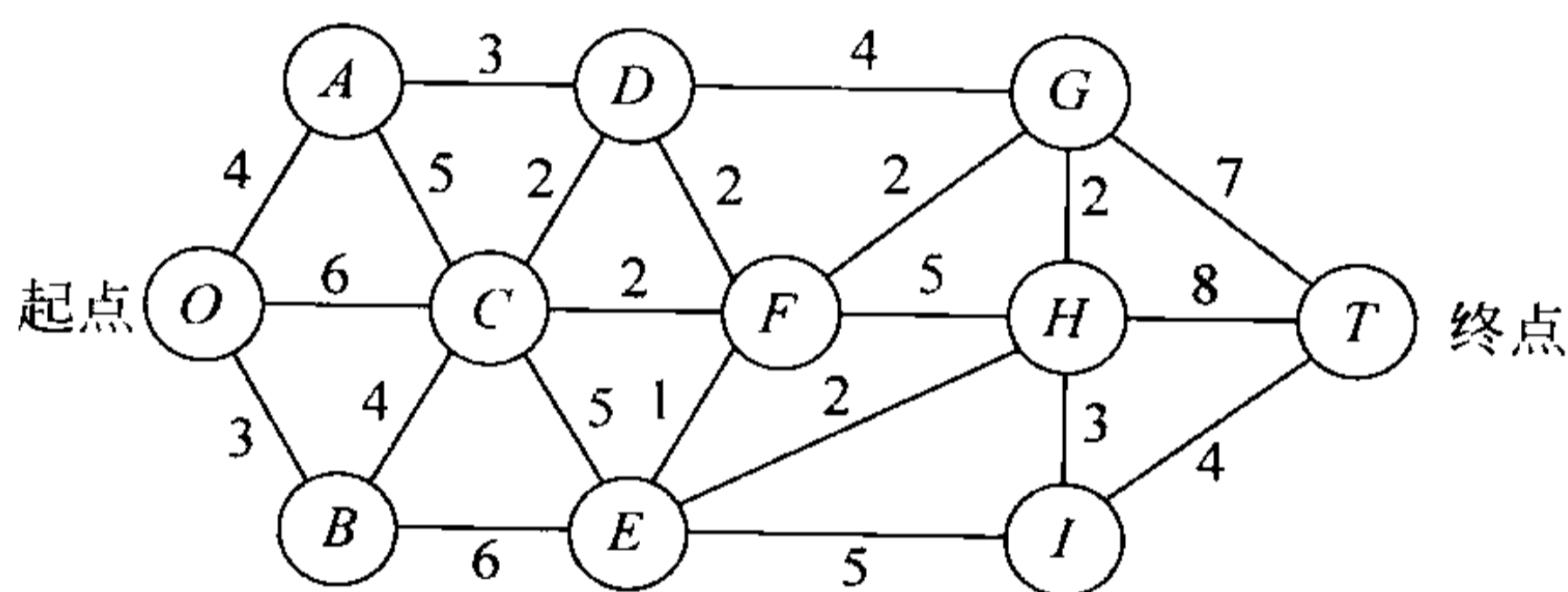
		j/美元		
		1	2	3
i	0	13 000	28 000	48 000
	1		17 000	33 000
	2			20 000

- (b) 使用 9.3 节介绍的算法解决此最短路径问题；
- C(c) 使用电子表格为此问题建模并给出解。

9.3-4* 使用 9.3 节介绍的算法寻找下面网络图的最短路径(路径上的数字代表两个节点之间的距离)。



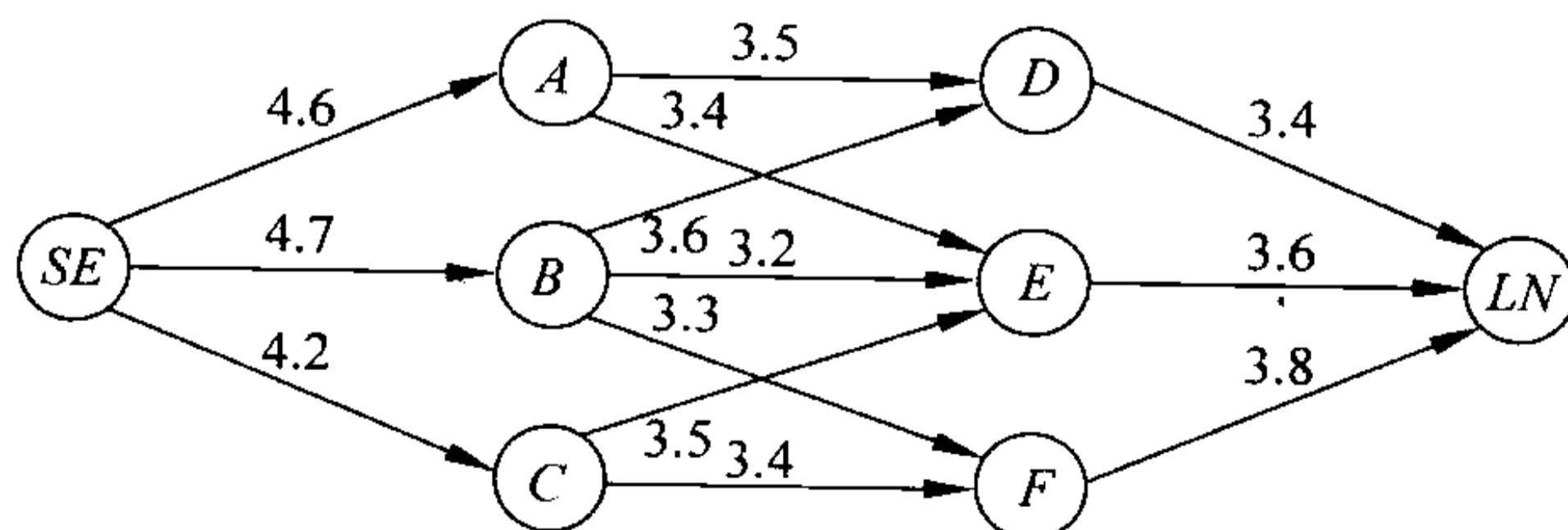
(a)



(b)

9.3-5 将最短路径问题表述成一个线性规划问题。

9.3-6 Speedy 航空公司拟开通一条从西雅图飞往伦敦的直达航线。按照天气条件,有下图所示的几条航线可供选择。其中 SE 和 LN 分别代表西雅图和伦敦,弧上的数字表示由于风向影响而需要的飞行时间(根据气象报告),也代表了油料的消耗。因为油耗费用是巨大的,所以 Speedy 航空公司的经理希望建立一条费用最小的航线。



- (a) 在利用最短路径解决此问题时,什么可以代表最短路径问题中的距离?
- (b) 使用 9.3 节介绍的算法解决此最短路径问题;
- C(c) 使用电子表格为此问题建模并给出解。

9.3-7 Quick 公司获悉一个竞争对手正计划推出一种有很大市场潜力的新产品。Quick 公司也已经计划在 20 个月后推出类似的产品。现在,研发已接近完成,Quick 公司的管理层希望加速上市以应付竞争。

完成此产品必须经过 4 个不可逾越的阶段,包括当前正以正常速度进行的未完成的研发工作。每个阶段都可以有优先或赶工两种进度加速完成。下表中的数字代表了每种进度下所需的时间(月数)。

作业方式	时间/月			
	剩余研究	开发	生产系统设计	初次生产和配送
常规	5	(4)	(7)	(4)
优先	4	3	5	2
赶工	2	2	3	1

管理层已经为这四个阶段分配了总计 3 000 万美元的预算。每阶段在每种进度下的费用如下表所示。

作业方式	费用/百万美元			
	剩余研究	开发	生产系统设计	初次生产和配送
常规	5	—	—	—
优先	9	10	14	6
赶工	14	15	19	9

管理层希望在不超出总预算 3 000 万美元的情况下,为每个阶段确定一种进度,使整个进度时间最短。

- (a) 将此问题归结为最短路径问题;
- (b) 使用 9.3 节介绍的算法解决此最短路径问题。

9.4-1* 使用 9.4 节表述的最小支撑树算法,在习题 9.3-4 的网络图中分别找到最小支撑树。

9.4-2 Wirehouse Lumer 公司拟在某个地区的 8 个树林中进行伐木作业。因此必须在这 8 个树林之间开辟出一个通路,使其能相互贯通。下面列出了 8 个树林之间的距离。管理层现在希望这个通路总的距离最短。

	树林之间的距离							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	—	1.3	2.1	0.9	0.7	1.8	2.0	1.5
2	1.3	—	0.9	1.8	1.2	2.6	2.3	1.1
3	2.1	0.9	—	2.6	1.7	2.5	1.9	1.0
4	0.9	1.8	2.6	—	0.7	1.6	1.5	0.9
5	0.7	1.2	1.7	0.7	—	0.9	1.1	0.8
6	1.8	2.6	2.5	1.6	0.9	—	0.6	1.0
7	2.0	2.3	1.9	1.5	1.1	0.6	—	0.5
8	1.5	1.1	1.0	0.9	0.8	1.0	0.5	—

- (a) 将此问题归结为最小支撑树问题；
- (b) 使用 9.4 节介绍的算法解决此最小支撑树问题。

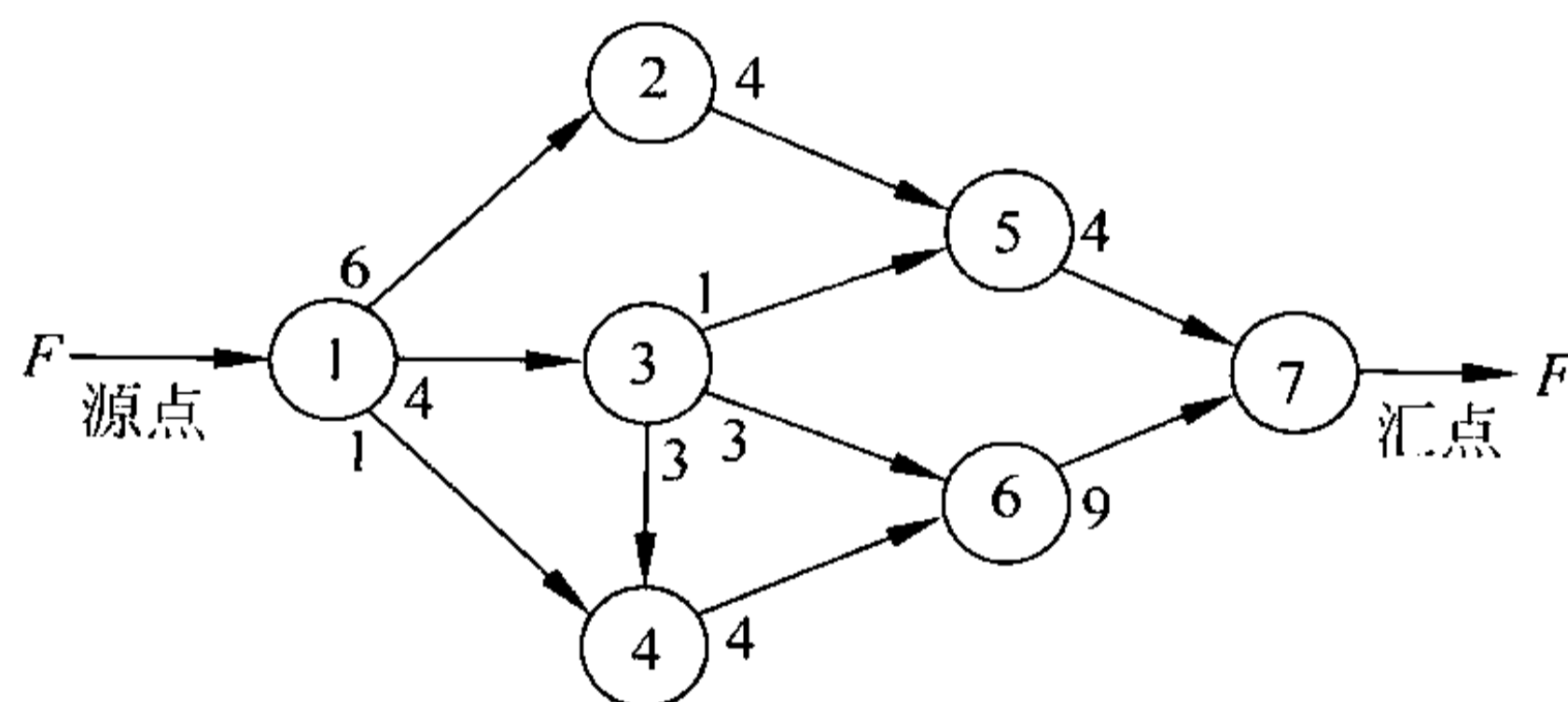
9.4-3 Premiere 银行计划不久将用专用的电话线把总部的计算机与每个分支机构的计算机终端连接起来。每个分支机构的计算机不必都与总部的计算机直接相连。这种专用电话线的价格是连接距离(英里)的 100 倍。

	距 离					
	总部	分支 1	分支 2	分支 3	分支 4	分支 5
总部	—	190	70	115	270	160
分支 1	190	—	100	110	215	50
分支 2	70	100	—	140	120	220
分支 3	115	110	140	—	175	80
分支 4	270	215	120	175	—	310
分支 5	160	50	220	80	310	—

管理层希望所有分支结构都能够与总部直接或间接连通的前提下使购买专用电话线的费用最小。

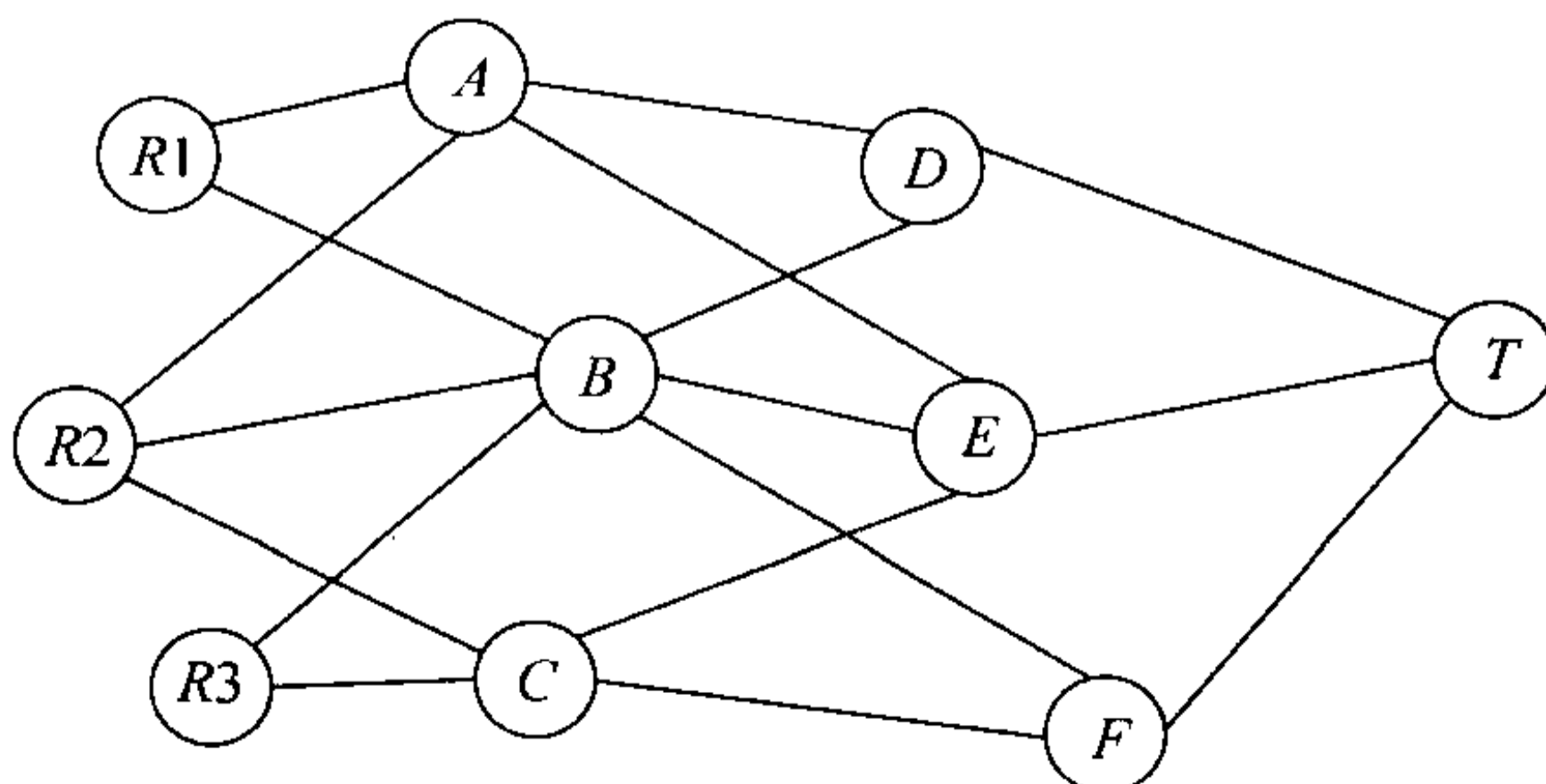
- (a) 将此问题归结为最小支撑树问题；
- (b) 使用 9.4 节介绍的算法解决此最小支撑树问题。

9.5-1* 观察下面的网络图,使用 9.5 节给出的增广链算法,找到从源点到汇点的最大流,紧邻节点的数字表示两节点弧的容量。画出你的结果。



9.5-2 将最大流问题描述为线性规划。

9.5-3 下图描述的是一个水渠系统,其中 R1、R2、R3 代表三条河流, A、B、C、D、E 代表水渠的交汇地点, T 表示水渠终点的一个城市。水渠的长度以千米为单位,左边的表给出了水渠系统的每日最大流量,城市水资源管理部门希望制订一个方案使到达城市的水流量最大。



	到			
从		A	B	C
R1		130	115	—
R2		70	90	110
R3		—	140	120

	到				到	
从		D	E	F	从	T
A		110	85	—	D	220
B		130	95	85	E	330
C		—	130	160	F	240

(a) 将此问题归结为最大流问题,分别指出发点(源)、收点(汇)和中间点,并画出完整的网络图,给出每条弧的容量;

(b) 使用 9.5 节介绍的方法给出解;

(c) 使用电子表格解此问题。

9.5-4 Texago 公司有 4 个油田、4 个炼油厂和 4 个集散中心。一次大规模的运输行业的罢工大大地缩减了公司从油田到炼油厂的石油运输及炼油厂与集散中心之间的石油产品的运输能力。使用千桶作为原油的度量单位,下表给出了各点之间的最大运输能力。

油田	炼油厂			
	新奥尔良	查尔斯顿	西雅图	圣路易斯
得克萨斯	11	7	2	8
加利福尼亚	5	4	8	7
阿拉斯加	7	3	12	6
中东	8	9	4	15

炼油厂	集散中心			
	匹兹堡	亚特兰大	堪萨斯城	旧金山
新奥尔良	5	9	6	4
查尔斯顿	8	7	9	5
西雅图	4	6	7	8
圣路易斯	12	11	9	7

公司如何决定从油田到炼油厂及炼油厂与集散中心之间的运输量才能使到达集散中心的桶数最大。

(a) 画草图表示各节点的位置,并用箭头的方向表示原油和石油产品的流向和数量(显示容量)。

(b) 重画网络图,使第一列、第二列分别表示油田、炼油厂和集散中心,并用箭线表示可能的流量。

(c) 优化(b)的网络图,使其描述为一个具有单发点(源)、单收点(汇)及弧容量的最大流问题。

(d) 使用 9.5 节介绍的方法给出解。

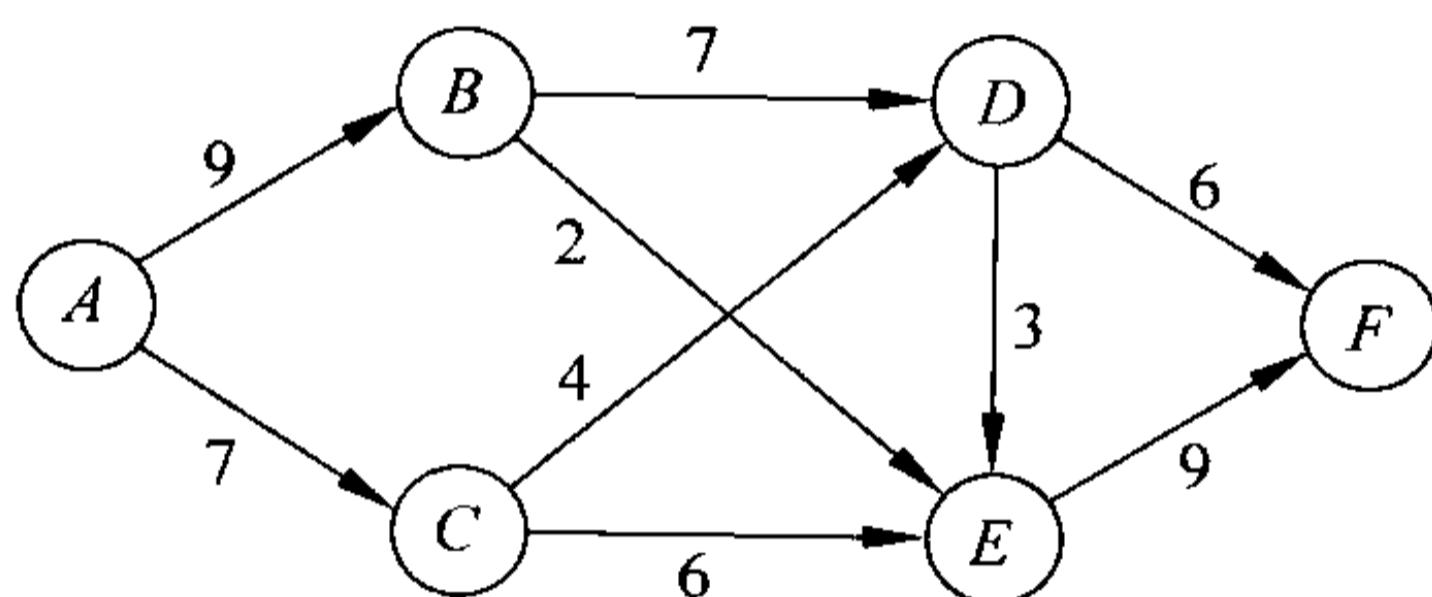
(e) 使用电子表格解此问题。

9.5-5 Eura 铁路系统经营从工业城市 Faireparc 到港口城市 Portstown 之间的铁路。这条铁路线上的特快客运和货运都比较繁忙。客运列车对时间比较关注,比慢速的货运列车具有优先权(欧洲铁路),所以当客运列车按时刻表通过时,货运列车必须在侧

轨上等候让行。现在需要增加货运列车服务,如何规划货运列车的时刻,才能在不改变可运列车时刻的条件下使不中断运行的货运列车数量最多?

连续两趟货运列车之间的间隔至少为 0.1 小时(时刻表上的时间单位为 0.1 小时,所以每天的运行调度只表明每趟货物列车在时刻 0.0,0.1,0.2,……,23.9 时的状况)。两个城市之间有 S 条侧轨,假设每条侧轨 $i(i=1, \dots, S)$ 的长度足以容纳货运列车 $n_i(i=1, \dots, S)$,并且货运列车从侧轨 i 到达侧轨 $i+1$ 需要 t_i 个时间单位(t_0 表示从 Faireparc 市的出发时刻, t_s 表示到达 Portstown 市的时刻)。货运列车只能在 $0.1t$ 倍数的时刻才可以进出侧轨,且要满足在到达下一个侧轨前没有被客运列车超出这一条件(当不被超车时设 $\delta_{ij}=1$,当被超车时设 $\delta_{ij}=0$)。另外,如果后面所有侧轨站点都无法再停留货运列车的话,在被客运列车超过之前需要停留在侧轨上。将此问题归结为最大流问题,并指出网络图中所有节点(包括所有供给节点和需求节点)、弧及其弧容量(提示:对每 240 单位时间使用一组节点)。

9.5-6 考虑如下图所示的最大流问题网络,节点 A 和节点 F 分别代表发点(源)和收点(汇),有向弧上的数字表示弧容量。



(a) 使用 9.5 节介绍的增广链算法给出解;

(b) 使用电子表格解此问题。

9.6-1 阅读在 9.6 节应用案例中简要描述并在其参考文献中详述的文章。简述最小费用流问题是如何在该项研究中得到应用的,然后列出由该项研究结果带来的各类财务与非财务的效益。

9.6-2 将习题 9.5-6 的图看做最小费用流问题,增加弧 $A \rightarrow F$,令 $\bar{F}=20$ 。

9.6-3 一个公司将在两个工厂生产同一种产品,而且需要运送到两个仓库。工厂 1 仅可以不限数量地通过铁路运到仓库 1,工厂 2 仅可以不限数量地通过铁路运到仓库 2。可以通过卡车将产品先运到一个集散中心,集散中心最多只能存储 50 单位产品,超出 50 单位就必须运往两个仓库。下表给出了每单位可替代的运输费用、两个工厂的生产数量及两个仓库的需求量。

从 \ 到	单位运费		输出
	集散中心	仓库	
工厂 1	3	1	80
工厂 2	4	2	70
集散中心		7	
配送量		—	
		9	
		2	
		4	
		60	
		90	

- (a) 使用网络图表示最小费用流问题；
 (b) 用线性规划解出此问题。

9.6-4 重新考虑习题 9.3-3, 将其表示为最小费用流问题, 并说明网络中各元素代表的意义。

9.6-5 Makonsel 公司是一个集团公司, 产品在其零售店中销售。产品完工后先存储在 2 个仓库中直到零售店要求运送。从 2 个车间到仓库, 再从仓库到 3 个零售店都使用公路运输。假设卡车都是满载的, 并将其作为产品的运送单位。下表给出了 2 个车间每月的产量、车间到每个仓库每车的运送成本和每个仓库每月的最大库存能力。

从 \ 到	单位运费		运输能力		输出
	仓库 1/美元	仓库 2/美元	仓库 1	仓库 2	
车间 1	1 175	1 580	375	450	600
车间 2	1 430	1 700	525	600	900

对于每个零售店, 下表给出了其每月的需求量, 从仓库到零售店的每车运输成本及从每个仓库可运输的每月最大数量。

从 \ 到	单位运费/美元			运输能力/单位		
	RO1	RO2	RO3	RO1	RO2	RO3
仓库 1	1 370	1 505	1 490	300	450	300
仓库 2	1 190	1 210	1 240	375	450	225
需求量/单位	450	600	450	450	600	450

管理部门现在需要制订一个配送计划(每月从车间到仓库, 从仓库到零售店的运输数量), 使得总的运输费用最小。

- (a) 画出配送网络图, 指出网络图中的供给节点、中转节点和需求节点。
 (b) 将其归结为一个最小费用流问题, 并在网络图中增加必要的数字。
 (c) 使用电子表格解出此问题。
 (d) 不使用电子表格, 利用计算机解出此问题。

9.6-6 Audiofile 公司生产内置立体声系统。管理层决定将用于内置立体声系统扬声器的生产外包。有三家供应商能够提供这种扬声器。下表给出了三家供应商每 1 000 个扬声器集装箱的价格。

供应商	价格/美元
1	22 500
2	22 700
3	22 300

供应商	每集装箱要价
1	(300 美元 + 40 美分)/英里
2	(200 美元 + 50 美分)/英里
3	(500 美元 + 20 美分)/英里

货物将被运往公司两个仓库中的一个。另外, 每家供应商要求支付运输费用, 运输费用都根据里程数按一个公司计算。下表给出了各供应商里程数和计算公式。

供应商	仓库 1/英里	仓库 2/英里
1	1 600	400
2	500	600
3	2 000	1 000

无论何时,公司的两个工厂都需要一个集装箱的扬声器,并雇用卡车从其中的一个仓库运输。下面给出了每集装箱的运输费用和工厂每月需要的集装箱数。

	单位运费/美元	
	工厂 1	工厂 2
仓库 1	200	700
仓库 2	400	500
月需求量	10	6

每个供应商每月最多能提供 10 集装箱。由于运输限制,每家供应商运到每个仓库的数量每月不超过 6 集装箱,每个仓库运到工厂的运量也不超过每月 6 集装箱。管理者现在打算确定一种方案;每月从每家供应商处订购多少扬声器,应该运送各仓库多少,各仓库又应该运输到各工厂多少,才能使总的购买费用(包括买价和运费)和仓库到工厂的运输费用最小。

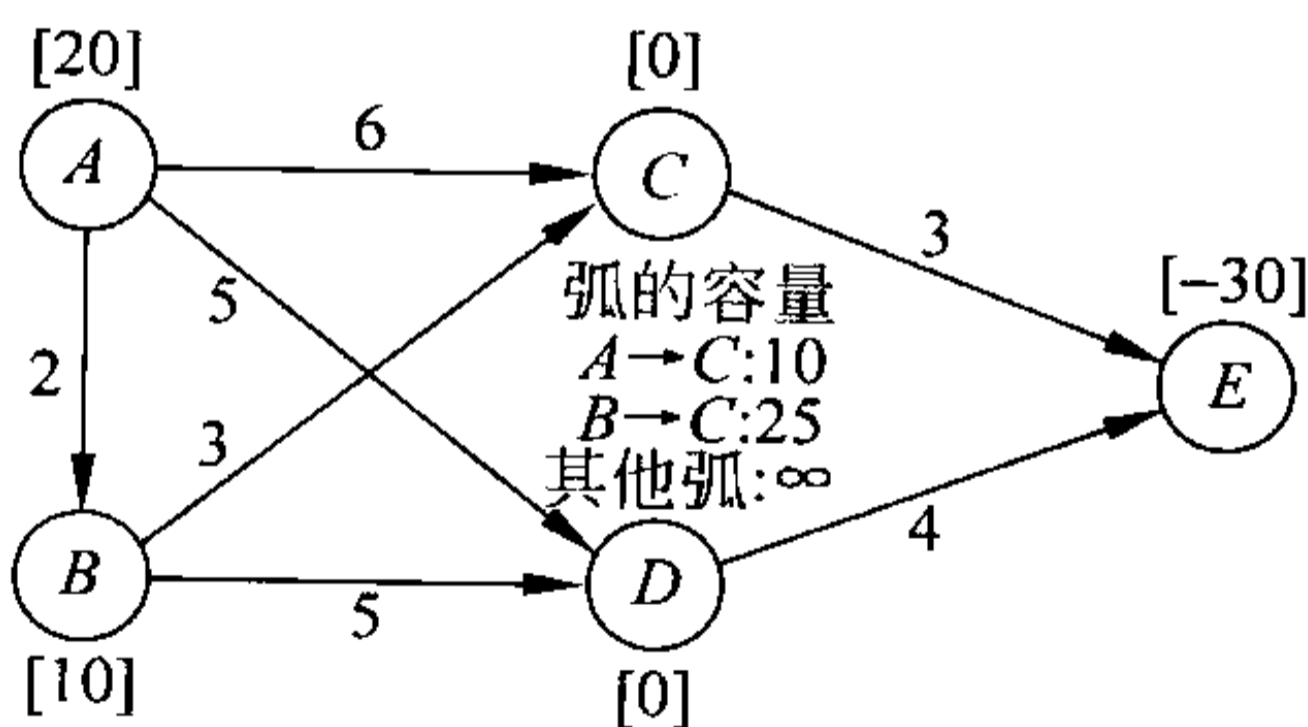
(a) 画出配送网络图,指出网络图中的供给节点、中转节点和需求节点。

(b) 将其归结为一个最小费用流问题,在网络图中增加必要的数字,也包括接收不使用供应量的虚拟需求节点(0 费用)。

C(c) 使用电子表格解出此问题。

C(d) 不使用电子表格,利用计算机解出此问题。

D9.7-1 观察下面给出的最小费用流。由节点附近的数字给出 b_j (网络流量) 的值, c_{ij} (单位费用) 由弧上的数字表示, u_{ij} (弧容量) 的值由节点 C 和节点 D 之间的文字给出。



(a) 通过求解基本弧 $A \rightarrow B$ 、 $C \rightarrow E$ 、 $D \rightarrow E$ 和 $C \rightarrow A$ (反向弧) 的可行生成树获取一个初始 BF 解,另外, $C \rightarrow B$ 为一个非基本弧,并以同样的表示方式画出结果图。

(b) 使用最优测试方法验证初始 BF 解最优,并存在多个最优解。应用网络单纯形法的迭代寻找另一个最优 BF 解。利用结果证明其他最优解不是 BF 解。

(c) 现在再考虑下面的 BF 解。

基本弧	流 量	非基本弧
$A \rightarrow D$	20	$A \rightarrow B$
$B \rightarrow C$	10	$A \rightarrow C$
$C \rightarrow E$	10	$B \rightarrow D$
$D \rightarrow E$	20	

从这个 BF 解开始,应用网络单纯形法进行一次迭代,指出入基变量、出基变量和下一个 BF 解,但不用再继续进行迭代。

9.7-2 重新考虑习题 9.6-2 中的最小费用流问题。

(a) 通过求解基本弧 $A \rightarrow B$ 、 $A \rightarrow C$ 、 $A \rightarrow F$ 、 $B \rightarrow D$ 和 $E \rightarrow F$ 与非基本弧 $E \rightarrow C$ 、 $F \rightarrow D$ (反向弧)的可行生成树获取一个初始 BF 解。

D, I (b) 用网络单纯形法求出解。

9.7-3 重新考虑在习题 9.6-3 中构建的最小费用流问题。

(a) 求解对应于利用两条铁路线加上从工厂 1 经分配中心运送到仓库 2 的可行支撑树,得到一个初始的 BF 解。

D, I (b) 用网络单纯形法求解这个问题。

D, I 9.7-4 重新考虑习题 9.6-4 中构建的最小费用流问题。用这个 BF 解作为初始解,使用网络单纯形法求出解。

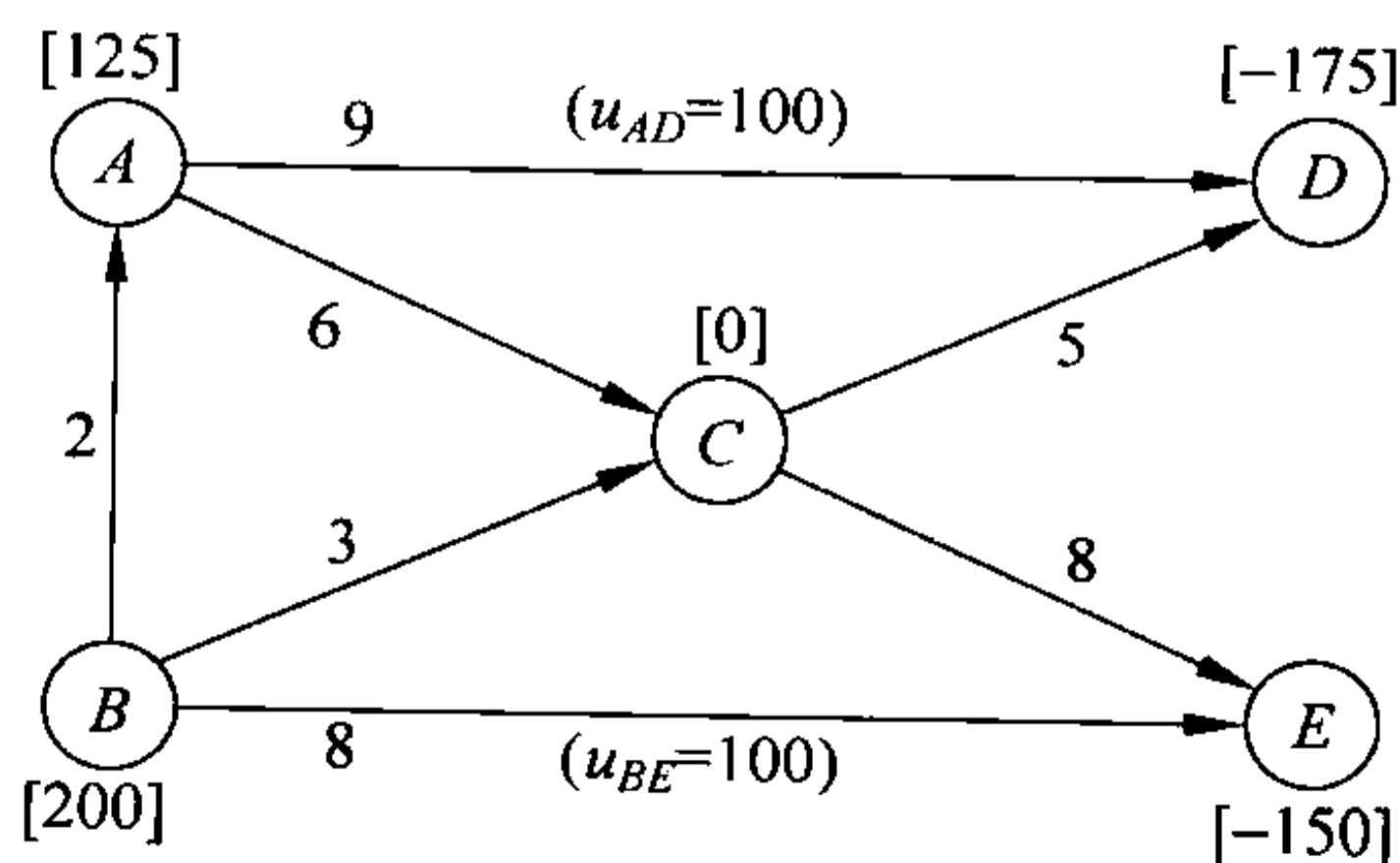
D, I 9.7-5 参考表 8.2 给出的 P&T 公司的运输问题,将图 8.2 的网络图看做最小费用流问题。使用西北角规则从表 8.2 中获得初始 BF 解,然后使用网络单纯形法求出解。你可以应用 IOR Tutorial 中的交互程序求解(并证明 8.1 节中给出的最优解)。

9.7-6 思考表 8.12 给出的 Metro Water 区运输问题。

(a) 将此问题转化为最小费用流问题。(提示:删除禁止流通的弧)

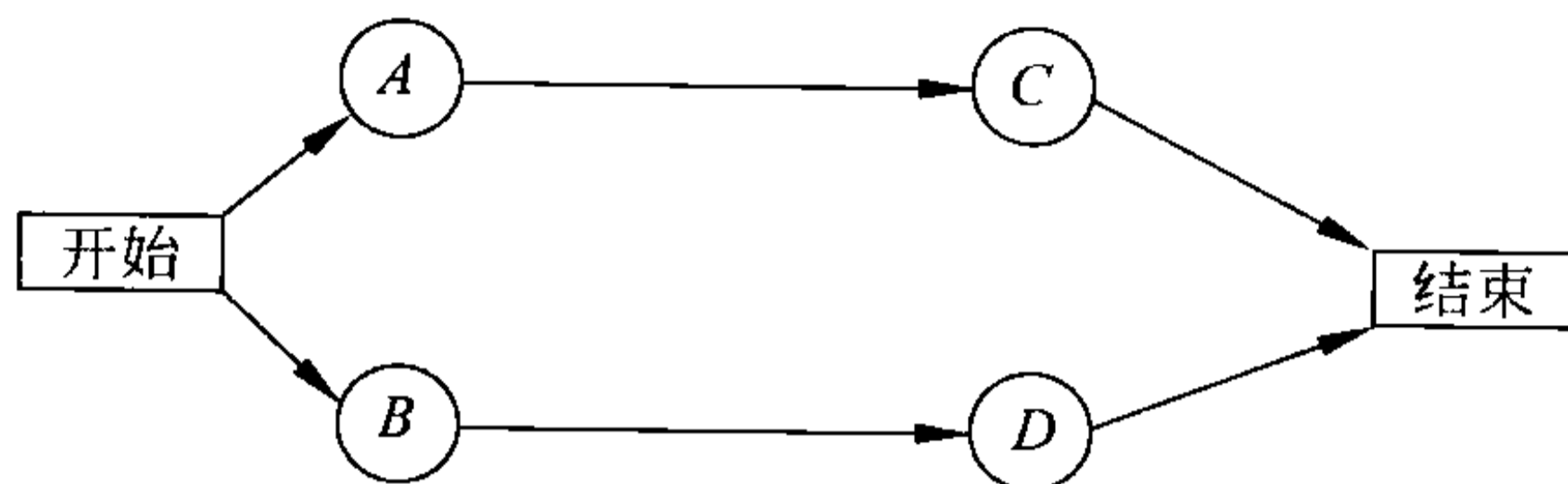
D, I (b) 以表 8.19 给出的数据作为初始 BF 解,使用网络单纯形法求出解(你可以使用 IOR Tutorial 中的交互程序)。与表 8.23 中用运输单纯形法求出的 BF 解的顺序进行比较。

D, I 9.7-7 思考下面的最小费用流问题,节点附近的数字表示 b_j (网络流量)的值, c_{ij} (单位费用)由弧上的数字表示,有限制的 u_{ij} (弧容量)的值由弧上括弧内的数字给出。通过求解基本弧 $A \rightarrow C$ 、 $B \rightarrow A$ 、 $C \rightarrow D$ 和 $C \rightarrow E$ 与非基本弧 $D \rightarrow A$ 的可行生成树获取一个初始 BF 解,然后使用网络单纯形法求解。



9.8-1 Tinker 建筑公司准备开始一个新项目,要求在 12 个月内完工。项目包括 4 项作

业(A、B、C、D),项目网络图如下图所示。该项目的经理 Sean Murphy 认为以常规作业方式不可能按期完成。因此 Sean 决定使用 CPM 的时间—费用平衡方法决定最经济的赶工作业方式。下表是他搜集的 4 项作业的资料。使用边际费用分析求解问题。



作 业	常规时间/月	赶工时间/月	常规费用/美元	赶工费用/美元
A	8	5	25 000	40 000
B	9	7	20 000	30 000
C	6	4	16 000	24 000
D	7	4	27 000	45 000

9.8-2 重新思考习题 9.8-1 的问题。Sean 记得在大学期间的运筹学课程上他曾用一个月的时间学习过线性规划,所以 Sean 决定使用线性规划来解决问题。

(a) 思考网络图中靠上的那条路线,用两个变量的线性规划模型描述怎样施工才能在工期内使费用最小。使用图解法给出答案。

(b) 对网络图中靠下的那条路线重复(a)的做法。

(c) 将(a)和(b)合并为一个线性规划模型,最优解是什么?

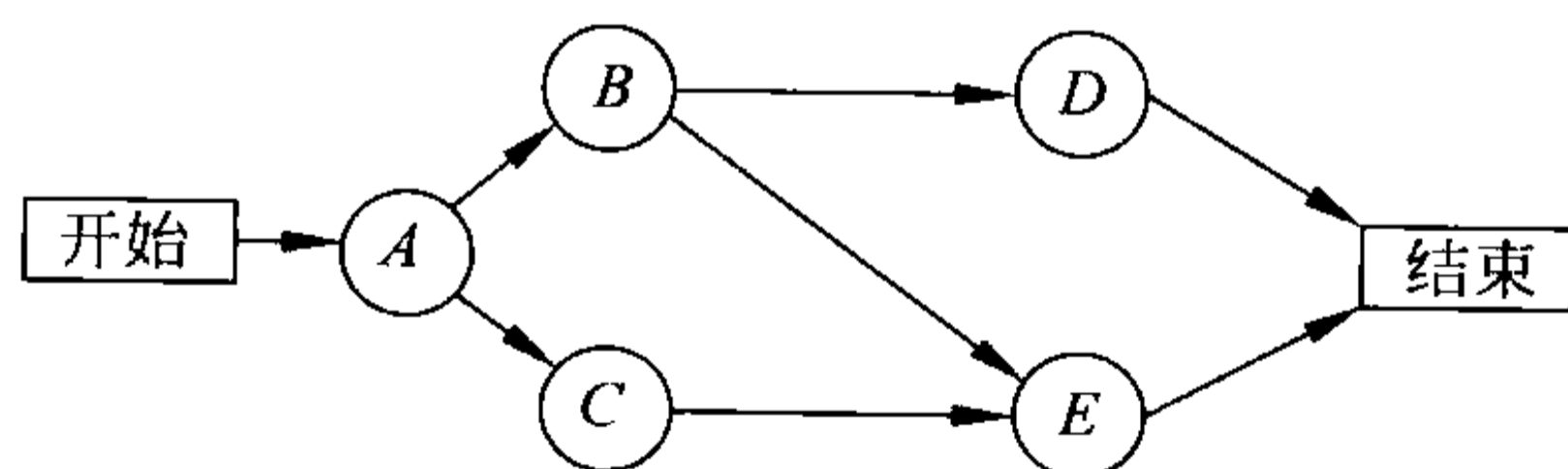
(d) 使用 9.8 节描述的 CPM 线性规划方法建立完整的线性规划模型(这个模型比(c)中的规模稍大,也更适用于较复杂的项目网络)。

C(e) 使用 Excel 求解。

C(f) 使用其他软件求解。

C(g) 将工期限制分别改为 11 个月、13 个月,重复以上(e)和(f)。

9.8-3* Good Homes 建筑公司准备开建一个大型的住宅项目。公司总裁 Michael Dean 正在为该项目进行项目时间规划。Michael 已经区别出了 5 个大的作业(分别用 A、B、C、D、E 代表),下图是项目网络图,并且搜集了 5 个项目常规和赶工作业下的一些数据(见下表)。



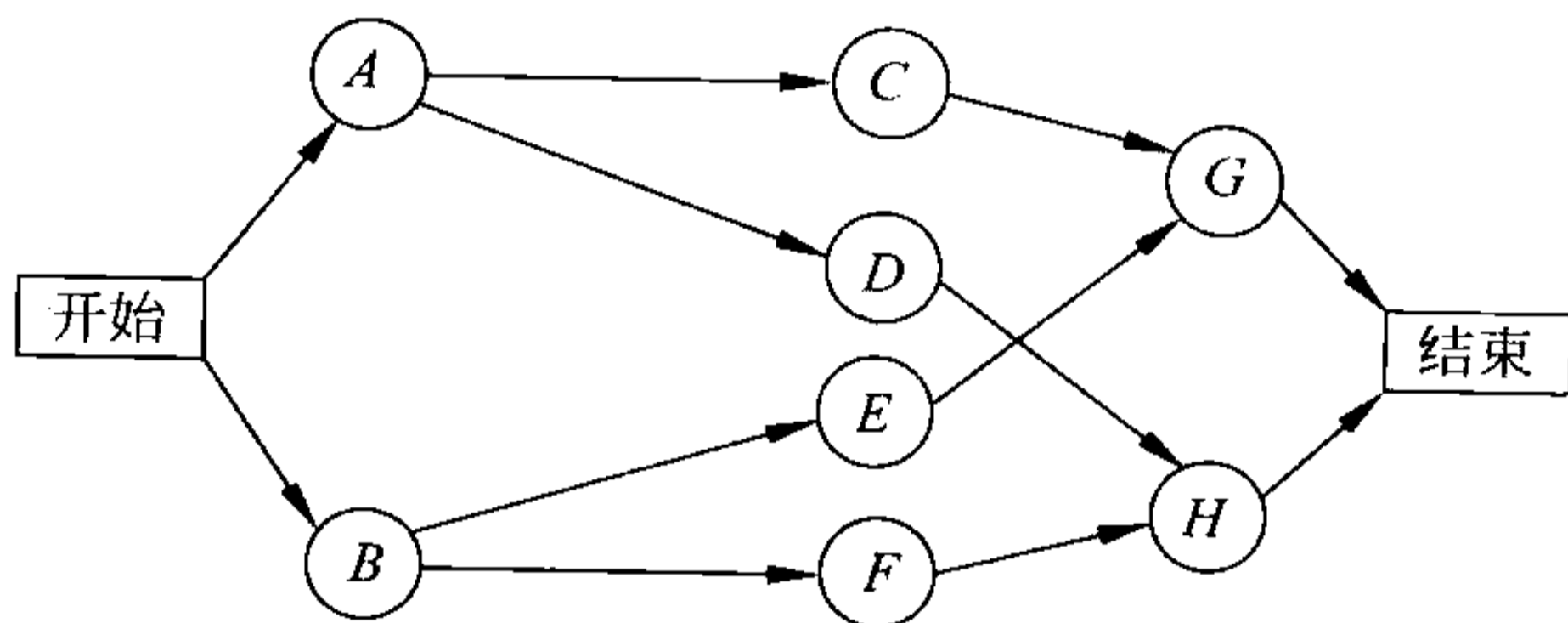
作 业	常规时间/周	赶工时间/周	常规费用/美元	赶工费用/美元
A	3	2	54 000	60 000
B	4	3	62 000	65 000
C	5	2	66 000	70 000
D	3	1	40 000	43 000
E	4	2	75 000	80 000

表中的费用反映了公司作业的材料、设备的直接费用和直接人工费用。另外公司还要支付监理、正常的管理费用及资金占用的利息费用等间接费用。Michael 估计这些间接费用每周平均为 5 000 美元。他想使项目总的费用最小,因此需要节约这些间接费用。Michael 认为只要赶工一周的费用小于 5 000 美元,就应该通过赶工缩短工期。

(a) 使用边际费用分析方法,说明应该对哪些作业进行赶工,赶工后的总费用最少是多少。在这个计划下每项作业的工期和费用各是多少? 赶工节省了多少费用?

C(b) 假设一次缩短一周,利用线性规划方法重解(a)。

9.8-4 21 世纪音像公司打算拍摄一部本年度最重要的影片(也是耗资最大的)。该影片的制片人 Dusty Hoffmer 决定应用 PERT/CPM 方法帮助和控制这部关键影片。他将拍摄过程分为 8 项主要作业(分别标为 A, B, ..., H)。各作业的关系见下面的项目网络图。



Dusty 获知另一家音像公司将在即将到来的夏季的中期推出一部具有轰动效应的影片。很不幸,他的影片预计也将在那时上映。因此他和 21 世纪音像公司的高层管理人员一致决定应该加速制作过程,使其能够在夏季初(从现在起 15 个周)完成本年的这部影片。虽然这需要增加一大笔预算,但管理层认为国内外票房的收入将会有更多增长,足以弥补预算的增加。

Dusty 现在想确定在新的 15 周的工期内费用最小的制作方式。为使用 CPM 的时间—费用平衡方法,他搜集了下表所列的数据。

作 业	常规时间/周	赶工时间/周	常规费用/百万美元	赶工费用/百万美元
A	5	3	24	36
B	3	2	13	25
C	4	2	21	29
D	6	3	30	50
E	5	4	26	36
F	7	4	35	57
G	9	5	30	53
H	8	6	35	51

(a) 用线性规划模型描述该问题。

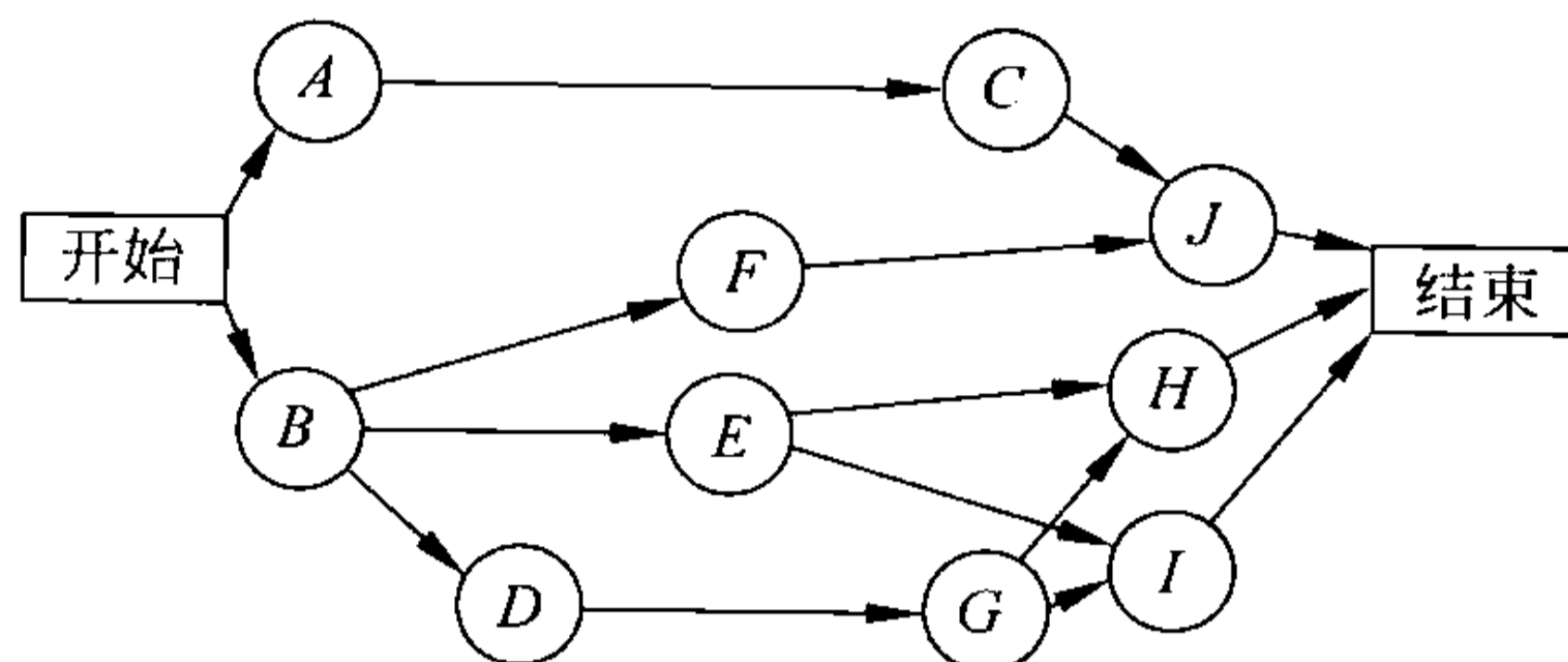
C(b) 用 Excel 求解。

C(c) 使用其他软件求解。

9.8-5 Lockheed 飞行器公司准备开始一个新项目,为美国空军开发一种新型运输机。

公司与国防部的合同规定项目在 92 周内完成,延期将支付罚金。

项目设计 10 项作业(分别标为 A, B, ..., J), 下面的项目网络图给出了各作业之间的次序。



管理层打算避免超期完工的重罚,因此决定进行赶工,使用 CPM 的时间—费用平衡方法来决定最经济的方案。下表给出了所需的数据。

作 业	常规时间/周	赶工时间/周	常规费用/百万美元	赶工费用/百万美元
A	32	28	160	180
B	28	25	125	146
C	36	31	170	210
D	16	13	60	72
E	32	27	135	160
F	54	47	215	257
G	17	15	90	96
H	20	17	120	132
I	34	30	190	226
J	18	16	80	84

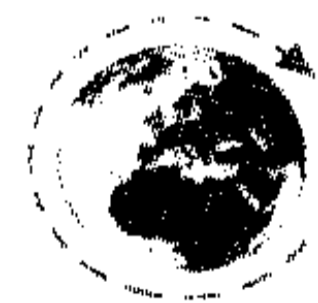
(a) 用线性规划模型描述该问题。

(b) 用 Excel 求解。

(c) 使用其他软件求解。

9.9-1 从本章末给出的参考文献的下端部分,选择网络优化模型的得奖应用之一。先阅读这篇文章,然后用两页纸写出应用的概要和所带来的财务与非财务效益。

9.9-2 从本章末给出的参考文献的下端部分,选择网络优化模型得奖应用中的三篇,先阅读这些文章,然后分别对每一篇写出一页纸的概要和其所带来的财务和非财务的效益。



案例 资金流动

Jake Nguyen 将紧张的手插入精心梳理的头发里,松开原本扎得很好的真丝领带,又将满是汗的手在熨烫得整齐的裤子上摩擦着。

今天 Jake 的心情肯定不好。

几个月之前, Jake 已经听到了在华尔街上盛传的谣言。谣言来自投资银行家和证券

经纪人,他们的坦率是出了名的。谣言是说未来日本经济将会产生危机,而且他们认为公开表达他们的恐惧将会加快崩溃的速度。

今天,他们的恐惧成为现实。Jake和他的同事们聚集在一台小电视机前,专注收看Bloomberg频道。当他听到发生在日本市场上的恐怖事件时,便产生了怀疑。日本正陷入和别的东亚国家一样的金融危机。他有点神情麻木,作为一个专门经营货币交易的西海岸投资公司——Grant Hill Associates公司亚洲海外投资部门的经理,Jake感到对危机的任何负面影响都负有责任。

Grant Hill Associates公司将遭受这次负面的冲击。Jake先前未曾理会日本经济危机的谣言,相反,他还大大增加了Grant Hill Associates公司的日元持有量。因为日元市场与去年相比表现良好。仅仅在一个月前,Jake才将投资于日元的250万美元增加到1500万美元,而那时1美元兑换80日元。

不久,Jake看到日元贬值到1美元兑换125日元。如果他用日元清算,不会有损失。但是如果转换为美元损失将是巨大的。他深吸一口气,然后闭上了双眼,为应对更严重的损失思考着。

来自办公室一角的喊声打断了他的沉思。Grant Hill Associates公司的总裁Grant Hill冲他喊道:“去死吧,Nguyen。”

Jake跳起来,勉强朝愤怒的Grant Hill所在的办公室方向瞧了瞧。他抹了一下头发,紧了紧领带,悄悄地走进那间办公室。

Grant Hill盯住Jake的双眼继续吼道:“我不想听你的任何解释!没有任何理由!赶快从日本撤出我们所有的资金,阻止进一步的下跌。我的直觉告诉我这只是开始!将钱兑换成安全的美元,现在!不要忘记立即将印度尼西亚和马来西亚的资金也一并撤出!”

Jake也不想说什么,他点点头,转身出了办公室。

返回他的办公桌,Jake开始制订从日本、印度尼西亚和马来西亚撤出投资的计划。投资外币市场的经验告诉他当操作上百万美元时,撤出外币市场与进入同样重要。Grant Hill Associates公司的银行合作伙伴会为不同币种的转换使用不同的交易佣金。

现在,为了阻止市场进一步恶化,东亚已经对个人或公司兑换本国货币从而撤资的行为施加了非常严格的货币数量的限制。其目的是减少外资的流出,从而避免经济的完全崩溃。由于Grant Hill Associates公司除日元外,同时持有105亿印度尼西亚盾、280万马来西亚林吉特。目前并不清楚如何将这些资金兑换为美元。

Jake想找到一种最省钱的方法将这些资金兑换为美元。在本公司的网站上,他可以找到全球大多币种每分钟的汇率(见表1)。

例如,该表显示1日元兑换0.008美元。通过打几个电话,他可以收集到他的公司在这一关键时刻兑换大量货币所需要支付的交易费用(见表2)。

Jake注意到两种货币兑换与其逆向兑换的交易费用是相等的。最终,Jake找到了他们公司在日本、印度尼西亚和马来西亚的本币兑换成其他货币的最大限额(见表3)。

表1 汇率

到 \ 从	日元	印尼盾	马来西亚林吉特	美元	加拿大元	欧元	英镑	墨西哥比索
日元	1	50	0.04	0.008	0.01	0.0064	0.0048	0.0768
印尼盾		1	0.0008	0.00016	0.0002	0.000128	0.000096	0.001536
马来西亚林吉特			1	0.2	0.25	0.16	0.12	1.92
美元				1	1.25	0.8	0.6	9.6
加拿大元					1	0.64	0.48	7.68
欧元						1	0.75	12
英镑							1	16
墨西哥比索								1

表2 交易费用/%

到 \ 从	日元	印尼盾	马来西亚林吉特	美元	加拿大元	欧元	英镑	墨西哥比索
日元	—	0.5	0.5	0.4	0.4	0.4	0.25	0.5
印尼盾		—	0.7	0.5	0.3	0.3	0.75	0.75
马来西亚林吉特			—	0.7	0.7	0.4	0.45	0.5
美元				—	0.05	0.1	0.1	0.1
加拿大元					—	0.2	0.1	0.1
欧元						—	0.05	0.5
英镑							—	0.5
墨西哥比索								—

表3 交易限额/1000美元(等价)

到 \ 从	日元	印尼盾	马来西亚林吉特	美元	加拿大元	欧元	英镑	墨西哥比索
日元	—	5 000	5 000	2 000	2 000	2 000	2 000	4 000
印尼盾	5 000	—	2 000	200	200	1 000	500	200
马来西亚林吉特	3 000	4 500	—	1 500	1 500	2 500	1 000	1 000

(a) 将 Jake 的问题归结为最小费用流问题,画出该问题的网络图,并指明供给点和需求点。

(b) 为确保公司从日元、印度尼西亚盾和马来西亚林吉特兑换回最多的美元,哪些货币交易必须进行? Jake 必须在美国债券上投资多少?

(c) 世贸组织禁止交易限制,因为这种做法会刺激保护主义。如果交易限制不存在, Jake 将使用什么方法来将所持有的亚洲货币转换成美元呢?

(d) 作为对世贸组织禁止货币兑换限制的应对,印度尼西亚政府增收了一种新的税,将货币交易费用增加到 500%,以保护本国货币。假设新的政策没有交易限制, Jake 应该进行什么样的货币交易才能将所持有的亚洲货币兑换为美元?

(e) Jake 认为他的分析存在不足,因为他也许没有包括所有可能影响货币兑换的因素。描述在 Jake 做出最终决定前应该考虑的其他因素。

动态规划

动态规划是制订一系列相关决策时的一项有用的数学技术,它提供系统化的方法来寻求最优决策组合。

与线性规划相比,动态规划问题没有一个标准的数学模型。然而,动态规划是一类通用的问题解决方法,需要建立特定的方程以适应各种情况。因而,对动态规划问题总体结构要求一定程度上的独创性和洞察力,以识别何时以及如何通过动态规划的方法解决问题。这些能力可以通过大范围的动态规划应用以及对其普遍特性的研究而形成。基于这一目的,本章将给出大量实例。



10.1 动态规划的范例

例 1 驿站马车问题

驿站马车问题是一个由阐述动态规划特征^①和介绍动态规划术语构建的特殊问题。19世纪中叶,密苏里州的一位淘金者决定去加州西部淘金。旅程需要乘坐驿站马车,途经那些有遭遇强盗袭击危险的无人乡村。虽然他的出发点和目的地已定,但是他有相当多的选择来决定从哪个州(或后来成为州的地区)中穿过。图 10.1 显示的是可能路线,每个州都用画圈的字母表示,并且旅行方向在图中总是从左向右。因而,他从位于 A 州(密苏里州)的始点出发,最终到达目的地 J 州(加利福尼亚州)需要经过 4 个中间阶段(驿站马车行驶)。

淘金者是个很谨慎的人,他相当担心自己

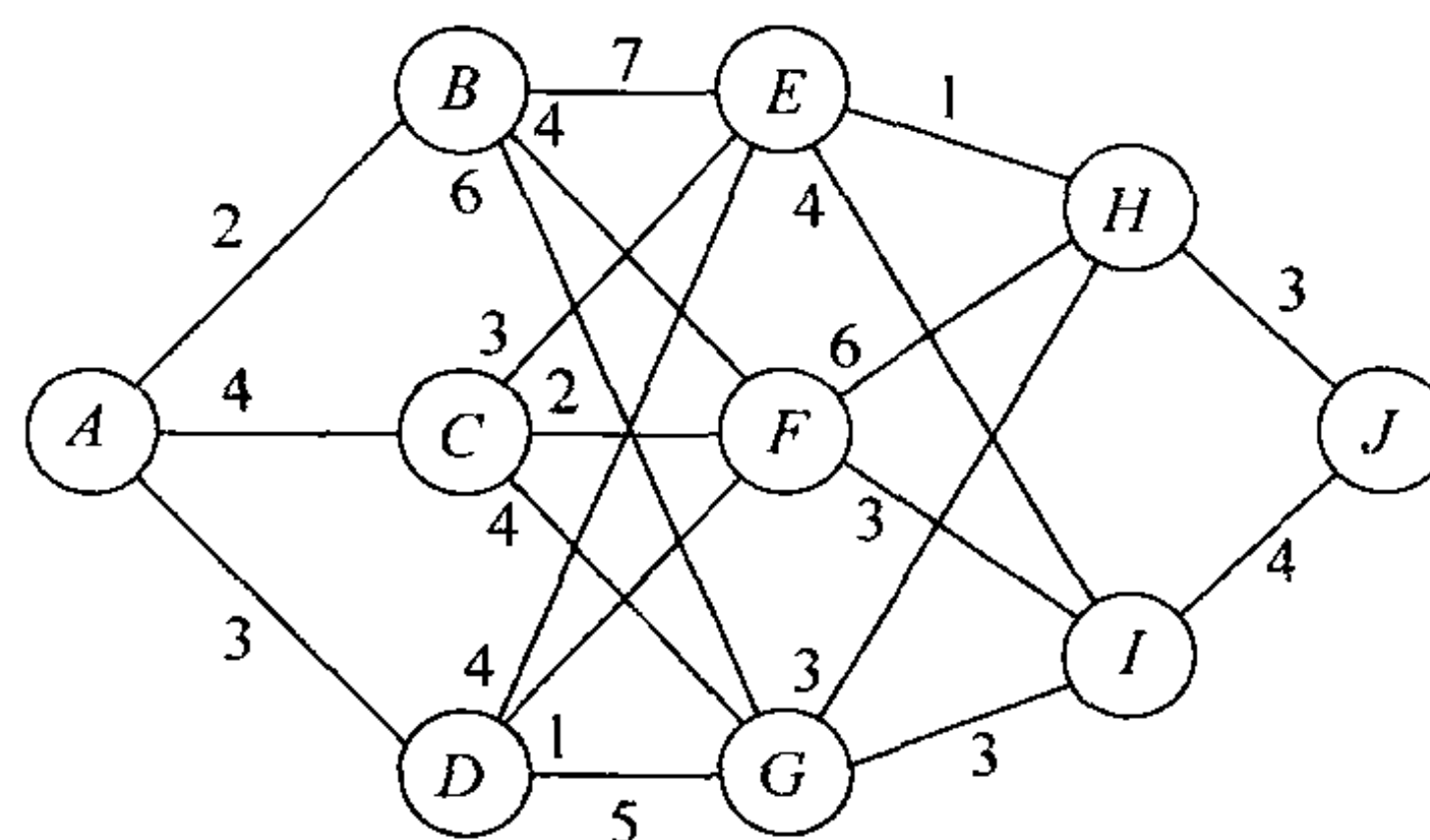


图 10.1 驿站马车问题的道路系统和成本

^① 这个问题是由当时在斯坦福大学任教的 Harvey M. Wagner 教授提出来的。

的安全。经过一番思索,他想出了一个巧妙的方法来确定最安全的路线。每位驿站马车的乘客都被提供人寿保险。由于对乘坐任何驿站马车保单的成本是基于对该线路安全性的仔细评估,因而最安全的路线应该是全部人寿保单中最便宜的。

从 I 州到 J 州驿站马车行驶的标准保单的成本,这里用 c_{ij} 表示,为

	B	C	D
A	2	4	3

	E	F	G
B	7	4	6
C	3	2	4
D	4	1	5

	H	I
E	1	4
F	6	3
G	3	3

	J
H	3
I	4

这些成本在图 10.1 中已有显示。

我们现在把问题集中在哪一条路线可以使全部保单的成本最小上。

问题的求解

首先要注意,为每个连续阶段提供最省钱的路线是一种目光短浅的选择方法,并不会得到一个整体最优的决策。按照这个策略会得出路线 $A \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow I \rightarrow J$,全部成本为 13。然而,牺牲某一阶段的一点利益可能会在以后得到更多。例如, $A \rightarrow D \rightarrow F$ 总体上要比 $A \rightarrow B \rightarrow F$ 省钱。

解决这个问题的可能方法之一就是利用试差法。^① 然而,可能路线的数量很多(18),而且计算每条路线的全部成本并不是很容易。

幸运的是,动态规划提供了一个比枚举法工作量少得多的解决方案(对于更大规模的问题,计算上的节省是大量的)。动态规划从原始问题的很小一部分开始,给这个较小问题找到最优解。然后逐渐扩大问题,从前面的问题中找出目前的最优解,直到求得全部原始问题的解。

为求解驿站马车问题,我们从小的问题开始,就是淘金者几乎完成了他的旅行,就剩下最后一个阶段(驿站马车行驶)要走了。这个小问题的最优解明显是从目前的州走出去(无论在哪)到达他的最终目的地(J 州)。之后依次重复,通过每次增加 1 个阶段不断扩大问题。为了这个扩大的问题,从每个可能的州到下一个州的最优解,可以很容易地从前面重复的结果中不断找到。运用这个方法的细节如下。

建模 令决策变量 $x_n (n=1,2,3,4)$ 为阶段 n (要进行的 n 段驿站马车运行)的直接目的地。这样,选择的路线就是 $A \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4$,其中 $x_4 = J$ 。

设 $f_n(s, x_n)$ 为剩余阶段整体最优策略的全部成本,已知淘金者在 s 州,准备开始第 n 阶段并选择 x_n 作为直接目的地。已知 s 和 n ,设 x_n^* 是 x_n 的任意值(不一定是唯一值),最小化 $f_n(s, x_n)$,并且设 $f_n^*(s)$ 为相应的 $f_n(s, x_n)$ 的最小值。这样

$$f_n^*(s) = \min_{x_n} f_n(s, x_n) = f_n(s, x_n^*)$$

其中, $f_n(s, x_n) =$ 中间成本(阶段 n) + 最小未来成本(阶段 $n+1$ 至终点) $= c_{sx_n} + f_{n+1}^*(x_n)$ 。

^① 本问题也可构建为最短路径问题(见 9.3 节),这里的成本相当于最短路径中的距离。9.3 节的算法实际上运用了动态规划求解的思路。因为这个问题中阶段数是固定的,故应用动态规划方法更好。

c_{s_n} 的值通过前面表格设定 $i=s$ (当前州) 和 $j=x_n$ (直接目的地) 中的 c_{ij} 已给出。因为在第 4 阶段末尾将到达最终目的地 (J 州), 所以 $f_5^*(J)=0$ 。

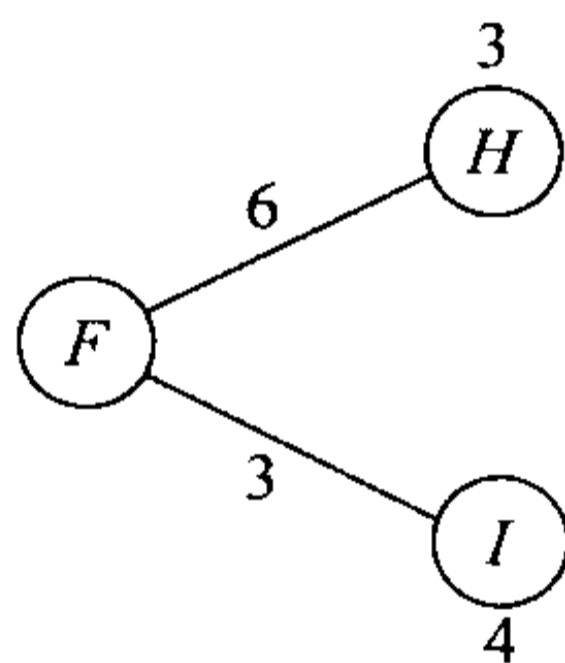
我们的目标是找到 $f_1^*(A)$ 和相应的路线。动态规划通过连续地找到 $f_4^*(s)$ 、 $f_3^*(s)$ 、 $f_2^*(s)$ 而找到它。对于每个可能的州 s , 用 $f_2^*(s)$ 求解 $f_1^*(A)$ 。^①

求解过程

当淘金者只剩一步要走的时候 ($n=4$), 他后来的路线就完全由他目前的州 S (要么 H , 要么 I) 和最终目的地 $x_4=J$ 决定, 因此这个最终驿站马车行驶的路线是 $S_4 \rightarrow J$ 。因而, 由于 $f_4^*(s) = f_4(s, j) = c_{s,j}$, $n=4$ 问题的直接求解方法是:

$n=4:$	s	$f_4^*(s)$	x_4^*
	H	3	J
	I	4	J

当淘金者还有两步要走 ($n=3$) 时, 求解过程需要一些计算。例如, 假设淘金者在 F 州。然后, 根据下面描述的, 它必须接着往下走到 H 州或 I 州, 直接成本分别为 $c_{F,H}=6$ 或 $c_{F,I}=3$ 。如果他选择了 H 州, 那么在他到达之后, 最小额外成本, 就是前面表格中所给出的 $f_4^*(H)=3$, 即前面图中的 H 点。因而, 对于这个决策的全部成本是 $6+3=9$ 。如果他选择 I 州, 全部成本就是 $3+4=7$, 比前面的小。所以, 最优选择是后者, $x_3^*=I$, 因为它给出了最小成本 $f_3^*(F)=7$ 。



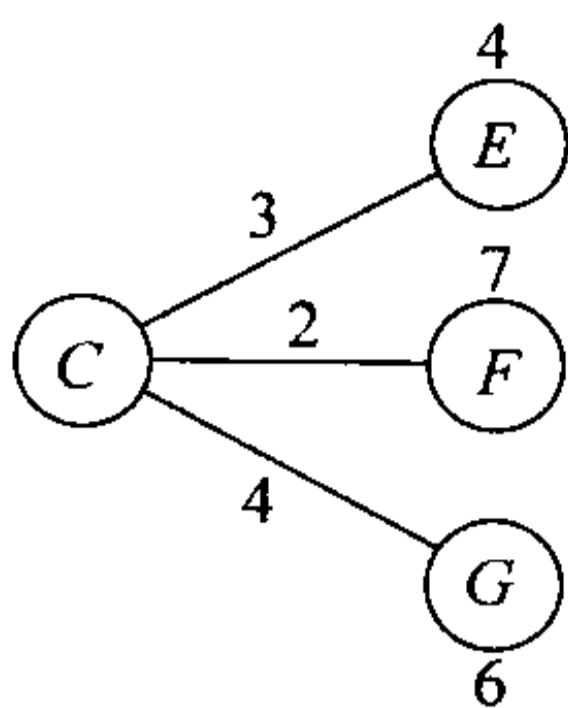
当你从其他两个可能有两步要走的州 $s=E$ 和 $s=G$ 开始的时候, 也需要类似的计算。运用图解法 (图 10.1) 和代数 (结合 c_{ij} 和 $f_4^*(s)$ 值), 尝试检验 $n=3$ 时下面的完整结果。

$n=3:$	s	$f_3(s, x_3) = c_{s,x_3} + f_4^*(x_3)$		$f_3^*(s)$	x_3^*
		H	I		
	E	4	8	4	H
	F	9	7	7	I
	G	6	7	6	H

对第二步问题 ($n=2$) 的求解办法, 有三步要走, 可从类似的方法中获得。在这里, $f_2(s, x_2) = c_{s,x_2} + f_3^*(x_2)$ 。例如, 假设淘金者在 C 州, 如下页图所示。

他接着必须走到 E 州、 F 州或 G 州, 直接成本分别为 $c_{C,E}=3$ 、 $c_{C,F}=2$ 或 $c_{C,G}=4$ 。到达之后, 第 3 阶段的最小额外成本见 $n=3$ 的表, 分别为 $f_3^*(E)=4$ 、 $f_3^*(F)=7$ 或 $f_3^*(G)=6$,

^① 因为这个过程为一步一步逆向移动, 有些作者将 n 步逆推标记为到目的地的剩余阶段数。为了更加简化, 我们采用更为自然的前向段数计算。



表现为上图中的 E 州和 F 州以及下面的 G 州。三种选择产生的计算结果如下。

$$x_2 = E: f_2(C, E) = c_{C,E} + f_3^*(E) = 3 + 4 = 7$$

$$x_2 = F: f_2(C, F) = c_{C,F} + f_3^*(F) = 2 + 7 = 9$$

$$x_2 = G: f_2(C, G) = c_{C,G} + f_3^*(G) = 4 + 6 = 10$$

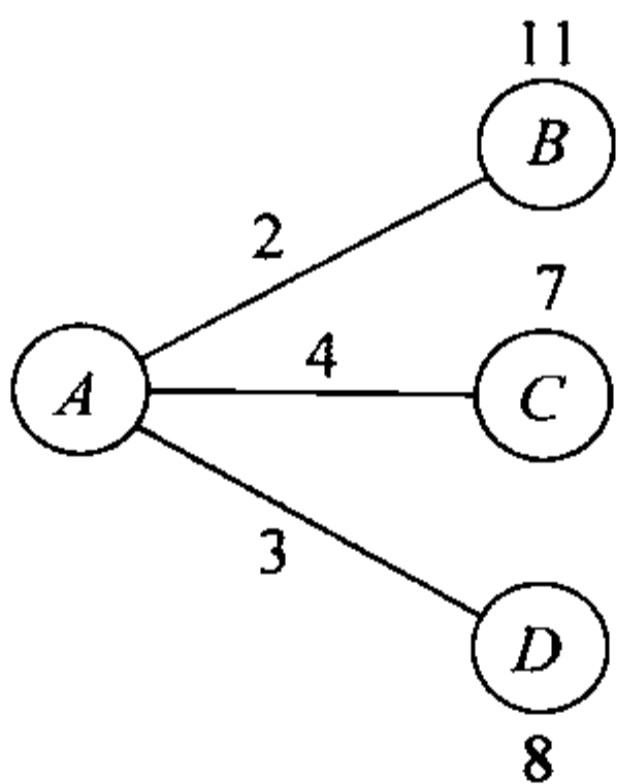
这三个数字的最小值是 7, 这样从 C 州到终点的最小全部成本是 $f_2^*(C) = 7$, 直接目的地应为 $x_2^* = E$ 。

当你从 B 州或 D 州(尝试)开始时, 对 $n=2$ 问题进行类似计算得出如下结果:

$n=2:$		x_2	$f_2(s, x_2) = c_{sx_2} + f_3^*(x_2)$			$f_2^*(s)$	x_2^*
			E	F	G		
	s						
	B		11	11	12	11	E 或 F
	C		7	9	10	7	E
	D		8	8	11	8	E 或 F

注意在表格第一行和第三行, E 和 F 的最小值为 x_2 , 这样, 从 B 州或 D 州的直接目的地应该是 $x_2^* = E$ 或 F。

对于第一步问题($n=1$), 即包含全部要走的 4 个阶段, 我们看到这步计算与第二阶段问题($n=2$)显示的计算是相似的。现在只有一个可能开始的州 $s=A$, 如下图所示。



这些计算概括了接下来直接目的地的三个选择。

$$x_1 = B: f_1(A, B) = c_{A,B} + f_2^*(B) = 2 + 11 = 13$$

$$x_1 = C: f_1(A, C) = c_{A,C} + f_2^*(C) = 4 + 7 = 11$$

$$x_1 = D: f_1(A, D) = c_{A,D} + f_2^*(D) = 3 + 8 = 11$$

由于 11 是最小值, 所以 $f_1^*(A) = 11$ 和 $x_1^* = C$ 或 D , 见下表。

$n=1:$		x_1	$f_1(s, x_1) = c_{sx_1} + f_2^*(x_1)$			$f_1^*(s)$	x_1^*
			B	C	D		
	s						
	A		13	11	11	11	C 或 D

整个问题的最优求解可以从四个表格中得到。 $n=1$ 问题的结果表明淘金者一开始就应该到 C 州或 D 州。假设他选择 $x_1^* = C$, 因为 $n=2, s=C$ 的结果为 $x_2^* = E$ 。这个结果导致了 $n=3$ 问题, $s=E, x_3^* = H$ 。然后 $n=4$ 问题得出 $s=H, x_4^* = J$ 。因此, 最优路线之一为 $A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow J$ 。选择 $x_1^* = D$ 导致其他两条最优路线 $A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow J$ 和 $A \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow I \rightarrow J$ 。它们都得出了全部成本是 $f_1^*(A) = 11$ 。

动态规划分析的结果概括见图 10.2。注意阶段 1 的两个箭头来自 $n=1$ 表格的第一列和最后一列, 以及所产生的成本来自倒数第二列。其他各箭头(和产生的成本)用同样的方式, 均来自其他某个表格的一行中。

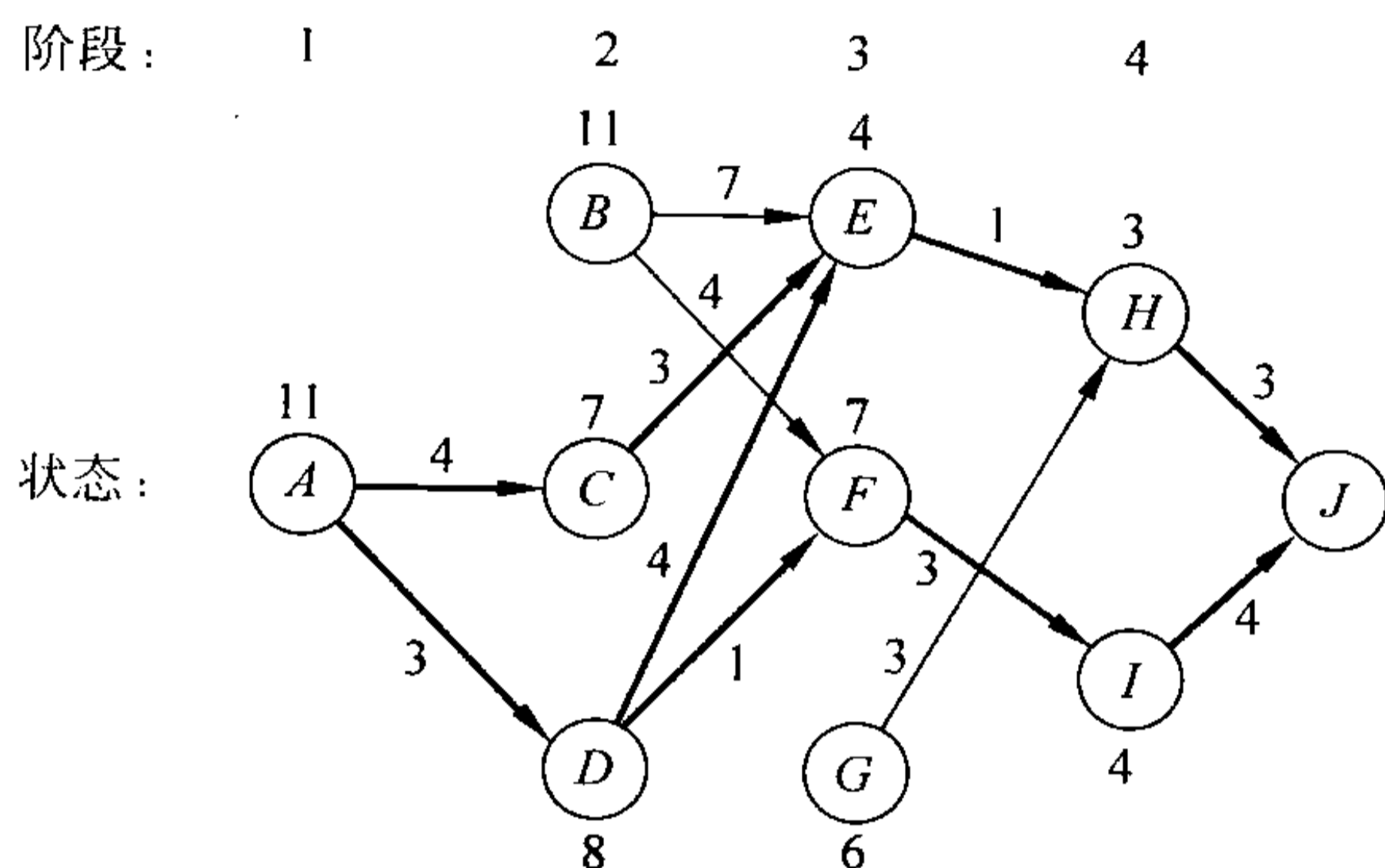


图 10.2 驿站马车问题用动态规划求解方法的图示

图中每个箭头表明该状态处的最优决策(最优直接目的地)。状态旁边的数字是从该状态到终点所产生的成本。按照从 A 到 J 的粗箭头给出了三个最优解, 三条路线均给出了 11 的最小总成本。

你将在下面看到描述这个问题的特殊名词——阶段、状态和策略, 实际上在其他段落中也有动态规划通用名词的类似解释。



10.2 动态规划问题的特征

驿站马车问题是动态规划问题的范例。事实上, 有意设计这个例子, 为了给这类问题提供具体解释, 而不是抽象结构。因而, 指出一种能被明确地表达为动态规划问题的方法就是看它的基本结构与驿站马车问题是否类似。

本节提出并讨论了这些动态规划问题的如下基本特征。

1. 问题可以分为几个阶段(stages), 每个阶段都有一个策略决策(policy decision)。

驿站马车问题实际上分成了与旅行的四步一致的四个阶段(驿站马车)。每阶段的策略决策就是选择哪份人寿保单(例如, 为下一步驿站马车的路线选择哪个目的地)。类似的, 其他动态规划问题需要制订一系列相关的决策, 其中每个决策都与问题的一个阶段相一致。

2. 每个阶段都有一些与该阶段的开始有关的状态(states)。

驿站马车问题的每个阶段的状态是相关的州(或地区), 即淘金者在旅途的一站中可以落脚的州。总的说来, 状态是各种可能的条件, 其中系统可能存在问题。状态的数量可

能是有限的(如驿站马车问题)也可能是无限的(如一些后来的例子)。

3. 每个阶段策略决策的结果都是从当前的状态变成下一阶段开始的状态(可能是依据概率分布的)。

淘金者下一个目的地的决策,指导他在旅行中从当前的州走到下一个州。这个过程表明动态规划问题可以用第 9 章描述的网络来解释。每个节点都代表相应的州。网络将由节点的列组成,每列对应一个阶段,因此从一点只能流向右面列中的点。从一个点到下一列中的点的连接与可能要去下一个州的策略决策保持一致。分配到每条链的价值通常可以解释为给制订决策策略的目标函数的直接效益。在多数情况下,目标一般是通过网络找到最短或最长的路径。

4. 设计求解过程是为整个问题找到一个**最优策略**(optimal policy),例如,在每一阶段对每个可能的状态进行最优策略决策的指令。

对于驿站马车问题,求解过程为每阶段(n)构建了一个表,为每个可能的状态(s)指定了最优决策(x_n^*)。因而,除了为整个问题确定三个最优解决方案(最优路线)外,结果还显示如果他不走最优路线而绕路到达了另一个州,淘金者下一步应怎么走。对于任何问题,动态规划提供了这种在每个可能的条件下(即取决于在一定阶段的某一特定状态的实际决策被称为策略决策)决定做什么的策略指令。提供额外信息而不是简单指出一种最优的解决方法(决策的最优顺序)是非常有用的,包括灵敏度分析。

5. 已知目前的状态,对于剩余阶段的最优策略与先前阶段采用的策略无关。因此,最优决策要依据当前的状态,而与你是如何到达那里的无关。这就是动态规划的**最优原理**(principle of optimality)。

已知淘金者目前所在的州,从该点往后的最优人寿保单策略(及相关的路线)与他如何到那里无关。通常对于动态规划问题,系统当前状态的知识传达了所有关于以前决定今后最优策略的必要的行为信息(该特性是 16.2 节中讨论的马尔可夫链的性质)。任何没有这种性质的问题都不能建立动态规划问题的模型。

6. 求解过程从为最后阶段找到最优策略开始。

最后阶段的最优策略描述了在该阶段的每种可能状态的最优决策策略。这个单阶段问题的求解办法是尝试性的,正如驿站马车问题。

7. 如果知道 $n+1$ 阶段的最优策略,就可以确定第 n 阶段的最优策略,因而可以得到这种**递推关系**(recursive relationship)。

对于每个最短路径问题,这种递推关系为

$$f_n^*(s) = \min_{x_n} \{c_{sx_n} + f_{n+1}^*(x_n)\}$$

因而,当第 n 阶段你从 s 状态开始时要找出最优决策策略,就需要找到 x_n 的最小值。对于这个特定的问题,通过使用 x_n 的值求得相关的最小成本,然后遵循你在第 $n+1$ 阶段时开始于 x_n 状态的最优策略。

递推关系的精确形式在动态规划问题中有些不同。然而,前面章节介绍的类比表示法在此仍然适用,概括如下:

N = 阶段的数量;

n = 当前阶段的标号 ($n=1, 2, \dots, N$);

s_n = 第 n 阶段的当前状态;

x_n = 第 n 阶段的决策变量;

x_n^* = x_n 的最优值(给定 s_n);

$f_n(s_n, x_n)$ = 阶段 $n, n+1, \dots, N$ 目标函数的效益值, 即当从 n 阶段状态 s_n 出发, 直接决策为 x_n , 然后制订最优决策时的效益值。

$$f_n^*(s_n) = f_n(s_n, x_n^*)$$

这种递推关系总是表示为

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n} \{f_n(s_n, x_n)\} \quad \text{或} \quad f_n^*(s_n) = \min_{x_n} \{f_n(s_n, x_n)\}$$

其中, $f_n(s_n, x_n)$ 可用 $s_n, x_n, f_{n+1}^*(s_{n+1})$ 和对目标函数的直接效益 x_n 的一些可能方法表示。还包括等式右边的 $f_{n+1}^*(s_{n+1})$, 所以 $f_n^*(s_n)$ 用 $f_{n+1}^*(s_{n+1})$ 定义, 从而使 $f_n^*(s_n)$ 的表达式为递推关系。

当我们一步一步逆序移动的时候, 这种递推的关系不断地重复。当现阶段数字 n 降为 1 时, 新的函数 $f_n^*(s_n)$ 可以通过使用在上一步得到的 $f_{n+1}^*(s_{n+1})$ 函数得到, 然后重复这一过程, 这种特性在后面的动态规划的特点中得到强调。

8. 当我们运用这种递推关系时, 求解过程从终点开始并且一步一步逆序移动——每次都找该阶段的最优策略, 直到找到开始的最初阶段的最优策略。这个最优策略立即得出整个问题的最优解决方案, 即初始状态 s_1 为 x_1^* , 然后产生的 s_2 为 x_2^* , 然后产生的 s_3 为 x_3^* , s_N 为 x_N^* 等。

驿站马车问题演示了这个逆序运动, 其总最优策略分别在第 4 阶段、第 3 阶段、第 2 阶段和第 1 阶段的每个状态开始时被依次找到。^① 对于所有的动态规划问题, 每个阶段 ($n=N, N-1, \dots, 1$) 都有如下所示的表格。

s_n	x_n	$f_n(s_n, x_n)$	$f_n^*(s_n)$	x_n^*

当从初始阶段 ($n=1$) 获得这个表格时, 就解决了我们所关心的问题。由于初始状态是已知的, 表格中初始决策用 x_1^* 表示。然后其他决策变量的最优值, 根据前面决策产生的状态依次用其他表格表示。



10.3 确定性动态规划

本节深入讨论了确定性问题的动态规划方法, 在下一阶段的状态完全由当前阶段的状态和策略决策决定。下一节将讨论随机的案例, 它是指下一状态将会呈概率分布。

确定性动态规划可以用图 10.3 图解描述。这样, 在第 n 阶段, 过程将在一些状态 s_n 下进行。制订决策 x_n , 然后将这一过程移到第 $n+1$ 阶段的状态 s_{n+1} 。此后在最优策略下目标函数的效益已经被前面的 $f_{n+1}^*(s_{n+1})$ 计算出来了。决策 x_n 也对目标函数提供了

^① 实际上这个问题的求解过程可以逆向也可以前向移动。但是对很多问题(特别是阶段对应时间周期)求解的过程必须逆向移动。

效益。以适当的方式结合这两个数量,为目标函数提供 $f_n(s_n, x_n)$ 和前面 n 阶段的效益。最优化 x_n , 得到 $f_n^*(s_n) = f_n(s_n, x_n^*)$ 。对于 s_n 的每个可能值, 我们发现 x_n^* 和 $f_n^*(s_n)$ 之后, 求解过程准备后向移动一个阶段。

应用案例

在萨达姆·侯赛因命令伊拉克军队于 1990 年 8 月 2 日入侵科威特 6 天之后, 美国开始将大批军队和物资运往波斯湾地区。在以美国为首的来自 35 个国家的联合国军队集结完毕后, 1991 年 1 月 17 日发动了被称为“沙漠风暴”的军事行动。联合国部队获得了决定性的胜利, 科威特被解放, 联合国部队攻入伊拉克。

将需要的部队和物资快速运往战区是一项令人畏惧的物流任务。在一个典型的空运任务中, 从美国本土空运部队和物资到波斯湾往返需要 3 天, 途径 7 个或更多的空域, 消耗大约 100 万磅燃料, 并且成本高达 280 000 美元。在整个“沙漠风暴”行动期间, 美国空军机动司令部(MAC)平均每天要组织超过 100 次的类似空运, 因此 MAC 指挥着历史上最大规模的空运。

为了满足需要, 应用运筹学开发的决策支持系统需要对每个空运任务进行调度和分配航线。驱动该过程的运筹学技术是动态规划方法。动态规划建模中的阶段对应于空运计划的飞行路径网络中的机场。对于一个给定的机场, 状态用从机场的起飞时间及当前机组成员的剩余职责描述。要求最小化的目标函数是一个性能测度——包括交货的延误、任务的飞行时间、起落时间及机组成员改变的数量——的权重和。约束包括一次任务的最低载货量以及机场可用机组成员及地面物资支持的上限。

动态规划的应用发挥了意想不到的效果, 能够快速地将所需要的物资和军队运送到波斯湾支持“沙漠风暴”行动。例如, 当与该方法的开发者交谈时, MAC 负责运营和运输的总参谋长说: “我发誓, 没有你们的帮助及你们所做的贡献(决策支持系统), 我们是无法成功的(在波斯湾的部署)——我们绝对无法做到。”

资料来源: M. C. Hilliard, R. S. Solanki, C. Liu, I. K. Busch, G. Harrison, and R. D. Kraemer: “Scheduling the Operation Desert Storm Airlift: An Advanced Automated Scheduling Support System,” *Interfaces*, 22(1): 131-146, Jan.-Feb. 1992. (以下网址提供本文的链接: www.mhhe.com/hillier.)

对确定性动态规划问题的一种分类方法是通过目标函数的形式进行的。例如, 目标可能是最小化单个阶段损失的总和(如驿站马车问题), 或者最大化这样的总和, 或者最小化这种形式的产品等。另一种分类是以各阶段状态趋势的性质进行的。特别是, 状态 s_n 可能需要被一个离散的状态变量代表(如驿站马车问题), 或者是由连续的状态变量, 或者是一个状态向量(不止一个变量)代表。类似的, 决策变量 (x_1, x_2, \dots, x_N) 也可能是离散的或者连续的。

提出几个例子来阐述这些不同的可能性。更重要的是, 它们阐释了这些表面上重要的差异, 实际上是无要紧要的(除了计算上的困难之外), 因为图 10.3 显示的基本结

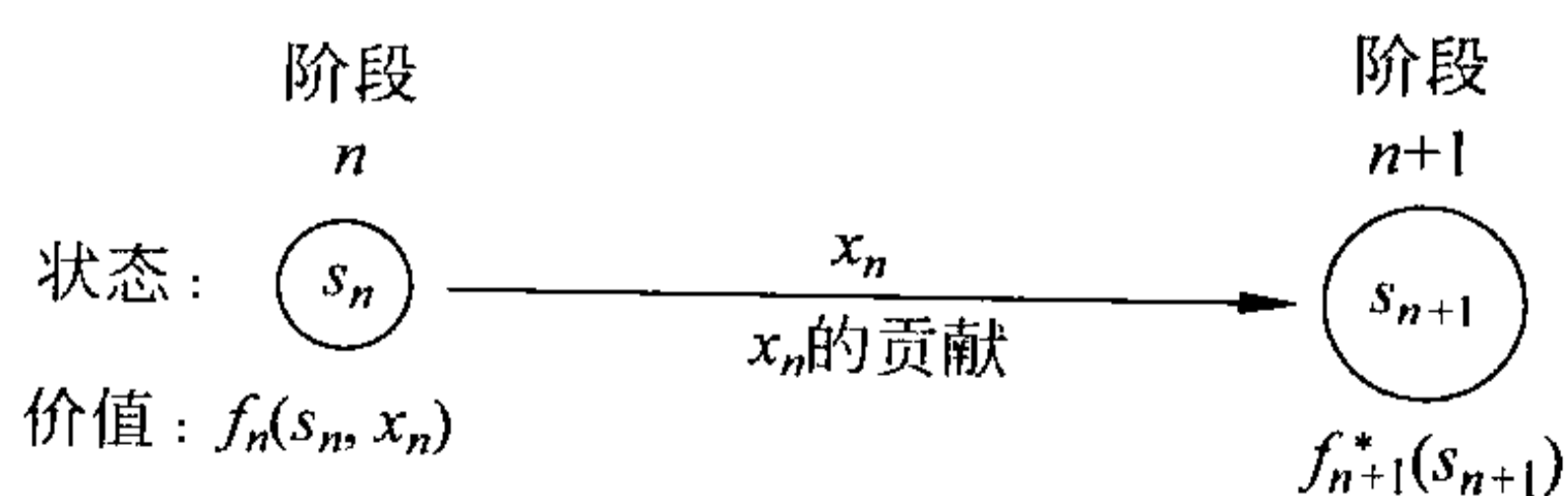


图 10.3 确定性动态规划的基本结构

构总是相同的。

第一个新例子将在一个与驿站马车问题大不相同的段落里提出,但是它有相同的数学公式,只不过目标是最大化而不是最小化总额。

例 2 各国医药队的分配

世界卫生组织致力于改善发展中国家的医疗水平。现在有五个医疗队将被分配到三个这样的国家改善医疗服务、健康教育、培训计划。因而,该组织需要决定有多少支团队(如有)分配给每个国家,以最大化这五组的总效益。必须保持队伍的完整,所以分配给每个国家的数字必须是一个整数。

所用的绩效评价是人们增加的寿命(某一特定国家,这一措施等于增加的期望寿命乘以该国人口数)。表 10.1 给出了估计的增加的人·年寿命(乘 1 000),对每个国家每个医疗队的每种可能分配。

表 10.1 世界卫生组织问题的数据

医疗队	增加的人口寿命/千人·年		
	国 家		
	1	2	3
0	0	0	0
1	45	20	50
2	70	45	70
3	90	75	80
4	105	110	100
5	120	150	130

怎样分配以最大化绩效评价?

建模 这个问题需要做出三个相关的决策,即有多少个医疗队分配到三个国家。因此,即使没有固定的顺序,这三个国家也可被视为动态规划模型的三个阶段。决策变量 x_n ($n=1,2,3$) 是分配给 n 阶段(国家)的医疗队的数目。

状态的识别可能不是显而易见的。为了确定状态,我们提出以下问题。是什么使得从一阶段向下一阶段改变的? 已知在前面的阶段已经做出了决定,如何描述目前阶段的状态情况? 关于目前状态的什么信息对于决定后面的最优策略是必要的? 基于这些基础,选择“系统状态”的一种方法是:

$$s_n = \text{用于分配给剩余国家的可得到的医疗队的数目} \quad (n, \dots, 3)$$

因此,在第 1 阶段(国家 1),所有三个国家考虑剩余的分配, $s_1=5$ 。但是,在阶段 2 或阶段 3(国家 2 或国家 3), s_n 是 5 减去前一阶段分配了的医疗队的数目,所以状态的顺序是:

$$s_1 = 5, \quad s_2 = 5 - x_1, \quad s_3 = s_2 - x_2$$

运用逆序的动态规划求解过程,当我们在第 2 阶段或第 3 阶段解决问题的时候,我们还没有求解前一阶段的分配问题。因此,我们应考虑在第 2 阶段或第 3 阶段所处的每个可能状态,即 $s_n=0,1,2,3,4$ 或 5。

图 10.4 反映了在各阶段所考虑的状态。连线(线段)表明了制订对各国可行的医疗

队分配方案时,从一个阶段到下一阶段状态的可能转变。线段上的数字表明了相应的绩效评价的效益,这些数字来源于表 10.1。从这些数字来看,整个问题是要找到从初始的状态 5 (开始阶段 1)到最后的阶段 3 之后的状态 0 的路径,使沿着该路径数量的总和最大。

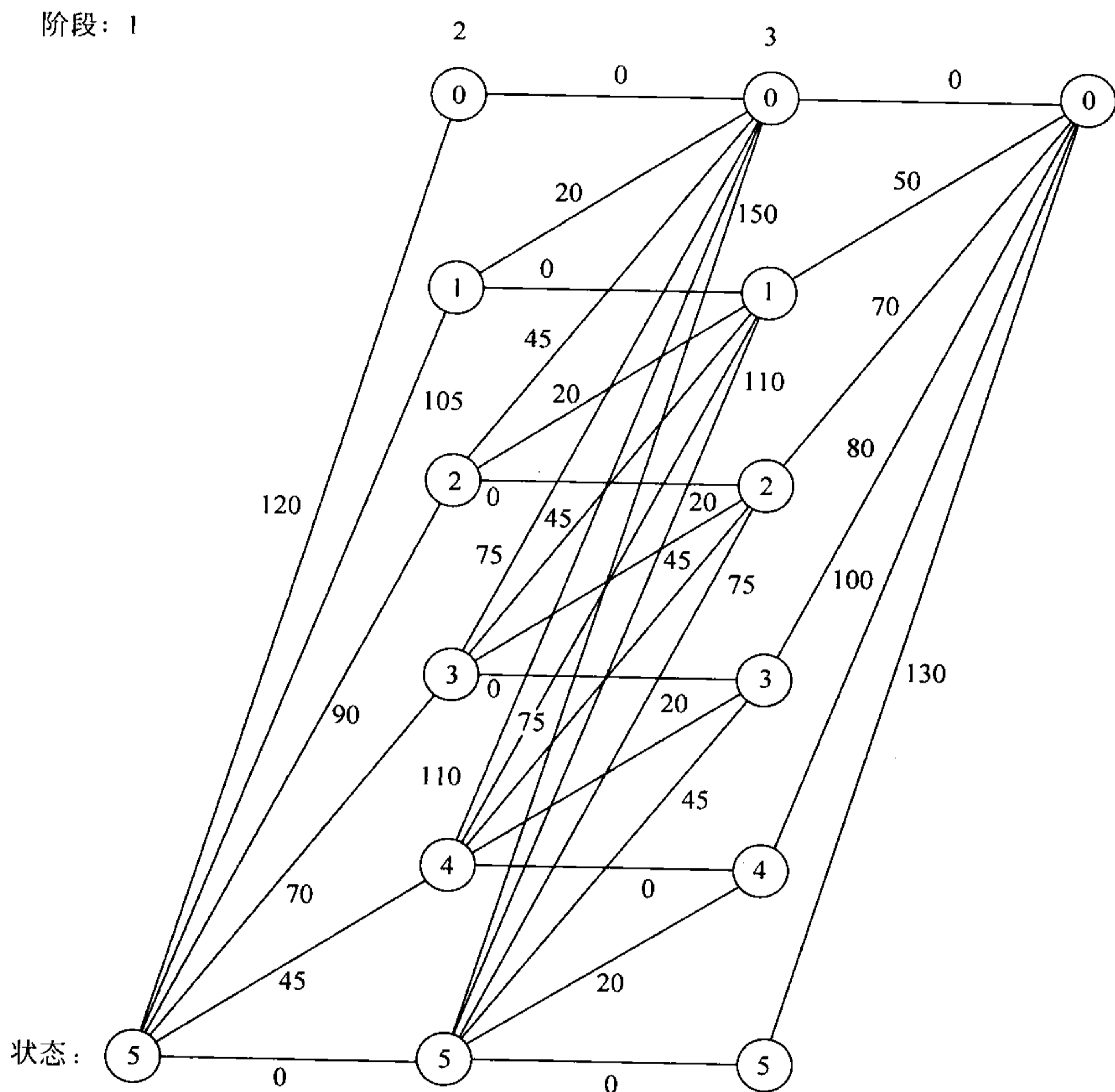


图 10.4 世界卫生组织问题的图解演示,表明每一阶段可能的状态,每一状态可能的转换,以及相应的绩效评价的效益

为了用数学的方式陈述整个问题,设 $p_i(x_i)$ 为向国家 i 分配 x_i 个医疗队的绩效评价,如表 10.1 所示。这样,目标就是选择 x_1, x_2, x_3 。

$$\begin{aligned} \max & \sum_{i=1}^3 p_i(x_i) \\ \text{s. t.} & \sum_{i=1}^3 x_i = 5 \end{aligned}$$

且 x_i 为非负整数

运用第 10.2 节所提的注解,我们看到 $f_n(s_n, x_n)$ 是

$$f_n(s_n, x_n) = p_n(x_n) + \max \sum_{i=n+1}^3 p_i(x_i)$$

其中,最大值由 x_{n+1}, \dots, x_3 替换,因此

$$\sum_{i=n}^3 x_i = s_n$$

并且 x_i 是非负整数, 对于 $n=1, 2, 3$ 。而且

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n=0,1,\dots,s_n} f_n(s_n, x_n)$$

因此

$$f_n(s_n, x_n) = p_n(x_n) + f_{n+1}^*(s_n - x_n)$$

(将 f_4^* 定义为 0)。图 10.5 总结了这些基本的关系。

因此, 对于这个问题关联到函数 f_1^* 、 f_2^* 和 f_3^* 的递推关系:

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n=0,1,\dots,s_n} \{p_n(x_n) + f_{n+1}^*(s_n - x_n)\}, \quad \text{其中 } n=1, 2$$

对于最后阶段 ($n=3$),

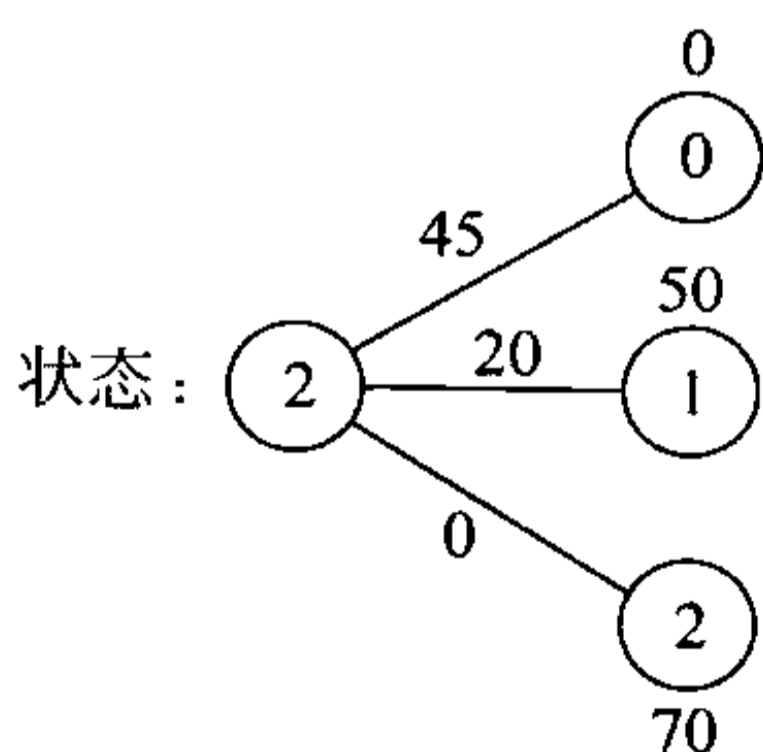
$$f_3^*(s_3) = \max_{x_3=0,1,\dots,s_3} p_3(x_3)$$

下面将给出所产生动态规划的计算介绍。

求解过程 从最后一个阶段 ($n=3$) 开始, 我们注意到 $p_3(x_3)$ 的值在表 10.1 的最后一列给出, 并且随着我们沿着该列往下移动, 这些值持续增长。因此, 在向国家 3 分配 s_3 个医疗队时, $p_3(x_3)$ 的最大值可以通过分配所有的 s_3 个队自动获得; 因此 $x_3^* = s_3$ 和 $f_3^*(s_3) = p_3(s_3)$, 如下表所示。

$n=3:$	s_3	$f_3^*(s_3)$	x_3^*
	0	0	0
	1	50	1
	2	70	2
	3	80	3
	4	100	4
	5	130	5

我们现在从倒数第 2 阶段 ($n=2$) 开始向后移动。这里, 找到 x_2^* 需要为 x_2 备选值计算和对比 $f_2(s_2, x_2)$, 即 $x_2=0, 1, \dots, s_2$ 。为了阐述, 我们用下图描述了当 $s_2=2$ 时的情况。



除了已表示的第 3 阶段的所有三种可能状态, 这个图形与图 10.5 一致。这样, 如果 $x_2=0$, 那么第 3 阶段所产生的状态将是 $s_2 - x_2 = 2 - 0 = 2$; 而 $x_2=1$ 导致状态 1; $x_2=2$ 导致状态 0。沿着连线也显示了表 10.1 中“国家 2”栏的 $p_2(x_2)$ 的相应值, 且从 $n=3$ 表中得到的 $f_3^*(s_2 - x_2)$ 的值在接近第 3 阶段的点上给出。当 $s_2=2$ 时需要的计算概括如下。

建模 $f_2(2, x_2) = p_2(x_2) + f_3^*(2 - x_2)$

$p_2(x_2)$ 在表 10.1 的“国家 2”栏中给出

$f_3^*(2 - x_2)$ 在 $n=3$ 表(上页下面)中给出

$$x_2 = 0: f_2(2, 0) = p_2(0) + f_3^*(2) = 0 + 70 = 70$$

$$x_2 = 1: f_2(2, 1) = p_2(1) + f_3^*(1) = 20 + 50 = 70$$

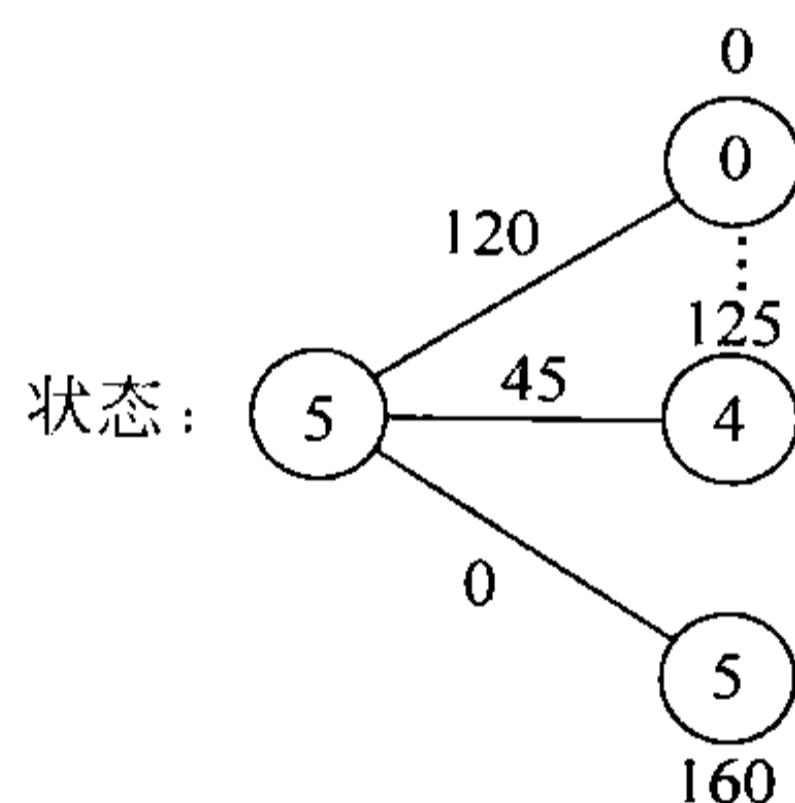
$$x_2 = 2: f_2(2, 2) = p_2(2) + f_3^*(0) = 45 + 0 = 45$$

因为目标是最大化, 所以 $x_2^* = 0$ 或者 1, $f_2^*(2) = 70$ 。

用相同的方法得出 s_2 的其他可能值(尝试), 见下表。

s_2	x_2	$f_2(s_2, x_2) = p_2(x_2) + f_3^*(s_2 - x_2)$					$f_2^*(s_2)$	x_2^*
		0	1	2	3	4		
$n=2:$	0	0					0	0
	1	50	20				50	0
	2	70	70	45			70	0 或 1
	3	80	90	95	75		95	2
	4	100	100	115	125	110	125	3
	5	130	120	125	145	160	160	4

我们现已准备好返回求解从第 1 阶段($n=1$)开始的最初问题。在这种情况下, 唯一考虑的状态就是 $s_1=5$ 时的最初状态, 如下图所示。



由于向国家 1 分配 x_1 个医疗队导致了在第 2 阶段状态为 $5 - x_1$, 因此选择 $x_1 = 0$, 就是右边下面的点, $x=1$ 时就是下面的倒数第二点, 直到 $x_1=5$ 时是最上面的点。表 10.1 中相应的 $p_1(x_1)$ 的值在链的旁边显示。靠着节点的数字可以从 $n=2$ 表的 $f_2^*(s_2)$ 栏获得。当 $n=2$ 时, 对决策变量的每个可选值的计算包括相应的链值加上节点值, 概括如下。

建模 $f_1(5, x_1) = p_1(x_1) + f_2^*(5 - x_1)$

$p_1(x_1)$ 在表 10.1 的“国家 1”栏中给出

$f_2^*(5 - x_1)$ 在 $n=2$ 表中给出

$$x_1 = 0: f_1(5, 0) = p_1(0) + f_2^*(5) = 0 + 160 = 160$$

$$x_1 = 1: f_1(5, 1) = p_1(1) + f_2^*(4) = 45 + 125 = 170$$

⋮

$$x_1 = 5: f_1(5, 5) = p_1(5) + f_2^*(0) = 120 + 0 = 120$$

对于 $x_1=2, 3, 4$ (尝试), 用相同的计算验证在 $x_1^*=1$ 时, $f_1^*(5)=170$ 。如下表所示。

$n=1:$	s_1	x_2	$f_1(s_1, x_1) = p_1(x_1) + f_2^*(s_1 - x_1)$					$f_1^*(s_1)$	x_1^*	
			0	1	2	3	4			5
	5		160	170	165	160	155	120	170	1

因此,最优求解方法有 $x_1^* = 1$,其中使 $s_2 = 5 - 1 = 4$,从而 $x_2^* = 3$,其中使 $s_3 = 4 - 3 = 1$,这样 $x_3^* = 1$ 。由于 $f_1^*(5) = 170$,所以向三个国家分别分配(1,3,1)个医疗队,会得出估计总数大约为 170 000 人·年的增加量,这至少比其他分配多出 5 000 人·年。

这些动态规划分析的结果在图 10.6 中概括。

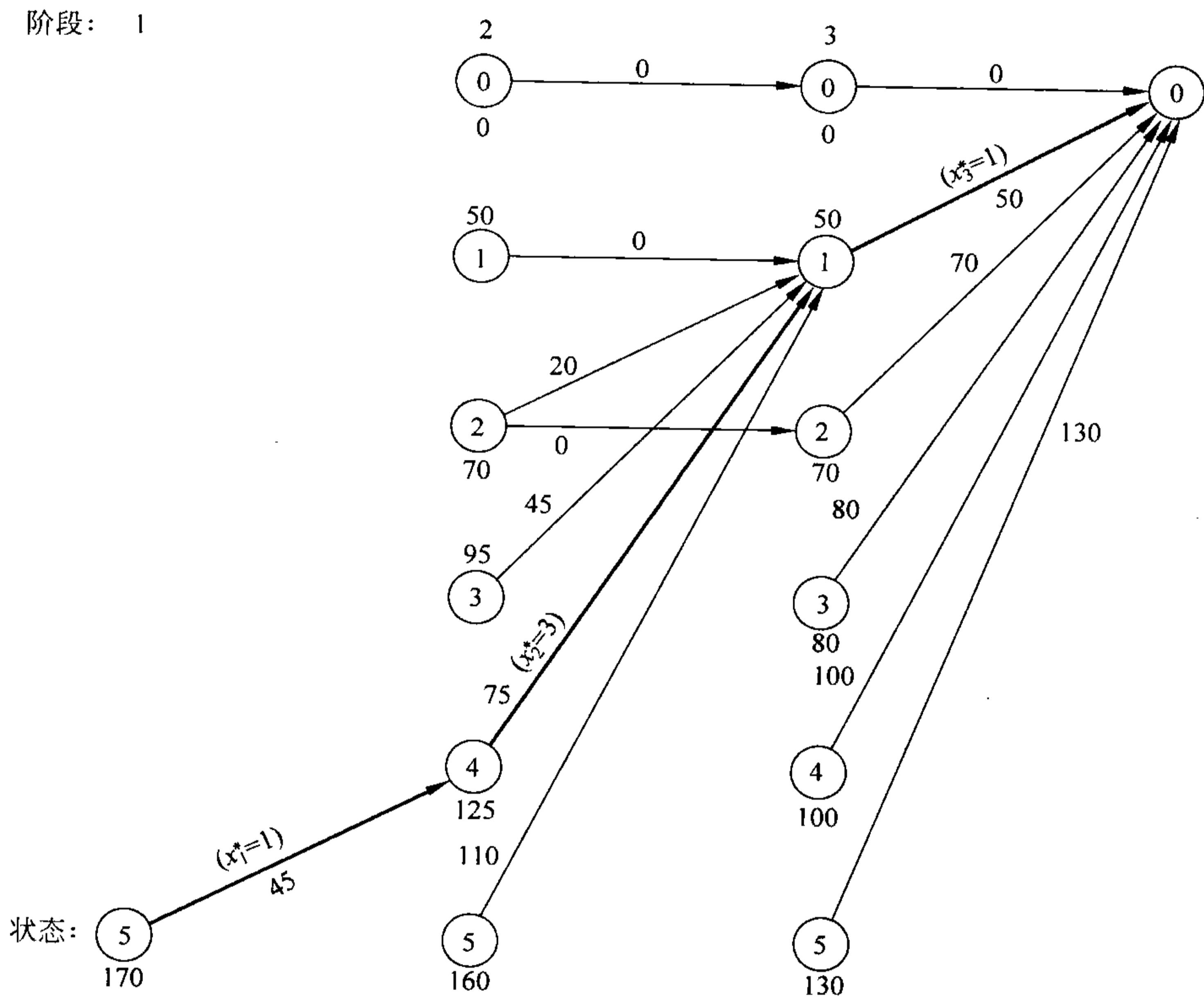


图 10.6 世界卫生组织问题动态规划求解方法的图形演示

说明: 从状态 s_n 到状态 s_{n+1} 的箭头表明状态 s_n 的最优决策策略是分配 $(s_n - s_{n+1})$ 个医疗队到国家 n 。当沿着粗体箭头从初始状态到最后状态时,按这种方式分配医疗队得出最优方案。

一种常见的问题范例——工作问题分配

前面的例子阐述了动态规划问题的一种常见的类型,被称为工作问题分配。对于这种类型的问题,仅有一种资源被分配到许多活动中。目标是决定如何在活动中最有效地分配工作(资源)。对于世界卫生组织这个例子,涉及的资源是医疗队,三个活动是在三个国家中的医疗保健工作。

假设

分配资源给活动的解释应该让你想起前面的知识,因为对于第 3 章开头给出的线性

规划问题来说,它是一个典型的解释。然而,在工作问题分配与线性规划之间也有一些重要的区别,它帮助阐述动态规划与其他领域数学规划之间的区别。

一个重要的区别是工作分配的问题仅涉及一种资源(一个约束),而线性规划可以处理上千种资源(原则上,动态规划能轻松地处理不止一种资源,我们将在例5的 Wyndor Glass 公司问题中通过求解三种资源来阐述,但是随着资源数目的增长,它很快将变得无效)。

另外,工作分配问题远比线性规划问题普遍。考虑3.3节中提到的线性规划问题的四个假设:比例性、可加性、可分性和确定性。比例性几乎与所有的动态规划问题相违背,包括工作问题的分配(例如表10.1违背比例性)。可分性也与之相违背,如例2,其中决策变量必须为整数。事实上,当可分性成立时(如例4和例5),动态规划的计算变得更为复杂。虽然我们应该仅在确定性的假设条件下考虑工作分配问题,但这不是必需的,并且许多其他动态规划问题也违背这个假设(如10.4节中所述)。

在线性规划的四个假设中,只需要一个工作分配问题(或其他动态规划问题),那就是可加性。需要用这个假设来满足动态规划的最优性原则(10.2节中的特点5)。

建模

因为它们总是分配一种资源给许多活动,工作分配问题总是具有下列动态规划公式(其中活动的排序是任意的):

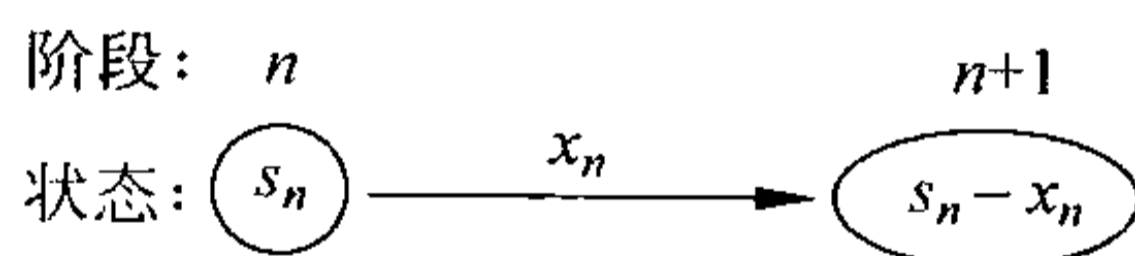
阶段 $n =$ 活动 $n(n = 1, 2, \dots, N)$

$x_n =$ 分配到活动 n 的资源数

状态 $s_n =$ 分配到剩余活动中的可用资源数 (n, \dots, N)

用这种方式定义 s_n 的原因是可以分配的可用资源数,正是关于事件(进入第 n 阶段)当前状态的信息,我们需要用这种信息对剩余活动进行分配决策。

当系统从第 n 阶段状态 s_n 开始时,选择 x_n 将导致下一个状态位于第 $n+1$ 阶段 $s_{n+1} = s_n - x_n$,描述如下^①:



注意该图解结构是如何与图10.5中表示的世界卫生组织工作分布问题的案例结构相一致的。这两个例子的区别是图10.5中的其余部分,即 $f_n(s_n, x_n)$ 和 $f_{n+1}^*(s_n - x_n)$ 之间的关系,以及 f_n^* 和 f_{n+1}^* 函数之间所产生的递推关系。这些关系取决于整个问题特定的目标函数。

下一个例子的结构与世界卫生组织的结构相似,因为它也是工作分配问题。但是递推关系的区别在于其目标是最小化每个阶段的某项产品。

乍一看,这个例子似乎不是确定性动态规划问题,因为涉及概率。但是,它的确符合我们的定义,因为在下一阶段的状态完全由当前阶段的状态和决策策略决定。

^① 该叙述假定 x_n 和 s_n 用相同单位表述。设一种比较的定义为:若 x_n 是分配用于第 n 项活动的资源总量,数量为 $a_n x_n$,于是有 $s_{n+1} = s_n - a_n x_n$ 。

例 3 给科研小组分配科学家

一项政府空间计划正在进行某项工程问题研究,这个问题必须在人们能够安全飞抵火星之前解决。三个科研小组目前正在尝试三种方法来解决这个问题。在这种情况下,估计各组——分别称之为 1 组、2 组和 3 组——不会成功的概率分别为 0.40、0.60 和 0.80。因而,目前所有这三组都失败的概率为 $(0.40)(0.60)(0.80)=0.192$ 。因为目标是 minimized 失败概率,有另外两名顶级科学家将被分配到该工程项目中。

表 10.2 给出了各组在有 0 名、1 名或 2 名其他科学家加入其组时,各自组会失败的估计概率。只能考虑整数的科学家数目,因为每个新加入的科学家都必须全身心地投入一个组中。问题是决定如何分配另两位科学家以最小化所有组都失败的概率。

新科学家	失败概率		
	1 组	2 组	3 组
0	0.40	0.60	0.80
1	0.20	0.40	0.50
2	0.15	0.20	0.30

建模 因为例 2 和例 3 都是工作分配问题,它们的基本结构实际上非常相似。在本例里,是科学家而不是医疗队作为资源的种类,是科研小组而不是各个国家作为分配活动去向。因而,不是医疗队被分配到各国家,而是科学家被分配到各科研小组。在两个问题之间唯一的基本区别就是它们的目标函数。

涉及这么少的科学家和小组,这个问题通过详尽的列举过程可以很容易求解。然而,动态规划的求解方法是为了阐述这种思想的目的而提出的。

在本例中,阶段 $n(n=1,2,3)$ 与科研小组 n 相一致,状态 s_n 是能够分配到剩余小组中的新科学家的数目。决策变量 $x_n(n=1,2,3)$ 是额外分配到组 n 里的科学家的数字。

设 $p_i(x_i)$ 是如果分配 x_i 个额外科学家时组 i 的失败概率,如表 10.2 所示。如果用 Π 代表连乘,那么政府的目标是选择 x_1, x_2, x_3 , 于是

$$\begin{aligned} \min \quad & \prod_{i=1}^3 p_i(x_i) = p_1(x_1)p_2(x_2)p_3(x_3) \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{i=1}^3 x_i = 2 \end{aligned}$$

且 x_i 为非负整数

因此,对于该问题, $f_n(s_n, x_n)$ 是

$$f_n(s_n, x_n) = p_n(x_n) \cdot \min \prod_{i=n+1}^3 p_i(x_i)$$

其中最小值在 x_{n+1}, \dots, x_3 中,为

$$\sum_{i=n}^3 x_i = s_n$$

且 x_i 为非负整数, $n=1,2,3$ 。这样

下一个例子在两个方面有所不同。没有整数的约束条件,在阶段 n 的状态变量 s_n 是可以将任何值分为在某些间断中的连续变量。由于 s_n 现在有许多无限大的值,分别考虑每一个可行值已经不再可能了。相比之下,对 $f_n^*(s_n)$ 和 x_n^* 的解决方法一定用 s_n 的函数表示。而且,这个例子不是可逆的,因为它的阶段与时间周期一致,所以求解程序必须从前向后进行。

例 4 计划雇用水平

地方加工车间的工作量受相当大的季节波动影响。然而,机床工人很难雇到,并且培训费用高,所以经理不愿意在淡季的时候裁员。他同样不愿意在不需要的时候还支付薪水。而且,他明确地反对定期加班,因为所有工作是按照订单进行的,他不可能在淡季的时候建立库存。因而,在如何制订其雇用水平的策略时,经理是进退两难的。

下面是预计未来一年四个季节中最小雇用需求的估计值。

季节	春季	夏季	秋季	冬季	春季
需要	255	220	240	200	255

雇用不允许降到这些水平以下。任何高于这些水平的雇用每季每人大约浪费 2 000 美元。估计雇用和解雇的成本是这样计算的,从一个季节到下个季节改变雇用水平的全部成本是 200 乘以雇用水平的差的平方。雇用的非整数水平是可能的,因为有一些兼职的员工,成本数据的应用也是基于非整数的。

建模 基于得到的数据,拥有超过旺季需求时的 255 个员工的雇用水平是不划算的。因而,春季雇用应为 255,那么问题就减少为找到其他三个季节的最优雇用水平。

对于动态规划模型,季节应为阶段。因为问题可以延伸至无限的未来,所以它实际上可以有无数个阶段数。然而,每年开始一个同样的周期,因为春季雇用众所周知,考虑仅仅用春季作为结尾的四个季节中的一个周期是合理的,概括如下:

阶段 1 = 夏季

阶段 2 = 秋季

阶段 3 = 冬季

阶段 4 = 春季

x_n = 阶段 n ($n=1,2,3,4$) 的雇用水平

($x_4=255$)

春季作为最后一个阶段是必要的,因为在最后一个阶段每个状态的决策变量的最优值必须是已知的或者不考虑其他阶段就能获得的。对于其他每个季节,最优雇用水平的解必须考虑后面季节成本的影响。

设 $r_n = \min$ 第 n 阶段的雇用需求

其中,这些需求前面已经给出,为 $r_1=220$, $r_2=240$, $r_3=200$ 和 $r_4=255$ 。这样, x_n 的唯一可行值为

$$r_n \leq x_n \leq 255$$

根据问题叙述部分给出的成本数据,我们有

$$\text{第 } n \text{ 阶段的成本} = 200(x_n - x_{n-1})^2 + 2000(x_n - r_n)$$

注意当前阶段的成本仅仅取决于当前决策 x_n 和前一季节 x_{n-1} 的雇用。因而,前面的雇用水平就是关于我们需要决定后面最优策略当前状态的所有信息。因此,第 n 阶段的状态 s_n 是

$$\text{状态 } s_n = x_{n-1}$$

当 $n=1$ 时, $s_1 = x_0 = x_4 = 255$ 。

为了让你容易理解,表 10.3 给出了四个阶段每一季的数据摘要。

n	r_n	变量 x_n	可能值 $s_n = x_{n-1}$	成本
1	220	$220 \leq x_1 \leq 255$	$s_1 = 255$	$200(x_1 - 255)^2 + 2000(x_1 - 220)$
2	240	$240 \leq x_2 \leq 255$	$220 \leq s_2 \leq 255$	$200(x_2 - x_1)^2 + 2000(x_2 - 240)$
3	200	$200 \leq x_3 \leq 255$	$240 \leq s_3 \leq 255$	$200(x_3 - x_2)^2 + 2000(x_3 - 200)$
4	255	$x_4 = 255$	$200 \leq s_4 \leq 255$	$200(255 - x_3)^2$

这个问题的目标是选择 x_1, x_2, x_3 (有 $x_0 = x_4 = 255$), 这样

$$\begin{aligned} \min & \sum_{i=1}^4 [200(x_i - x_{i-1})^2 + 2000(x_i - r_i)] \\ \text{s. t.} & r_i \leq x_i \leq 255, \quad \text{对 } i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

因而,对于第 n 阶段 ($n=1, 2, 3, 4$), 由于 $s_n = x_{n-1}$

$$\begin{aligned} f_n(s_n, x_n) &= 200(x_n - s_n)^2 + 2000(x_n - r_n) \\ &+ \min_{r_i \leq x_i \leq 255, i=n+1} \sum_{i=n+1}^4 [200(x_i - x_{i-1})^2 + 2000(x_i - r_i)] \end{aligned}$$

其中,当 $n=4$ 时,这个总和等于 0 (因为它没有意义), 并且

$$f_n^*(s_n) = \min_{r_n \leq x_n \leq 255} f_n(s_n, x_n)$$

所以

$$f_n(s_n, x_n) = 200(x_n - s_n)^2 + 2000(x_n - r_n) + f_{n+1}^*(x_n)$$

(f_5^* 被定义为 0, 因为阶段 4 以后的成本与本分析无关) 这些基本关系的概括见图 10.8。

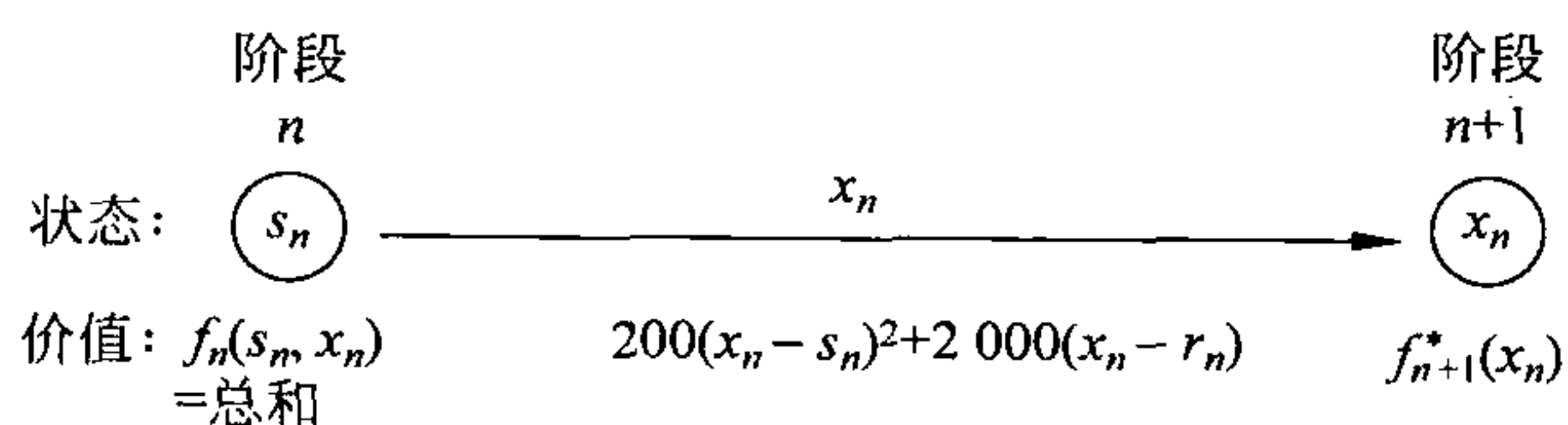


图 10.8 地方加工车间问题的基本结构

因此,关系到函数 f_n^* 的递推关系为

$$f_n^*(s_n) = \min_{r_n \leq x_n \leq 255} \{200(x_n - s_n)^2 + 2000(x_n - r_n) + f_{n+1}^*(x_n)\}$$

动态规划方法用这一关系先后确定这些函数—— $f_4^*(s_4), f_3^*(s_3), f_2^*(s_2), f_1^*(255)$ 和相应的 x_n 的最小值。

求解过程 阶段 4: 从最后一个阶段 ($n=4$) 开始, 我们已经知道 $x_4^* = 255$, 所以必然的结果为

$n=4:$	s_4	$f_4^*(s_4)$	x_4^*
	$200 \leq s_4 \leq 255$	$200(255 - s_4)^2$	255

阶段 3: 对于问题仅包含最后两个阶段 ($n=3$), 递推关系简化为

$$\begin{aligned} f_3^*(s_3) &= \min_{200 \leq x_3 \leq 255} \{200(x_3 - s_3)^2 + 2000(x_3 - 200) + f_4^*(x_3)\} \\ &= \min_{200 \leq x_3 \leq 255} \{200(x_3 - s_3)^2 + 2000(x_3 - 200) + 200(255 - x_3)^2\} \end{aligned}$$

其中, s_3 可能值为 $240 \leq s_3 \leq 255$ 。

对于任何特定 s_3 的值, 解出使 $f_3(s_3, x_3)$ 最小的 x_3 的值的的一个方法, 就是用图 10.9 中阐述的图解法。

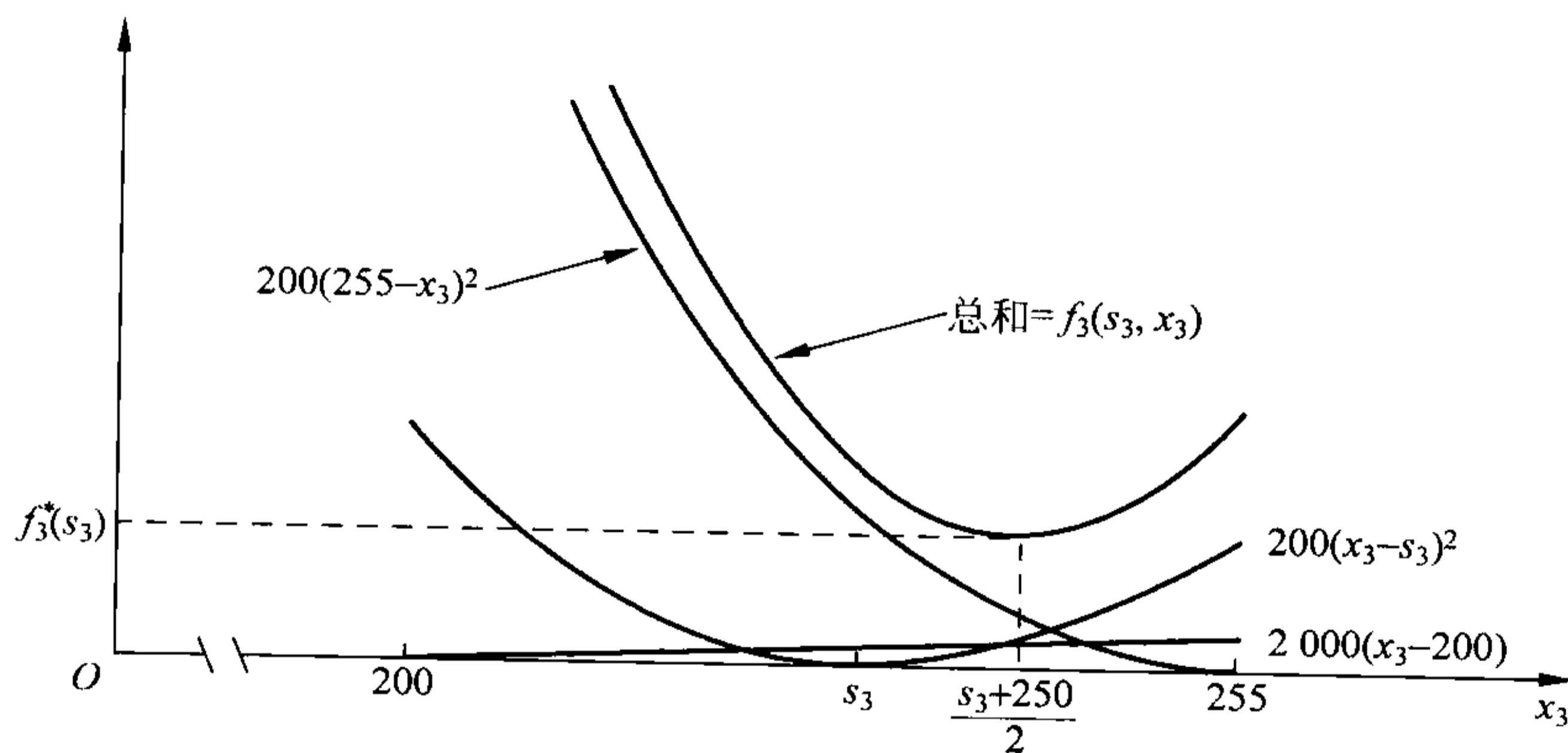


图 10.9 地方加工车间问题 $f_3^*(s_3)$ 的图解法

然而, 更快的方法是使用微积分法。我们希望通过设 s_3 是某个固定值(但是未知), 以 s_3 的形式解出 x_3 的最小值。因此, 假设关于 x_3 的 $f_3(s_3, x_3)$ 的偏导数等于 0:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_3} f_3(s_3, x_3) &= 400(x_3 - s_3) + 2000 - 400(255 - x_3) \\ &= 400(2x_3 - s_3 - 250) \\ &= 0 \end{aligned}$$

得出

$$x_3^* = \frac{s_3 + 250}{2}$$

因为第二个导数是正的, 同时这个解对于所有可能的 x_3 ($200 \leq x_3 \leq 255$), s_3 ($240 \leq s_3 \leq 255$) 都在可行域内, 所以它正是所需要的最小期望值。

注意这个求解方法的特性和前面例子中的一个重要不同,就是前面的例子只需要考虑几个可能的状态。我们现在有无数可能的状态($240 \leq s_3 \leq 255$),因此对每个可能的 s_3 的值分别求出 x_3^* 的值,便不再可行。因而,我们让 x_3^* 作为未知数 s_3 的函数,解出 x_3^* 。

运用

$$f_3^*(s_3) = f_3(s_3, x_3^*) = 200 \left(\frac{s_3 + 250}{2} - s_3 \right)^2 + 200 \left(255 - \frac{s_3 + 250}{2} \right)^2 + 2000 \left(\frac{s_3 + 250}{2} - 200 \right)$$

和数学上的简化表达式,完成第三阶段问题所需的结果,概括如下。

$n=3:$	s_3	$f_3^*(s_3)$	x_3^*
	$240 \leq s_3 \leq 255$	$50(250 - s_3)^2 + 50(260 - s_3)^2 + 1000(s_3 - 150)$	$\frac{s_3 + 150}{2}$

阶段2:用类似的方法,求解第二阶段($n=2$)和第一阶段的问题($n=1$)。这样,对于 $n=2$

$$\begin{aligned} f_2(s_2, x_2) &= 200(x_2 - s_2)^2 + 2000(x_2 - r_2) + f_3^*(x_2) \\ &= 200(x_2 - s_2)^2 + 2000(x_2 - 240) + 50(250 - x_2)^2 \\ &\quad + 50(260 - x_2)^2 + 1000(x_2 - 150) \end{aligned}$$

s_2 的可能值为 $220 \leq s_2 \leq 255$, x_2 的可行域为 $240 \leq x_2 \leq 255$ 。问题是找出这个区间里 x_2 的最小值,于是

$$f_2^*(s_2) = \min_{240 \leq x_2 \leq 255} f_2(s_2, x_2)$$

令关于 x_2 的偏导数为0:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} f_2(s_2, x_2) &= 400(x_2 - s_2) + 2000 - 100(250 - x_2) - 100(260 - x_2) + 1000 \\ &= 200(3x_2 - 2s_2 - 240) \\ &= 0 \end{aligned}$$

得出

$$x_2 = \frac{2s_2 + 240}{3}$$

因为

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f_2(s_2, x_2) = 600 > 0$$

x_2 的值是最小期望值,如果它是可行解($240 \leq x_2 \leq 255$)。考察所有 s_2 的范围($220 \leq s_2 \leq 255$),这个解实际上仅仅在 $240 \leq s_2 \leq 255$ 时是可行的。

因而,我们仍然需要解出当 $220 \leq s_2 < 240$ 时,使 $f_2(s_2, x_2)$ 最小的 x_2 的可行值。再次分析在 x_2 可行域内 $f_2(s_2, x_2)$ 的行为的关键是求 $f_2(s_2, x_2)$ 的偏导数。当 $s_2 < 240$ 时

$$\frac{\partial}{\partial x_2} f_2(s_2, x_2) > 0, \quad \text{对 } 240 \leq x_2 \leq 255$$

于是 $x_2 = 240$ 是最小期望值。

下一步是将 x_2 的这些值分别代入 $s_2 \geq 240$ 时和 $s_2 < 240$ 时的 $f_2(s_2, x_2)$, 来得出 $f_2^*(s_2)$ 的值。得出

$n=2:$	s_2	$f_2^*(s_2)$	x_2^*
	$220 \leq s_2 \leq 240$	$200(240 - s_2)^2 + 115\,000$	240
	$240 \leq s_2 \leq 255$	$\frac{200}{9}[(240 - s_2)^2 + (255 - s_2)^2 + (270 - s_2)^2] + 2\,000(s_2 - 195)$	$\frac{2s_2 + 240}{3}$

阶段 1: 对于第一阶段问题 ($n=1$)

$$f_1(s_1, x_1) = 200(x_1 - s_1)^2 + 2\,000(x_1 - r_1) + f_2^*(x_1)$$

因为 $r_1 = 220$, x_1 的可行域是 $220 \leq x_1 \leq 255$ 。 $f_2^*(x_1)$ 的表达式在 $220 \leq x_1 \leq 240$ 和 $240 \leq x_1 \leq 255$ 两个区间里会有所不同。因此

如果 $220 \leq x_1 \leq 240$

$$f_1(s_1, x_1) = 200(x_1 - s_1)^2 + 2\,000(x_1 - 220) + 200(240 - x_1)^2 + 115\,000$$

当 $240 \leq x_1 \leq 255$ 时

$$f_1(s_1, x_1) = 200(x_1 - s_1)^2 + 2\,000(x_1 - 220) + \frac{200}{9}[(240 - x_1)^2 + (255 - x_1)^2 + (270 - x_1)^2] + 2\,000(x_1 - 195)$$

考虑第一种情况, 当 $220 \leq x_1 \leq 240$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(s_1, x_1) &= 400(x_1 - s_1) + 2\,000 - 400(240 - x_1) \\ &= 400(2x_1 - s_1 - 235) \end{aligned}$$

已知 $s_1 = 255$ (春季), 于是

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f_1(s_1, x_1) = 800(x_1 - 245) < 0$$

对所有 $x_1 \leq 240$, 在区间 $220 \leq x_1 \leq 240$ 里, $x_1 = 240$ 是 $f_1(s_1, x_1)$ 的最小值。

当 $240 \leq x_1 \leq 255$ 时

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(s_1, x_1) &= 400(x_1 - s_1) + 2\,000 \\ &\quad - \frac{400}{9}[(240 - x_1) + (255 - x_1) + (270 - x_1)] + 2\,000 \\ &= \frac{400}{3}(4x_1 - 3s_1 - 225) \end{aligned}$$

因为

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f_1(s_1, x_1) > 0 \quad \text{对于所有 } x_1$$

令

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f_1(s_1, x_1) = 0$$

得出

$$x_1 = \frac{3s_1 + 225}{4}$$

因为 $s_1 = 255$, 它得出了在区间 $240 \leq x_1 \leq 255$ 中当 $x_1 = 247.5$ 时, $f_1(s_1, x_1)$ 最小。

注意这个区间 ($240 \leq x_1 \leq 255$) 包括 $x_1 = 240$, 所以 $f_1(s_1, 240) > f_1(s_1, 247.5)$ 。在倒数第二段, 我们在可行域 ($220 \leq x_1 \leq 240$) 里发现当 $x_1 = 240$ 时, $f_1(s_1, x_1)$ 最小。因此, 我们现在可以得出结论, 当 $x_1 = 247.5$ 时 $f_1(s_1, x_1)$ 最小。

我们最后的计算是在区间 $240 \leq x_1 \leq 255$ 里, 对于 $s_1 = 255$, 通过将 $x_1 = 247.5$ 代入表达式 $f_1(255, x_1)$ 找到 $f_1^*(s_1)$ 。因此

$$\begin{aligned} f_1^*(255) &= 200(247.5 - 255)^2 + 2000(247.5 - 220) \\ &\quad + \frac{200}{9}[2(250 - 247.5)^2 + (265 - 247.5)^2 + 30(742.5 - 575)] \\ &= 185\,000 \end{aligned}$$

这些结论概括为:

$n=1:$	s_1	$f_1^*(s_1)$	x_1^*
	255	185 000	247.5

因此, 通过分别追溯 $n=2, n=3$ 和 $n=4$ 的表格, 以及每次设 $s_n = x_{n-1}^*$, 产生的最优解是 $x_1^* = 247.5, x_2^* = 245, x_3^* = 247.5, x_4^* = 255$, 得到每周期的估计总成本为 185 000 美元。

为了阐述确定性动态规划, 我们给出一个需要不止一个变量的例子来描述每个阶段的状态。

例 5 Wyndor Glass 公司问题

考虑下面的线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 \leq 4 \\ & 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ \text{且} \quad & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(你可能知道这个 Wyndor Glass 公司问题的模型——3.1 节中已经介绍过) 解决这类小型线性(或非线性)规划问题的一种方法就是通过动态规划, 下面将对它进行阐述。

建模 这个问题需要制订两个相互关联的决策, 即活动 1 的水平, 用 x_1 表示; 活动 2 的水平, 用 x_2 表示。因此, 这两个活动可以被解释为一个动态规划模型的两个阶段。虽然它们可以采用任一顺序, 设阶段 $n =$ 活动 $n (n=1, 2)$ 。因此, x_n 是第 n 阶段的决策变量。

什么是状态? 换句话说, 给定在前面阶段已经做出的决策(如果有), 在第 n 阶段作出任何决策之前, 需要关于当前状态什么样的信息。它应该是约束条件中留下来的可用资源量。分别解释这些约束条件的右端(4, 12 和 18)作为资源 1、资源 2 和资源 3 可得到的

总数量(见 3.1 节中描述)。然后状态 s_n 可以被定义为

状态 $s_n =$ 分配剩余活动仍可使用的各种资源的数量

(注意状态的定义与工作分配问题的定义是相似的,包括例 2 和例 3,现在有三个要分配的资源,而不仅仅是一个)因此

$$s_n = (R_1, R_2, R_3)$$

其中, R_i 是剩余的要分配的资源 i ($i=1,2,3$) 的数量。因而

$$s_1 = (4, 12, 18),$$

$$s_2 = (4 - x_1, 12, 18 - 3x_1)$$

然而,当我们开始求解第 2 阶段的时候,我们还不知道 x_1 的值,所以在该点我们使用 $s_2 = (R_1, R_2, R_3)$ 。

因而,相对于前面的例子,这个问题在每一阶段有三个状态变量(例如,一个向量有三个元素)而不是一个。从理论的角度来说,这个差别并不是特别严重的。它只意味着,不是考虑一个状态变量的所有可能值,而是必须考虑几个状态变量的所有可能值的组合。然而,从计算效率的角度来看,这个差别往往是非常复杂的。总的来说,因为组合的数字可以同各自变量的可能值数量的乘积和一样大,所以当引进额外的状态变量时,需要计算的数字往往会迅速“变大”。这种现象有一个恰如其分的名称——**维度灾难**(curse of dimensionality)。

三个状态变量中每一个都是连续的。因而,与其分别考虑值的每个可能组合,不如使用例 4 中介绍的以系统状态函数的方法获得信息。

尽管有这些复杂性,这个问题也足够小以至它仍然可以不费很多困难就能解决。为了解决它,我们需要介绍通常的动态规划符号。因此

$f_2(R_1, R_2, R_3, x_2) =$ 如果系统开始于第 2 阶段状态 (R_1, R_2, R_3) 并且决策为 x_2 ,

活动 2 对 Z 的贡献

$$= 5x_2$$

$f_1(4, 12, 18, x_1) =$ 如果系统开始于第 1 阶段状态 $(4, 12, 18)$, 直接决策为 x_1 , 活动 1 和

活动 2 对 Z 的贡献, 然后制订第 2 阶段的最优决策

$$= 3x_1 + \max_{\substack{2x_2 \leq 12 \\ 2x_2 \leq 18 - 3x_1 \\ x_2 \geq 0}} \{5x_2\}$$

类似的,对于 $n=1, 2$

$$f_n^*(R_1, R_2, R_3) = \max_{x_n} f_n(R_1, R_2, R_3, x_n)$$

其中这个最大值是在 x_n 的可行值范围内的。因此,使用问题的相关约束部分可由下列三式给出:

$$(1) f_2^*(R_1, R_2, R_3) = \max_{\substack{2x_2 \leq R_2 \\ 2x_2 \leq R_3 \\ x_2 \geq 0}} \{5x_2\}$$

$$(2) f_1(4, 12, 18, x_1) = 3x_1 + f_2^*(4 - x_1, 12, 18 - 3x_1)$$

$$(3) f_1^*(4, 12, 18) = \max_{\substack{x_1 \leq 4 \\ 3x_1 \leq 18 \\ x_1 \geq 0}} \{3x_1 + f_2^*(4-x_1, 12, 18-3x_1)\}$$

方程(1)将用于求解第2阶段的问题。方程(2)说明了对于整个问题的基本动态规划结构,如图10.10所示。方程(3)给出了 f_1^* 和 f_2^* 之间的递推关系,它将被用来解决第1阶段问题。

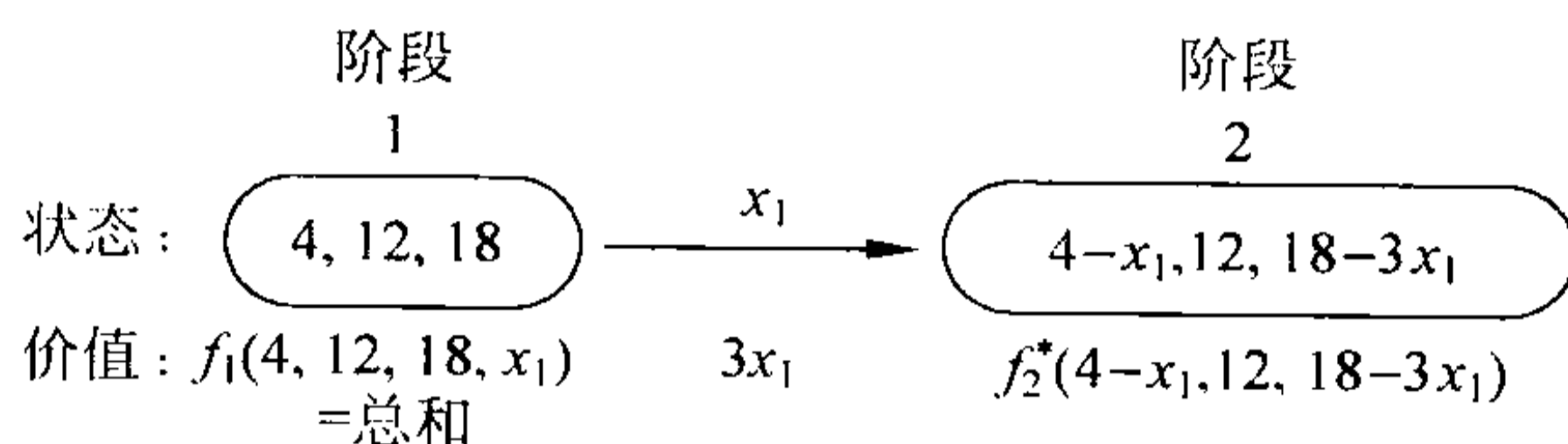


图 10.10 Wyndor Glass 公司线性规划问题的基本结构图

求解过程 阶段2: 为了求解最后阶段($n=2$), 等式(1)表明 x_2^* 必须是 x_2 的最大值, 同时满足 $2x_2 \leq R_2$ 、 $2x_2 \leq R_3$ 和 $x_2 \geq 0$ 。假设 $R_2 \geq 0$ 和 $R_3 \geq 0$, 所以存在可行解, 这个最大值就是 $R_2/2$ 和 $R_3/2$ 中较小的一个。这样, 解为

$n=2:$	(R_1, R_2, R_3)	$f_2^*(R_1, R_2, R_3)$	x_2^*
	$R_2 \geq 0, R_3 \geq 0$	$5 \min \left\{ \frac{R_2}{2}, \frac{R_3}{2} \right\}$	$\min \left\{ \frac{R_2}{2}, \frac{R_3}{2} \right\}$

阶段1: 为了求解两阶段问题($n=1$), 我们将把从 $f_2^*(R_1, R_2, R_3)$ 中求得的解代入等式(3)。对于阶段2

$$(R_1, R_2, R_3) = (4 - x_1, 12, 18 - 3x_1)$$

于是

$$f_2^*(4 - x_1, 12, 18 - 3x_1) = 5 \min \left\{ \frac{R_2}{2}, \frac{R_3}{2} \right\} = 5 \min \left\{ \frac{12}{2}, \frac{18 - 3x_1}{2} \right\}$$

是被代入等式(3)的特定解。我们结合了它对 x_i 的约束条件之后, 等式(3)就变成

$$f_1^*(4, 12, 18) = \max_{0 \leq x_1 \leq 4} \left\{ 3x_1 + 5 \min \left\{ \frac{12}{2}, \frac{18 - 3x_1}{2} \right\} \right\}$$

在可行域 $0 \leq x_1 \leq 4$ 里, 有

$$\min \left\{ \frac{12}{2}, \frac{18 - 3x_1}{2} \right\} = \begin{cases} 6 & \text{当 } 0 \leq x_1 \leq 2 \\ 9 - \frac{3}{2}x_1 & \text{当 } 2 \leq x_1 \leq 4 \end{cases}$$

于是

$$3x_1 + 5 \min \left\{ \frac{12}{2}, \frac{18 - 3x_1}{2} \right\} = \begin{cases} 3x_1 + 30 & \text{当 } 0 \leq x_1 \leq 2 \\ 45 - \frac{9}{2}x_1 & \text{当 } 2 \leq x_1 \leq 4 \end{cases}$$

因为

$$\max_{0 \leq x_1 \leq 2} \{3x_1 + 30\} \quad \text{和} \quad \max_{2 \leq x_1 \leq 4} \left\{ 45 - \frac{9}{2}x_1 \right\}$$

在 $x_1=2$ 时得到它们的最大值, 得出 $x_1^*=2$ 和最大值为 36, 如下表所示。

$n=1:$	(R_1, R_2, R_3)	$f_1^*(R_1, R_2, R_3)$	x_1^*
	(4, 12, 18)	36	2

因为 $x_1^*=2$, 得出

$$R_1 = 4 - 2 = 2, \quad R_2 = 12, \quad R_3 = 18 - 3(2) = 12$$

对于第 2 阶段, $n=2$ 表中得出 $x_2^*=6$ 。因此, $x_1^*=2, x_2^*=6$ 是这个问题的最优解(正如最初在第 3.1 节中找到的), 并且 $n=1$ 时表中指出产生的 Z 值为 36。

现在你已经看到并在下一节中将继续看到动态规划的各类不同应用。但是这些例子仅仅接触到表面。例如在第 2 章参考文献 4 中描述了动态规划可应用的 47 种问题形式(这篇文章还提供了可用于求解这类问题的软件工具)。所有这些动态规划应用的共同主题为需要制订一系列各自相关的决策和一个由动态规划提供用于寻找最优决策组合的有效方法。



10.4 随机性动态规划

随机性动态规划不同于确定性动态规划, 它在下一阶段的状态是不完全由当前阶段的状态和决策策略决定的, 而是对于下一状态将会有有一个概率分布。然而, 这个概率分布仍然完全由当前阶段的状态及决策策略决定。产生的随机性动态规划的基本结构见图 10.11。

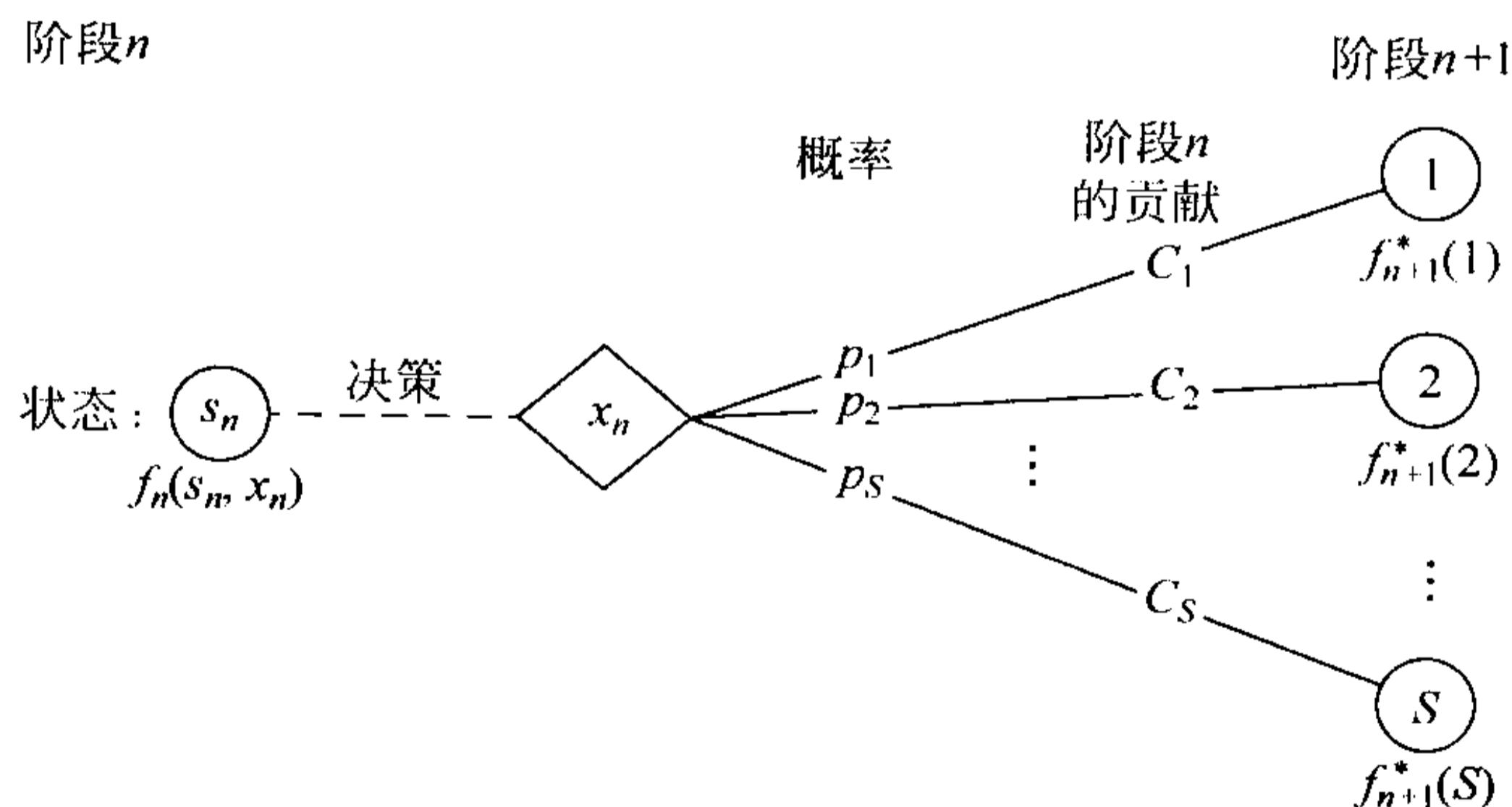


图 10.11 随机性动态规划的基本结构图

基于图 10.11, 我们设 S 为第 $n+1$ 阶段可能状态的数量, 在这些状态的右边标为 $1, 2, \dots, S$ 。系统以概率 P_i 进入状态 i ($i=1, 2, \dots, S$), 得出第 n 阶段的状态为 s_n , 决策为 x_n 。如果系统进入状态 i, C_i 是第 n 阶段目标函数的贡献。

当图 10.11 扩展至包括所有阶段的所有可能状态和决策时, 它有时被称为决策树 (decision tree)。如果决策树不是太大, 它就为总结各种可能性提供了一个有用的方法。

由于随机性结构, $f_n(s_n, x_n)$ 和 $f_{n+1}^*(s_{n+1})$ 之间的关系在某种程度上必然要比确定性动态规划更为复杂。这个关系的精确形式取决于整个目标函数的形式。

为了详细说明,假设目标是最小化各个阶段期望损益总额。在这种情况下, $f_n(s_n, x_n)$ 代表阶段 n 以前的最小期望总额,已知第 n 阶段的状态和决策策略分别为 s_n 和 x_n ,因此

$$f_n(s_n, x_n) = \sum_{i=1}^S p_i [C_i + f_{n+1}^*(i)]$$

有

$$f_{n+1}^*(i) = \min_{x_{n+1}} f_{n+1}(i, x_{n+1})$$

其中这个最小值取的是 x_{n+1} 的可行值范围。

例 6 有与此同样的形式。例 7 将阐述另一种形式。

例 6 确定次品限额

Hit-and-Miss 生产公司接受了一份特殊类型的产品供应订单。然而,客户要求的质量条件严格,所以生产商必须在多个周期内生产多个产品以产出合格的产品。生产周期内生产的额外产品数量被称为次品限额。在为客户订单组织生产时,列明次品的限额是很普通的事情,并且这样看起来是可取的。

生产商估计这种类型的每个产品的成品率为 $1/2$,同时次品率(没有可能重做)也为 $1/2$ 。这样,批量 L 生产的成品的数量为二项式分布,也就是说,生产次品的概率为 $(1/2)^L$ 。

每件产品的边际成本估计为每件 100 美元(即使不合格),超出的产品没有任何价值。另外,无论如何为这个产品设立生产过程,300 美元的固定成本是必然需要的,并且如果一个冗长的检查程序发现一个设备没有产出合格品,则要以同样的成本重新设立新的生产过程。由于时间有限,生产商只有三个生产周期的时间。如果经过三次生产周期仍未能生产出一件合格的产品,则不仅没有收入,而且会被罚款 1 600 美元。

目标是制订每个生产周期应制造几件产品(1+次品数量)的策略,使总的生产成本最小。

建模 这个问题的动态规划模型是

阶段 $n =$ 第 n 个生产周期($n = 1, 2, 3$)

$x_n =$ 阶段 n 的产品数量

状态 $s_n =$ 从阶段 n 开始的仍然需要的(1 或 0)成品数量

这样,在阶段 1,状态 $s_1 = 1$ 。如果后来至少得到一个成品,那么状态改变到 $s_n = 0$,在此之后不发生额外的成本。

因为该问题的目标是

$f_n(s_n, x_n) =$ 阶段 $n, \dots, 3$ 的全部期望成本,如果系统开始于第 n 阶段状态为 s_n ,直接决策为 x_n ,后面会做出最优决策

$$f_n^*(s_n) = \min_{x_n=0,1,\dots} f_n(s_n, x_n)$$

其中, $f_n^*(0) = 0$ 。以 100 美元作为单位,不考虑下一状态,第 n 阶段的成本贡献是 $[K(x_n) + x_n]$,其中 $K(x_n)$ 是 x_n 的函数,这样

$$K(x_n) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } x_n = 0 \\ 3, & \text{如果 } x_n > 0 \end{cases}$$

因而,对于 $s_n=1$

$$\begin{aligned} f_n(1, x_n) &= K(x_n) + x_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{x_n} f_{n+1}^*(1) + \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x_n}\right] f_{n+1}^*(0) \\ &= K(x_n) + x_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{x_n} f_{n+1}^*(1) \end{aligned}$$

[如果没有得到合格成品的最终成本, $f_4^*(1)$ 为 16] 图 10.12 概括了这些基本关系。因此,动态规划计算的递推关系是

$$f_n^*(1) = \min_{x_n=0,1,\dots} \left\{ K(x_n) + x_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{x_n} f_{n+1}^*(1) \right\} \quad (n=1,2,3)$$

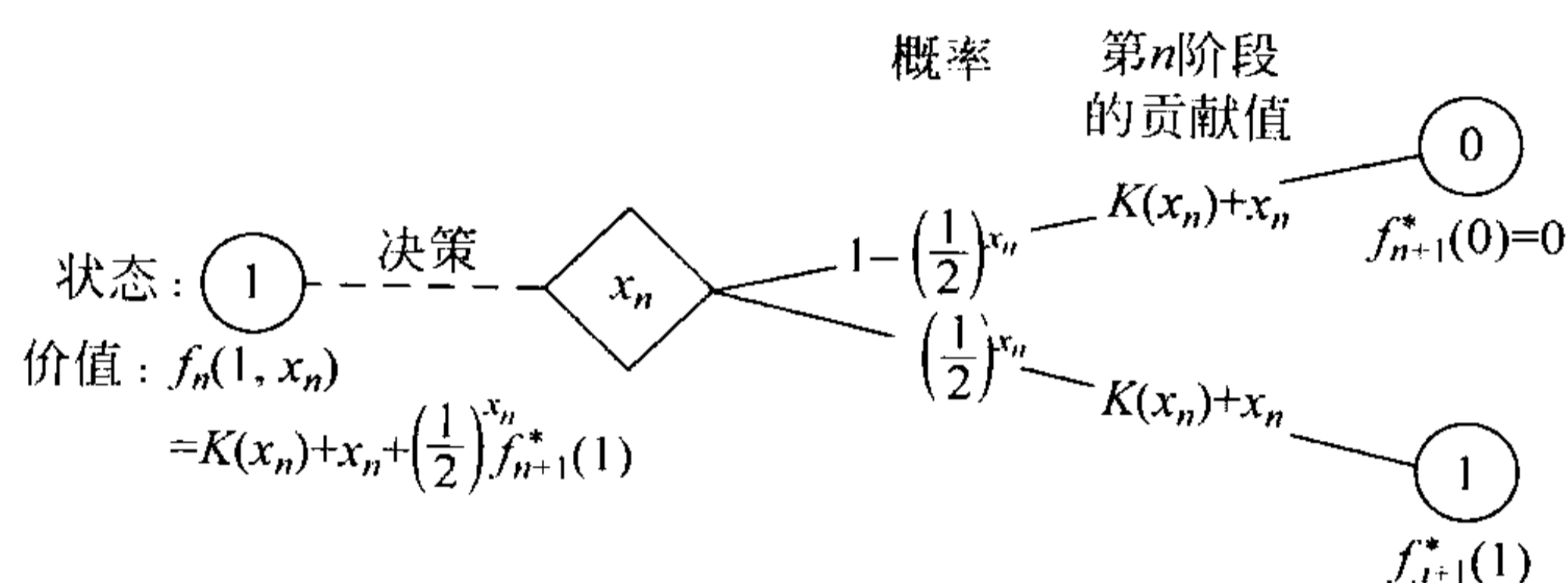


图 10.12 Hit-and-Miss 生产公司问题的基本结构图

求解过程 用这种递推关系计算,概括如下。

$n=3:$	s_3	x_3	$f_3(1, x_3) = K(x_3) + x_3 + 16 \left(\frac{1}{2}\right)^{x_3}$					$f_3^*(s_3)$	x_3^*	
			0	1	2	3	4			5
		0	1							
		0	16	12	9	8	8	$8 \frac{1}{2}$	0	0
		1						8		3 或 4

$n=2:$	s_2	x_2	$f_2(1, x_2) = K(x_2) + x_2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} f_3^*(1)$				$f_2^*(s_2)$	x_2^*	
			0	1	2	3			4
		0	1						
		0	8	8	7	7	$7 \frac{1}{2}$	0	0
		1					7		2 或 3

$n=1:$	s_1	x_1	$f_1(1, x_1) = K(x_1) + x_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} f_2^*(1)$				$f_1^*(s_1)$	x_1^*
			0	1	2	3		
		1	7	$7 \frac{1}{2}$	$6 \frac{3}{4}$	$6 \frac{7}{8}$	$7 \frac{7}{16}$	$6 \frac{3}{4}$

这样,最优策略是在第一个生产周期中生产 2 个产品;如果没有一个可被接受,那么在第二个生产周期中生产 2 个或 3 个产品;如果还是没有一个可被接受,那么在第三个生产周期中生产 3 个或 4 个产品。这个策略的总期望成本是 675 美元。

例7 在拉斯维加斯获胜

一位年轻的统计学家相信自己开发的一个系统可以在拉斯维加斯的一款常见赌博游戏中赢钱。她的同事们不相信,于是他们和她打了一个赌注很高的赌。打赌的条件是如果她以三个筹码开始,在三局之后,她不会剩余五个以上的筹码。每局可下注手上有的任意数量的筹码,然后要么赢得要么输掉同样数目的筹码。这位统计学家相信她的系统每一局都有 $2/3$ 的胜算。

假设统计学家是正确的,我们现在使用动态规划来决定这三盘每次赌多少个(如有)筹码的最优策略。每盘的决策应该考虑上一盘的结果。目标是使她赢得同事的可能性最大。

建模 这个问题的动态规划模型为

阶段 $n =$ 第 n 局 ($n = 1, 2, 3$)

$x_n =$ 第 n 局要下注的筹码数

状态 $s_n =$ 第 n 局下注前手中的筹码数

选择这个状态的定义,是因为它提供了所需要的关于当前状态的信息,以制订下一局应赌多少个筹码的最优策略。

因为目标是使统计学家赢得赌局的概率最大,每个阶段的目标函数必须是完成三局时手里至少有五个筹码的概率最大(注意以超过五个筹码结束的值与用五个筹码结束的值是相同的,任何一种结果都算打赌获胜)。因而, $f_n(s_n, x_n) =$ 有至少五个筹码的完成三局的概率。已知统计学家开始于阶段 n 状态 s_n , 制订即时决策 x_n , 并制订以后的最优策略

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n=0,1,\dots,s_n} f_n(s_n, x_n)$$

对于 $f_n(s_n, x_n)$ 的表达式必须反映即使统计学家会输掉下一局,最终仍然可能积累五个筹码的事实。如果她输了,下一阶段的状态就是 $s_n - x_n$, 完成时至少有五个筹码的概率就应该是 $f_{n+1}^*(s_n - x_n)$ 。然而如果她赢了下一局,状态就变成了 $s_n + x_n$, 相应的概率就是 $f_{n+1}^*(s_n + x_n)$ 。因为假设获胜的概率是 $2/3$, 那么它变为

$$f_n(s_n, x_n) = \frac{1}{3} f_{n+1}^*(s_n - x_n) + \frac{2}{3} f_{n+1}^*(s_n + x_n)$$

[其中当 $s_n < 5$ 时, $f_n^*(s_n)$ 为 0; 当 $s_n \geq 5$ 时, $f_n^*(s_n)$ 为 1]。这样,阶段 n 的目标函数就没有直接贡献,而是会在下一状态产生影响。图 10.13 概括了这些基本关系。

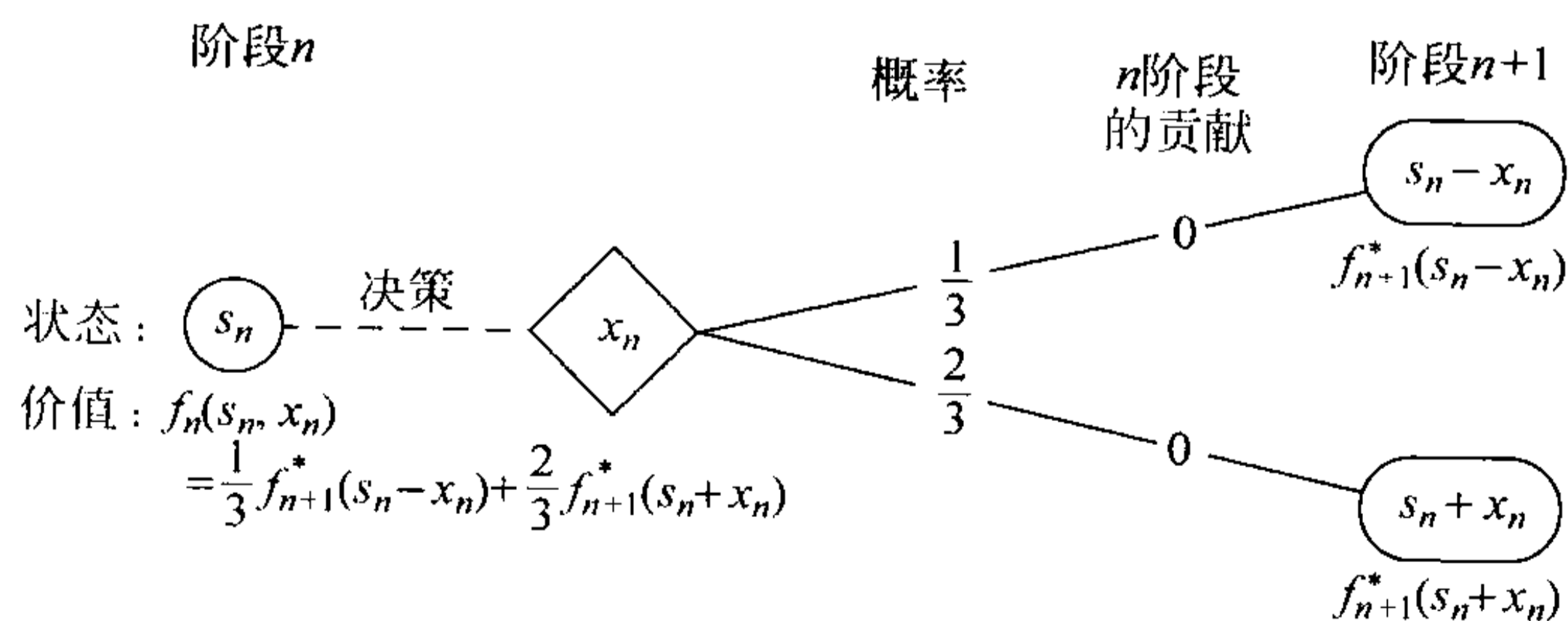


图 10.13 拉斯维加斯问题的基本结构图

因而,这个问题的递推关系就是

$$f_n^*(s_n) = \max_{x_n=0,1,\dots,s_n} \left\{ \frac{1}{3} f_{n+1}^*(s_n - x_n) + \frac{2}{3} f_{n+1}^*(s_n + x_n) \right\}$$

对 $n=1,2,3, f_4^*(s_4)$ 就是刚刚定义的。

求解过程 利用递推关系, 得出如下计算结果。

$n=3:$	s_3	$f_3^*(s_3)$	x_3^*
	0	0	—
	1	0	—
	2	0	—
	3	$\frac{2}{3}$	2(或更多)
	4	$\frac{2}{3}$	1(或更多)
	≥ 5	1	0(或 $\leq s_3 - 5$)

$n=2:$	s_2	$f_2(s_2, x_2) = \frac{1}{3} f_3^*(s_2 - x_2) + \frac{2}{3} f_3^*(s_2 + x_2)$					$f_2^*(s_2)$	x_2^*
		0	1	2	3	4		
	0	0					0	—
	1	0	0				0	—
	2	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$			$\frac{4}{9}$	1 或 2
	3	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$	0, 2 或 3
	4	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$	1
	≥ 5	1					1	0(或 $\leq s_2 - 5$)

$n=1:$	s_1	$f_1(s_1, x_1) = \frac{1}{3} f_2^*(s_1 - x_1) + \frac{2}{3} f_2^*(s_1 + x_1)$				$f_1^*(s_1)$	x_1^*
		0	1	2	3		
	3	$\frac{2}{3}$	$\frac{20}{27}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{20}{27}$	1

因而, 最优策略是

$$x_1^* = 1 \begin{cases} \text{如果赢, } x_2^* = 1 \begin{cases} \text{如果赢, } x_3^* = 0 \\ \text{如果输, } x_3^* = 2 \text{ 或 } 3 \end{cases} \\ \text{如果输, } x_2^* = 1 \text{ 或 } 2 \begin{cases} \text{如果赢, } x_3^* = \begin{cases} 2 \text{ 或 } 3 & (\text{对 } x_2^* = 1) \\ 1, 2, 3 \text{ 或 } 4 & (\text{对 } x_2^* = 2) \end{cases} \\ \text{如果输, 输掉赌局} \end{cases} \end{cases}$$

这个策略给出了统计学家赢得同事的概率是 $20/27$ 。



10.5 结论

动态规划对于制订相互关联的序列决策是非常有用的技术。它要求对于每个问题建立一个合适的递推关系的公式。但是,它用详细统计找到决策的最优组合,在计算上提供了巨大的节省。例如,如果问题有 10 个阶段、10 个状态,这样每个阶段有 10 个可能策略,穷举法必须考虑到 100 亿的组合,而动态规划则仅需要不超过 1 000 次的计算(每阶段的状态为 10)。

本章仅考虑了有限数量阶段的动态规划。

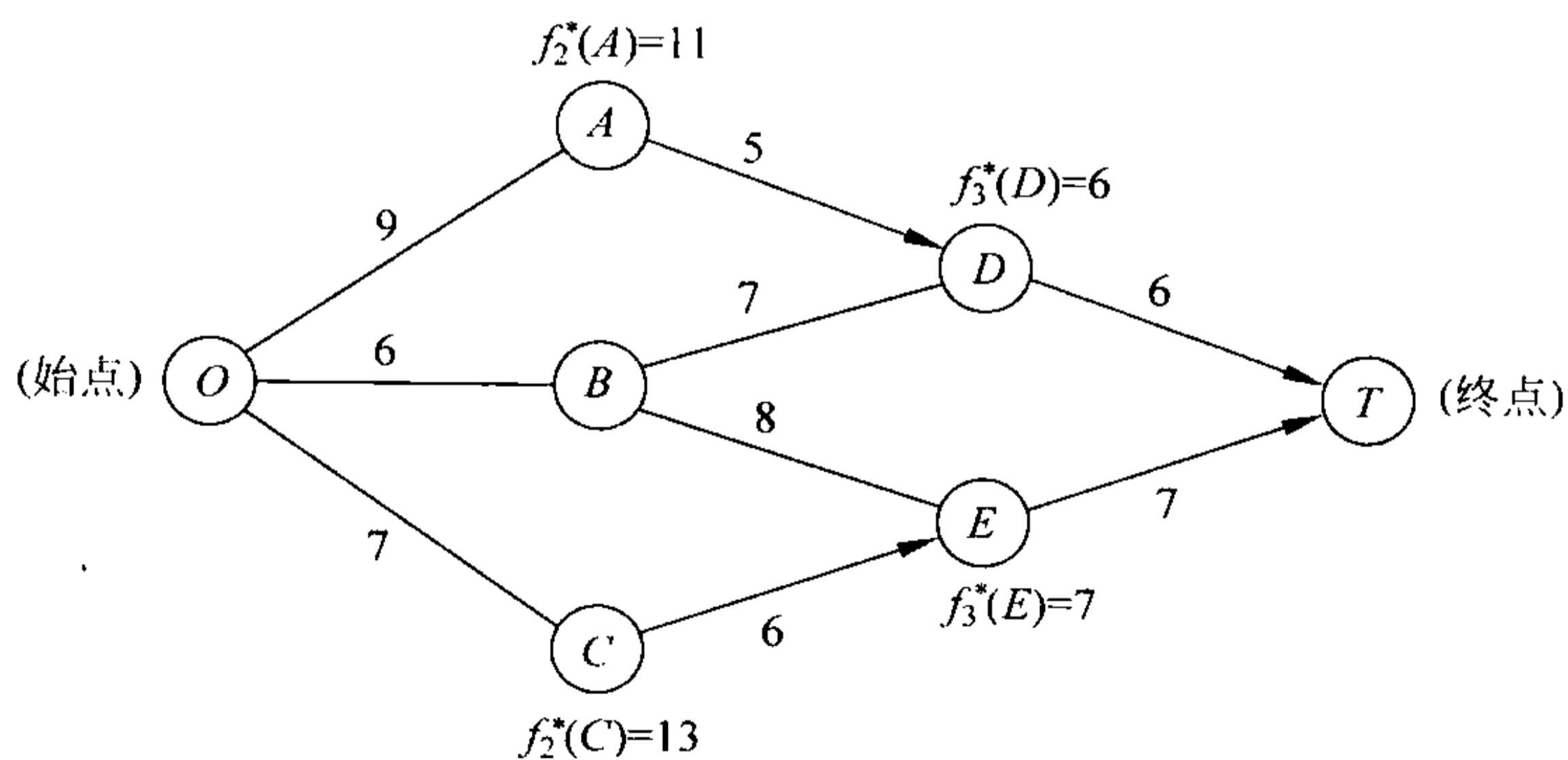
参考文献

1. Bertsekas, D. P.: *Dynamic Programming: Deterministic and Stochastic Models*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.
2. Denardo, E. V.: *Dynamic Programming Theory and Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1982.
3. Howard, R. A.: "Dynamic Programming," *Management Science*, **12**: 317-345, 1966.
4. Lew, A., and H. Mauch: *Dynamic Programming: A Computational Tool*, Springer, New York, 2007.
5. Smith, D. K.: *Dynamic Programming: A Practical Introduction*, Ellis Horwood, London, 1991.
6. Sniedovich, M.: *Dynamic Programming*, Marcel Dekker, New York, 1991.

习题

习题序号上附有一个星号表示书后至少给出该题的一部分答案。

10.2-1 考虑下面的网络图,其中沿线的每个数字代表了通过线段连接的两个节点之间的距离。目标是找出从始点到终点的最短路径。



- (a) 对于这个问题的动态规划模型,阶段和状态是什么?
- (b) 运用动态规划解决这个问题。然而,不是使用常用的表格,而是用图解法表示你的工作(类似图 10.2)。特别的是,从已知的网络开始,其中对于四个节点的 $f_n^*(s_n)$ 的答案已经给出;然后求解并填出 $f_2^*(B)$ 和 $f_1^*(O)$ 。用箭头表明穿过每

- 两个点的最优路线。最后,用箭头指出从节点 O 到节点 T 的最优路线。
- (c) 通过手工建立常用的 $n=3$ 、 $n=2$ 和 $n=1$ 的表格,并运用动态规划求解这个问题。
- (d) 使用 9.3 节提出的最短路径算法来解决这个问题,并比较这个方法与(b)和(c)中的方法。

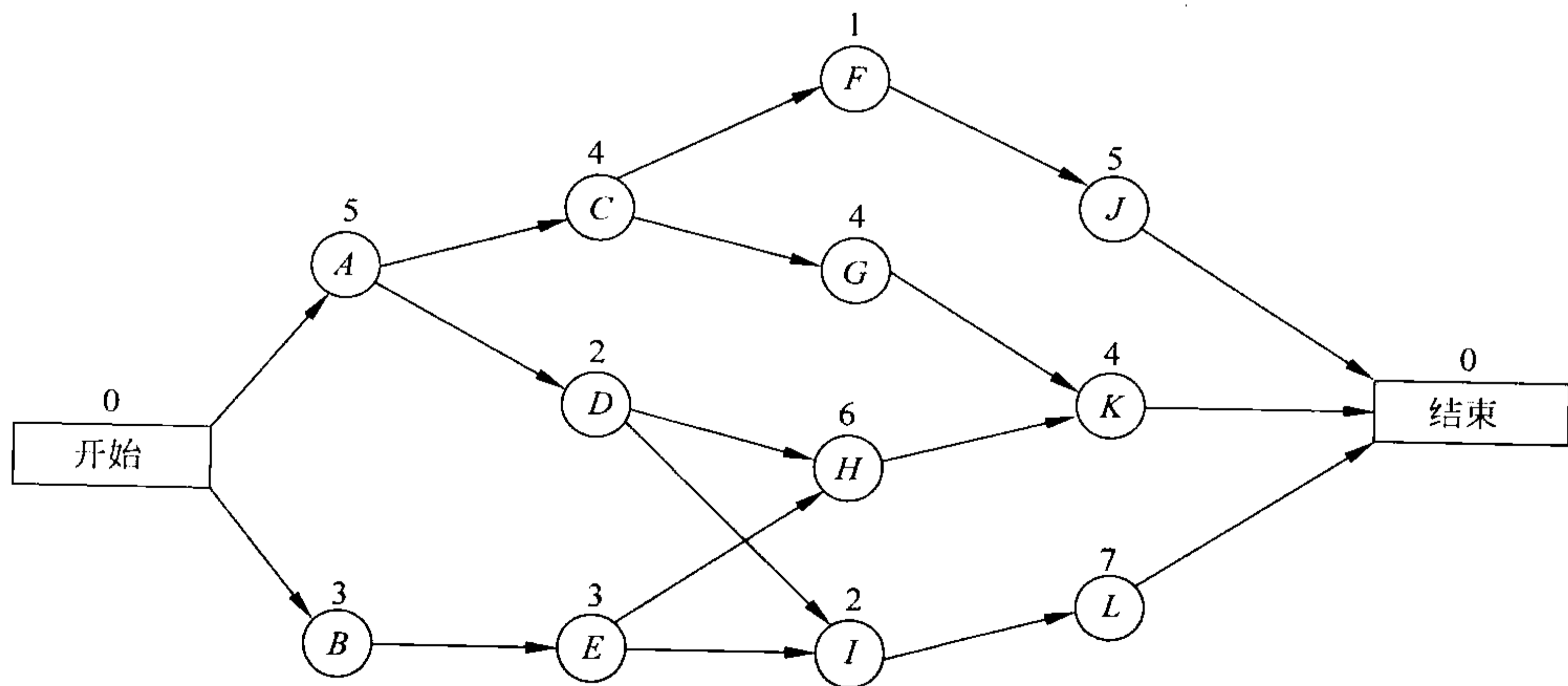
10.2-2 某大学教材出版社的销售经理有 6 名旅行推销员,他分配他们到全国三个不同的区域。他已经决定每个区域应派至少一名推销员,并且每名推销员只能严格属于这个区域。现在他需要决定为了使销售量最大,应该分配多少个推销员到这些区域。

下表给出了针对各区被分到的不同推销员的数目,各区销售量(用适合的单位)的估计增长值。

销售人员	地 区		
	1	2	3
1	40	24	32
2	54	47	46
3	78	63	70
4	99	78	84

- (a) 利用动态规划解决这个问题。不要使用通常的表格,而是通过建立和填写像习题 10.2-1 那样的网络用图解法表示你的工作:通过求出每个节点(除了终点)的 $f_n^*(s_n)$,并写出节点的值来进行,画箭头表示最优路线上的每个节点。最后,通过网络图指出产生的最优路径和相应的最优解。
- (b) 通过建立常用的 $n=3$ 、 $n=2$ 和 $n=1$ 的表格,运用动态规划来求解这个问题。

10.2-3 考虑下面的工程网络(如 9.8 节所述),其中每点上面的数字是相应活动需要的时间。由于最长路径是关键路径,所以这个问题是找到这个网络从开始到结束的最长路径(最大全部时间)。



- (a) 对于这个问题的动态规划模型,阶段和状态是什么?
- (b) 运用动态规划方法解决这个问题。不要使用通常的表格,而是使用图解法解决你的问题。特别的是,在相应的节点下,填上各个 $f_n^*(s_n)$ 的不同值,并通过在弧开始的附近画箭头指出所产生的穿过每个点的最优弧。然后跟随从始点到终点的这些箭头指出最优路径(最长路径)。如果有不止一条最优路径,指出全部最优路径。
- (c) 通过建立通常的 $n=4, n=3, n=2$ 和 $n=1$ 的表格,并运用动态规划求解这个问题。

10.2-4 考虑下面关于求解动态规划问题的陈述。给每个陈述标上对错,然后通过参考本章中相关的陈述(标上引用页码)来证明你的答案。

- (a) 求解过程使用递推关系,即在已知阶段 n 的最优策略时,能够解出第 $(n+1)$ 阶段的最优策略。
- (b) 在完成求解过程后,如果在某一阶段错误地做出非最优策略,那么求解过程就需要对后来的阶段重新应用以确定新的最优策略(已知这个不是最优策略)。
- (c) 一旦找到整个问题的最优策略,那么需要说明一个特定阶段的最优策略的信息就是该阶段的状态和前面阶段制订的策略。

10.3-1 阅读在 10.3 节应用短文中简要描述并在其参考文献中详述的文章。简述动态规划在这项研究中是如何应用的,然后列出由这项研究带来的所有财务与非财务效益。

10.3-2* 一位水果店的店主有三个连锁店,他买了 5 箱新鲜草莓。在草莓腐烂之前它的潜在销售能力在三家店的概率分布都不一样。因此,店主想要知道应如何将 5 箱草莓分到三家店,使期望利润最大。

由于管理原因,店主不希望在各店之间将草莓拆箱。然而,他又不愿意不分配给他的任何一家店。

下表给出了当他分配给每家连锁店不同箱的草莓时,该店的估计期望利润。

利用动态规划决定 5 箱草莓中的几箱应该分别分配给三家店中的每个店,使全部期望利润最大。

箱数	零 售 店		
	1	2	3
0	0	0	0
1	5	6	4
2	9	11	9
3	14	15	13
4	17	19	18
5	21	22	20

10.3-3 一名大学生在开始四门课程的期末考试之前还有 7 天时间复习,她想尽可能有效地分配学习时间。每门课程至少需要 1 天,她喜欢一天仅集中复习一门课,所以她想分配给每门课分别是 1 天、2 天、3 天或 4 天。由于最近学习了运筹学课程,她决定利用动态规划来制订这些分配,以使从四门课程中得到总的提高的分数最大。她估

计对每门课程的可选分配会得出下表中所显示的提高的分数。

学习天数	估计提高的分数			
	课 程			
	1	2	3	4
1	1	5	4	4
2	3	6	6	4
3	6	8	7	5
4	8	8	9	8

试用动态规划来解决这个问题。

10.3-4 一项政治竞选正进入最后阶段,投票表明这是一场势均力敌的选举。其中一名候选人还有足够的资金用来购买电视时间,总共是四个不同地区电视台的5个黄金商业时段。基于选举信息,估计能够在不同播放地区赢得额外选票的数量取决于商业时段的数目。下面的表格给出了这些估计,以千张选票为单位。

商业时段	地 区			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	4	6	5	3
2	7	8	9	7
3	9	10	11	12
4	12	11	10	14
5	15	12	9	16

利用动态规划决定为了使估计赢得的选票数量最大,如何在四个区域中分配这五个商业时段。

10.3-5 某一政党的县主席正在制订即将到来的总统竞选计划。为了选区工作,她已经接收了六名志愿者的服务,并且她想要把他们以某种方式分配到四个选区,以获得最大的效率。她认为分配一名志愿者去一个以上的地方将是效率低下的,但是如果他们在某个选区可以完成得更好,那么她不愿意分配志愿者去其他选区。

下表给出了如果每个选区被分配了不同数量的志愿者,对于政党候选人来说,可能增长的选票数量。

志愿者	选 区			
	1	2	3	4
0	0	0	0	0
1	4	7	5	6
2	9	11	10	11
3	15	16	15	14
4	18	18	18	16
5	22	20	21	17
6	24	21	22	18

六名志愿者应如何分配到四个选区中,使政党候选人选票的全部增长最大这个问题有多少个最优解?利用动态规划找到所有办法,以便主席可以基于其他因素做出最后的选择。

10.3-6 使用动态规划求解 8.1 节中提出的北方航空公司生产计划问题(见表 8.7),假设生产数量必须为 5 的整数倍数。

10.3-7* 一个公司将很快向充满竞争的市场推出新产品,并且目前正在计划她的营销策略。所做的决策将以三个阶段推出产品。第 1 阶段将是用一个非常低的价格为顾客提供某种介绍性的产品,以吸引首次购买的顾客。第二阶段将包括强烈的广告攻势,以劝说首次购买产品的顾客继续按正常价格购买产品。据了解,大约在第二阶段将要结束时,另一家公司将推出一种新的竞争产品。因而,第三阶段将有后续的广告和促销活动,以确保常年购买者不会转向竞争产品。

这个市场营销战大约有 400 万美元的预算。现在的问题是要决定如何最有效地将这笔资金分配给这三个阶段。用 m 代表最初达到第一阶段的市场份额(用百分比表示),第二阶段保留的市场份额部分为 f_2 ,第三阶段保留的市场份额部分为 f_3 。用动态规划决定如何分配 400 万美元使新产品的最终市场份额最大,即 $\max m f_2 f_3$ 。

(a) 假设这些钱必须以 100 万美元的整数倍花在每个阶段,其中对于第一阶段最小允许倍数为 1,第二、第三阶段为 0。下表给出了每个阶段花费的估计影响。

花费/百万美元	对市场份额的影响		
	m	f_2	f_3
0	—	0.2	0.3
1	20	0.4	0.5
2	30	0.5	0.6
3	40	0.6	0.7
4	50	—	—

(b) 现在假设全部预算内的任何资金都可以花在每一阶段,其中在阶段 i ($i=1,2,3$) 花费数量为 x_i 的资金(单位以百万美元计)的估计影响是:

$$m = 10x_1 - x_1^2$$

$$f_2 = 0.40 + 0.10x_2$$

$$f_3 = 0.60 + 0.07x_3$$

[提示:分析求解出 $f_2^*(s)$ 和 $f_3^*(s)$ 的函数之后,用图形法解出 x_1^*]

10.3-8 考虑一个电子系统由四个部分组成,每个部分都必须为系统运行工作。该系统的可靠性可以通过在一个或更多部件中安装几个并行单元来提高。下表给出了由 1 个、2 个或 3 个并行单元组成时,每个部分运行的概率。

并行单元数量	系统运行的概率			
	部件 1	部件 2	部件 3	部件 4
1	0.5	0.6	0.7	0.5
2	0.6	0.7	0.8	0.7
3	0.8	0.8	0.9	0.9

系统运行的概率是各部分运行的概率的积。

下表给出了每一部件分别安装 1 个、2 个或 3 个并行单元的成本(以 100 美元为单位)。

并行单元数量	成 本			
	部件 1	部件 2	部件 3	部件 4
1	1	2	1	2
2	2	4	3	3
3	3	5	4	4

由于预算的限制,最多可以花费 1 000 美元。

使用动态规划决定应该有多少个并行单元被安装在 4 个部件中的每一个,使系统可靠运行的概率最大。

10.3-9 考虑下列非线性整数规划问题:

$$\max \quad Z = 3x_1^2 - x_1^3 + 5x_2^2 - x_2^3$$

$$\text{s. t.} \quad x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$\text{且} \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

x_1, x_2 为整数。

使用动态规划求解这个问题。

10.3-10 考虑下列非线性整数规划问题:

$$\max \quad Z = 32x_1 - 2x_1^2 + 30x_2 + 20x_3$$

$$\text{s. t.} \quad 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 \leq 20$$

且 x_1, x_2, x_3 为非负整数。

使用动态规划求解这个问题。

10.3-11* 考虑下列非线性规划问题:

$$\max \quad Z = 36x_1 + 9x_1^2 - 6x_1^3 + 36x_2 - 3x_2^3$$

$$\text{s. t.} \quad x_1 + x_2 \leq 3$$

$$\text{且} \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

使用动态规划求解这个问题。

10.3-12 当从一季到下一季改变雇用水平的全部成本变为 100 美元乘以雇用水平的差

的平方时,重新求解地方加工车间(例4)的雇用水平计划问题。

10.3-13 考虑下列非线性规划问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 2x_1^2 + 2x_2 + 4x_3 - x_3^2 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

使用动态规划求解这个问题。

10.3-14 考虑下列非线性规划问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = x_1^4 + 2x_2^2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1^2 + x_2^2 \geq 2 \end{aligned}$$

(没有非负的限制)使用动态规划求解这个问题。

10.3-15 考虑下列非线性规划问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = x_1^3 + 4x_2^2 + 16x_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 x_2 x_3 = 4 \\ & \text{且 } x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, x_3 \geq 1 \end{aligned}$$

(a) 当增加一个约束条件,所有三个变量都被要求为整数时,求解这个动态规划问题。

(b) 根据题目给出的条件(连续变量),求解这个动态规划问题。

10.3-16 考虑下列非线性规划问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = x_1(1-x_2)x_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 - x_2 + x_3 \leq 1 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

使用动态规划求解这个问题。

10.3-17 考虑下列非线性规划问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 15x_1 + 10x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 6 \quad 3x_1 + x_2 \leq 8 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

使用动态规划求解这个问题。

10.3-18 考虑下面的固定支出问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 3x_1 + 7x_2 + 6f(x_3) \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 6 \quad x_1 + x_2 \leq 5 \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

其中

$$f(x_3) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } x_3 = 0 \\ -1 + x_3 & \text{如果 } x_3 > 0 \end{cases}$$

使用动态规划求解这个问题。

10.4-1 一个西洋双陆棋棋手在今晚和朋友有连续三场比赛。每次比赛,他都有机会获得一个他会赢的公平赌局。投注金额可以是0到上场比赛打赌后他手中剩下的金额之间的任何数量。对于每场比赛,他赢得比赛的概率是 $1/2$,并且也赢得了投注金额,然而他输掉比赛的概率也是 $1/2$,同时他也输掉了投注金额。他以75美元开始比赛,他的目标是最终拥有100美元(因为这是友谊赛,他不想在结束比赛时超过100美元)。因此,他希望找到最优打赌策略(包括所有关系),使他三场比赛后正好赢得100美元的概率最大。使用动态规划求解这个问题。

10.4-2 设想你有5000美元可供投资,你也将有机会进行投资,在今后3年内每年开始选择两种投资的一种(A或B)。两种投资回收均不确定:对于投资A,年底你或者失去全部资金或者(概率较高)收回10000美元(5000美元的利润)。对于投资B,年底你或者收回你的5000美元或者10000美元(概率较低)。这些事件的概率如下表:

投资	收回金额/美元	概率
A	0	0.25
	20 000	0.75
B	10 000	0.9
	20 000	0.1

你被允许每年只能投资一次(最多),每次你只能投资5000美元(额外积累的资金被闲置下来)。

(a) 使用动态规划寻求投资策略,使3年后你拥有的期望金额达到最大。

(b) 使用动态规划寻求投资策略,使3年后你至少拥有10000美元的可能性最大。

10.4-3* 假设 Hit-and-Miss 生产公司问题(例6)的情况有一点变化。经过仔细分析,你现在估计,生产的每件成品的概率为 $2/3$,而不是 $1/2$,所以批量 L 生产次品的概率为 $(1/3)^L$ 。另外,现在只有足够运行两个生产周期的时间。使用动态规划确定这个问题的新的最优策略。

10.4-4 重新考虑例7。假设打赌改为如下:“从两个筹码开始,在经过5场比赛后,她不会有至少5个筹码。”通过参考上次的运算结果,进行额外的计算,为这位有魄力的年轻统计学家确定新的最优策略。

10.4-5 Profit & Gambit 公司有一款主打产品,由于销售下降最近一直在亏本。事实上,在本季度,销售将低于保本点400万个单位。因为每个单位的边际收入超过边际成本5美元,这相当于本季度损失了2000万美元。因而,管理层必须迅速采取行动扭转这种局面。目前正在考虑两种可以选择的行动。一种方法是立即放弃生产,停产将导致2000万美元的费用。另一种方法是采取强大的广告攻势增加产品的销售,然后仅仅当广告不够成功时放弃这个产品(成本2000万美元)。广告活动的初步计划已经形成并分析过了,它将延续至下三个季度(受提前取消的限制),三个季度

中的每一季度都将花费 3 000 万美元。预计第一季度销售额将增加大约 300 万个；第二季度将再增加 200 万个；第三季度会再增加 100 万个。然而，由于一些无法预期的市场变化，形势将有很大的不确定性，比如广告实际上会有什么影响；进一步分析表明，选择任一发展方向估计每个季度都会以 200 万个单位结束生产（为了量化这种不确定性，假设这三个季度销售量的额外增长分别是 100 万到 500 万、0 到 400 万和 -100 万到 300 万范围内有统一分布的独立的随机变量）。如果实际增幅太小，可停止广告活动，并在下两季度中的任何一季度末放弃该产品。

如果开始了强大的广告攻势并继续完成，估计后来一段时间里的销售量将继续与第三季度（去年）保持同一水平。因而，如果该季度销售量仍低于保本点，产品将被放弃。否则，估计后来的期望折扣利润是售出每个产品将超出第三季度保本点 40 美元。

使用动态规划确定最优策略，使期望利润最大。

整数规划

第 3 章描述了几个例子,你会发现线性规划能够被用来解决各种问题。然而,线性规划的可分割性假定限制了它的应用范围,即决策变量要求取非整数值(参见 3.3 节)。但在很多实际问题中,决策变量只有取整数值才有意义,如必须给一个任务分派整数的人、机器或车辆。如果一个问题与线性规划的不同之处仅在于要求变量取值为整数,那它就是一个**整数规划**(IP)问题(更复杂的名称是整数线性规划。形容词线性通常被省略掉,除非是与更高深的整数非线性规划问题对比,这超出了本书涉及的范围)。

整数规划的数学模型就是线性规划的数学模型(见 3.2 节)再加上一个变量必须取整数值的额外限制。只要求部分变量取整数值的(可分割性假定对其余变量仍然适用),称为**混合整数规划**(MIP)。为了加以区分,我们把要求全部变量取整数值的问题称为**纯整数规划**问题。

例如,在 3.1 节的 Wyndor Glass 公司问题中,如果两个决策变量 x_1 、 x_2 分别代表产品 1 和产品 2 的总产量,而不是生产率,那么该模型就是一个整数规划问题。因为两种产品(玻璃门和木框窗)都是不可分割的,所以必须考虑 x_1 、 x_2 的整数约束。

当变量不满足可分割性假定的时候,许多此类问题可以被作为线性规划直接扩展的整数规划来解决。然而,另一领域的应用显得尤为重要,即涉及是或否的决策问题。在这种决策中,只有两个可能的选择是或否。例如,我们是否应该实施一项准备就绪的工程?我们是否应该进行某项投资?我们是否应该在一个特定地点安置设备?

由于只有两种选择,我们只给决策变量取两个值 0 和 1,就能够表达这种决策。 x_j 代表第 j 个是或否的决策,有

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{如果决策 } j \text{ 为是} \\ 0 & \text{如果决策 } j \text{ 为否} \end{cases}$$

这种变量称为**二值变量**(或 0-1 变量),所以只包含二值变量的整数规划问题有时被称为**二值整数规划**(binary integer programming, BIP)问题(或 0-1 整数规划问题)。

11.1 节提出一个简单的典型二值整数规划问题,11.2 节考察了各种二值整数规划的应用。其他二值变量的一些模型将在 11.3 节中讨论,11.4 节提出了一系列建模的例子。

11.5 节至 11.8 节讨论了解决整数规划问题的方法,包括二值整数规划和混合整数规划问题。11.9 节介绍了一个令人激动的最新发展(约束规划),这将显著提高我们建模和求解整数规划模型的能力。



11.1 范例

加州制造公司正在考虑建一个新工厂来扩大公司规模。新工厂可能建在洛杉矶或旧金山,甚至可能在两座城市都建新工厂。该公司同时正在考虑建至多一个新仓库,但是新仓库的选址要视新工厂的厂址而定。表 11.1 的第四列是每种选择的净现值(考虑到资金时间价值的总收益),最右边一列给出了目前投资所需要的资金(已经包含在净现值中),可用的总资金为 1 000 万美元。目标是找到一种可行的选择组合,以使总净现值最大。

决策数	答案为是或否的问题	决策变量	总净现值	百万美元
				需要的资金
1	在洛杉矶建新工厂吗?	x_1	9	6
2	在旧金山建新工厂吗?	x_2	5	3
3	在洛杉矶建新仓库吗?	x_3	6	5
4	在旧金山建新仓库吗?	x_4	4	2

可用资本: 10

二值整数规划模型

这个问题非常简单,稍做调查就能很快得出结论(在两座城市都建新工厂,不建新仓库)。让我们用一个整数规划模型来说明。所有决策变量都是二值形式

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{如果决策 } j \text{ 为是} \\ 0 & \text{如果决策 } j \text{ 为否} \end{cases} \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

令

$$Z = \text{这些决策的总净现值}$$

如果投资建一个工厂或仓库(相应的决策变量取值为 1),则该投资的预期净现值由表 11.1 的第四列给出。如果没有投资(相应的决策变量取值为 0),净现值为 0。因此,以 100 万美元为单位

$$Z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

表 11.1 最右边一列说明用于工厂和仓库的投资金额不能超过 1 000 万美元,故仍然以 100 万美元为单位,该模型的一个约束条件是

$$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10$$

因为后两个决策是互斥的(公司至多新建一个仓库),我们需要以下约束条件

$$x_3 + x_4 \leq 1$$

另外,决策 3 和决策 4 是可能决策,因为它们分别要视决策 1 和决策 2 而定(只有当公司打算在某城市新建一个工厂时,公司才会考虑是否在那里建一个仓库),因此对于决

策 3 来说,我们要求若 $x_1=0$,则 $x_3=0$ 。这个对决策 3 的限制(当 $x_1=0$ 时)通过以下约束条件来实现

$$x_3 \leq x_1$$

类似的,若 $x_2=0$,则 $x_4=0$,可以由以下约束条件来实现

$$x_4 \leq x_2$$

因此,我们重写这两个约束条件,把所有变量都移到左边,完整的 0-1 整数规划模型是

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 \\ \text{s. t.} \quad & 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10 \\ & x_3 + x_4 \leq 1 \\ & -x_1 + x_3 \leq 0 \\ & -x_2 + x_4 \leq 0 \\ & x_j \leq 1 \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

并且

$$x_j \text{ 是整数, } j = 1, 2, 3, 4$$

该模型的最后三行可以等价转换为一个约束条件

$$x_j \text{ 是二值变量, } j = 1, 2, 3, 4$$

这个例子虽然简单,但是当主要变量为 0-1 变量时,它能典型地代表许多整数规划的实际应用。正如本例的第二对决策,一组是或否的决策经常构成一组**互斥的选择**(mutually exclusive alternatives),也就是在一组中只能有一个决策的结果为是。每一组需要一个约束条件,相应 0-1 变量的和必须等于 1(如果一组中刚好有一个决策的结果为是)或小于等于 1(如果一组中至多有一个决策的结果为是)。有时,是或否的决策是**可能决策**(contingent decisions),也就是依赖先前决策结果的后续决策。例如,如果只有当一个决策结果为是时,另一个决策才可能为是,那么我们就说后一个决策要视前一个决策而定。当可能决策涉及一个后续的行动时这种情况就发生了;如果前一个决策结果为否,那么可能决策就变得无足轻重甚至不可能了。最终得到的约束条件通常采用本例中第三与第四个约束条件的形式。

用于求解此类模型的软件

所有用于运筹学研究的软件包(Excel、LINGO/LINDO 和 MPL/CPLEX)都包括求解 0-1(纯或混合)整数规划模型的算法,也包括求解一般(纯或混合)整数规划模型的算法,此时变量必须是整数而不是 0-1 变量。而二值变量处理起来较一般整数变量更为容易,所以前者的算法能够解决问题的范围比后者大。

在使用 Excel Solver 时,处理过程与线性规划基本相同。当你为了增加约束条件,点击“Solver”对话框的“Add”按钮时,会出现一点不同。除了满足线性规划的约束条件之外,你还需要添加整数约束。在整数变量而不是 0-1 变量的情况下,这要在“Add

Constraint”对话框中完成,在左边选择整数变量的范围并且在弹出菜单中选择“int”。对于二值变量来说,在弹出菜单中选择“bin”。

本章的一个 Excel 文件给出了加州制造公司案例的完整的建模和结果的程序列表。

一个 LINGO 模型使用@BIN()函数来说明圆括号例的变量为 0-1 变量,对于一般整数变量(取整数值而不是 0-1 变量),@GIN()函数的使用方法与之相同。在两种方法中,函数都可以嵌入一个@FOR 声明,给整个变量组规定二值或整数约束。

在一个 LINDO 模型中,二值或整数约束是插在 END 声明后面的。输入 GIN X 是指定变量 X 为一般整数变量。另外,对于任何正整数 n ,声明 GIN n 指定前 n 个变量是一般整数变量。除了用 INTEGER 替换 GIN 之外,对 0-1 变量的处理方法是相同的。

对于一个 MPL 模型,关键词 INTEGER 用来指明一般整数变量,而 BINARY 用于 0-1 变量。在 MPL 模型的变量部分,你要做的只是在 VARIABLES 标签前加适当的形容词(整数或二值的)来指明标签下列表中的变量是哪种类型的。或者你可以不在变量部分给出指定,而是在模型部分在其他的约束后面加入二值或整数约束。使用这种方法时,变量组上的标签会变成 INTEGER 或 BINARY。

MPL 的主要版本 CPLEX 包括用于求解纯或混合整数规划或二值整数规划模型的最先进的算法。通过选择 Options 菜单下 CPLEX Parameters 对话框中的 MIP Strategy 标签,一个有经验的人能够从完成算法的众多选项中找到最适合特定问题的选项。

当你看到这些不同的软件包应用于例子时,上面的介绍就会变得更加清晰。运筹学课程软件中本章的 Excel、LINGO/LINDO 和 MPL/CPLEX 文件,说明了怎样将各个软件应用于本节介绍的范例,以及后面的整数规划的例子。

本章的后半部分将主要讨论整数规划算法,这些算法与软件包中所使用的算法类似。11.6 节将用本范例来演示纯二值整数规划算法的应用。



11.2 0-1 整数规划的应用

正如加州制造公司的例子,管理者经常要面对是或否的决策,因此二值整数规划(BIP)被广泛用于诸如此类的辅助决策。

我们现在要介绍不同类型的是或否的决策。我们也提到了一些实际应用的例子,在这些例子中,BIP 被用来处理这些决策问题。

《界面》(*Interfaces*)杂志对每个应用都做了详尽的描述。对每个案例,我们都将会提及该文章刊登在哪一年的第几期以便你进一步阅读。

投资分析

人们有时利用线性规划来完成资金预算决策,决定对不同的项目投资额各是多少。然而正如加州制造公司的例子,一些资金预算决策不是决定投资多少,而是是否进行一项固定金额的投资。尤其在该例中四个决策为是否投入固定的资金在一座城市(洛杉矶或旧金山)新建工厂或仓库。

管理层必须经常面对的决策是有关是否进行一项固定投资(需要投入的资金是已经

预先确定的)。我们是否应该收购正从另一家公司中分离出来的子公司? 我们是否应该买下某个原料来源? 我们是否应该引进一条新生产线自己生产某种原料, 而不是继续从供应商那里获得它?

总之, 关于固定投资的资金预算决策是一种是或否的决策, 其表达形式如下。

每个是或否的决策:

我们是否应该进行一项固定投资?

$$\text{它的决策变量} = \begin{cases} 1 & \text{是} \\ 0 & \text{否} \end{cases}$$

1990年7-8月期的《界面》描述了土耳其炼油公司利用BIP分析是否进行一项上千万美元的投资来加强炼油能力和节约能源。

1997年1-2月期的《界面》描写了一个不同的例子, 但在一定程度上也属于这类问题。南非国防部(South Africa National Defense Force)完成了一项重要的运筹学研究, 用更少的支出改善了它们的能力。这个案例中的“投资”是获得物的成本和正在发生的支出, 为了获得某种特定的军事能力, 这些投入都是必需的。它们建立了一个混合二值整数规划模型, 来选择那些能够使国防部整体效力最大化的特定能力, 同时满足了预算限制。这个模型的变量超过16 000个(包括256个0-1变量), 函数约束超过5 000个。国防部优化后的编制每年能节约11亿多美元和重要的非货币收益。该研究所产生的影响使它获得了1996年表彰管理科学成就的Franz Edelman奖的一等奖。

在一个有些相似的军事应用中, 美国空军太空司令部(United States Air Force Space Command)每年花费几十亿美元在获得和发展运载火箭和太空系统上。《界面》的2003年7-8月号描写了太空指挥部怎样运用整数规划来使那些超过24年的长期投资达到最优。

《界面》的1999年1-2月期提出了另一个获奖的用于投资分析的混合二值整数规划模型应用的案例。该模型被Grantham, Mayo, Van Otterloo公司用来定量地组合它所控制的资金, 资金额超过80亿美元。每次公司都组合其资产使之与目标组合相近(以部门和安全为依据), 但是该组合的股票数目要少得多而且更加容易控制。一个0-1变量用来表示某支股票是否应该包括在资产组合中, 而一个连续变量则代表组合中包含的股票数目。给出一个需要被平衡的现有投资组合, 是希望减少为了得到最终投资组合所需要的交易次数, 来降低交易成本。所以另一个0-1变量被引入模型, 代表是否完成改变持股票数目所进行的交易。使用该模型以后, 每年能使持有资本所带来的成本减少400万美元以上。

选址

在如今的全球经济中, 许多公司正在全世界各个地方建立新工厂, 为的是获得低劳动力成本等好处。在为新工厂选址之前, 需要分析和比较很多地点(在加州制造公司的例子中, 有两个可供选择的厂址)。每个可供选择的地点都涉及一个是或否的决策, 其表达形式如下。

每个是或否的决策:

是否应该选择某个地点来建新设施?

$$\text{它的决策变量} = \begin{cases} 1 & \text{是} \\ 0 & \text{否} \end{cases}$$

在许多案例中,目标是地点的选择以使新建设施的总成本最小化,这些新设施能满足生产的需要。

正如《界面》的 1990 年 1-2 月期所论述的,AT&T 利用一个 BIP 模型来帮助几十个客户选择电话促销中心的地址。该模型使劳动力、交通和实际土地成本最小化,同时提供了每个中心理想的覆盖面积。仅仅在一年中(1998),这个方法就使 AT&T 的 46 位客户迅速而放心地做出了对选址的是与否的决策,一年就产生了 3.75 亿美元的网络服务费用和 3 100 万美元 AT&T 设备的销售额。

下面我们将要讨论的一类问题对于许多公司都是很重要的,其中选址起到了关键性的作用。

设计生产和销售网络

如今,制造商们为了使产品更快地进入市场同时降低生产和销售成本,面临巨大的压力。因此,任何在大范围内(甚至全世界)销售产品的公司必须持续关注生产和销售网的设计。

这种设计包括下述类型的是或否的决策:

是否应该保持某工厂继续运营?

是否应该选择某地点开一家新工厂?

是否应该保持某销售中心继续营业?

是否应该选择某地点建一个新销售中心?

如果每个市场都仅由一个销售中心来提供服务,那么对于每个市场与销售中心的组合,我们产生了另一种是或否的决策。

是否应该指定某一销售中心为某一市场服务?

对于每个此类是或否的决策

$$\text{它的决策变量} = \begin{cases} 1 & \text{是} \\ 0 & \text{否} \end{cases}$$

Ault 食品有限公司(《界面》,1994 年 7-8 月期)就运用这种方法设计了它的生产和销售中心。管理层为选择了 10 个工厂地点、13 个销售中心地点,以及 48 个市场地点。BIP 的应用大获全胜,每年能为公司节省 200 000 美元。

数字设备公司(《界面》1995 年 1-2 月期)是运用这种方法得利的另一个例子。当时,这家跨国公司正在为 25 万客户站点提供服务,全年收入的 140 亿美元中有超过一半的收入来自美国以外的其他国家。因此,这项应用涉及对公司整个全球供应链的重组。这个全球供应链由它在世界各地的供应商、工厂、销售中心、潜在销售点和市场所组成。重组之后,每年在生产与后勤方面所降低的成本分别为 5 亿美元和 3 亿美元,同时所需资金也减少了 4 亿美元。

发送运输

生产和销售网络被设计好并投入运行后,关于如何送货的日常运营决策是必不可少的。某些此类决策同样属于是或否的决策。

举个例子来说,假设用卡车运送货物,每辆卡车在每一次行程中都将货物送给几个顾客,这时候就有必要为每一辆卡车选择一个路线(顾客的次序),故每个候选路线产生一个是否的决策。

是否应该为一辆卡车选择某一路线?

$$\text{它的决策变量} = \begin{cases} 1 & \text{是} \\ 0 & \text{否} \end{cases}$$

目标是选择路线使送达所有货物的总成本最小。

我们还要考虑到具体操作中的复杂性。比如,如果存在不同的卡车型号,每个备选方案既包括路线也包括相应卡车的型号。类似的,如果时间是一个因素,出发的时间段也可以被包含在是否的决策中。考虑到这两个因素,每个是否的决策有如下形式。

在一次送货过程中,是否应该同时考虑以下因素:

1. 一条路线;
2. 卡车的型号;
3. 出发的时间段。

$$\text{它的决策变量} = \begin{cases} 1 & \text{是} \\ 0 & \text{否} \end{cases}$$

例如,Sears、Roebuck 和 Company(《界面》1999年1-2月期)运用一种基于BIP的车辆-路线、日程系统和地理信息系统,来更加有效地调度送货与家庭服务人员,每年节约4200万美元。

安排相互联系的活动

每天我们都要安排互相关联的活动,甚至安排什么时候开始不同的家庭作业。所以管理者必须对相关活动进行安排。我们应该什么时候开始生产不同的新产品?我们应该什么时候开始为不同的新产品作市场推广?我们应该什么时候进行不同的投资来扩大生产能力?

对于每一项活动,对于每一个可能的开始时间对应一个决策,关于什么时候开始的决策都可以通过是否的决策来表达。

某活动是否应该在某一时间开始?

$$\text{它的决策变量} = \begin{cases} 1 & \text{是} \\ 0 & \text{否} \end{cases}$$

由于特定的活动只能在一个时间开始,对各种时间的选择是一组互斥选择,所以如果只有一个时间可供选择,那么决策变量的值为1。

例如,让我们看看在中国的应用(《界面》1995年1-2月期)。中国为了满足经济迅速增长对能源的需要,正在面对为期15年至少2400亿美元的新投资。煤和电力的短缺需

要兴建新的基础设施运输煤炭和传送电力,以及修建新水库和工厂来提供热电、水电和核电。因此,中国国家计划委员会和世界银行联合开发了一个大型混合 BIP 模型,在 15 年的计划期内,用来指导关于实施哪些工程、何时动工的决策,以最小化总投资。据统计,这项运筹学计划在 15 年中,为中国节省了约 64 亿美元。

航空应用

航空业在其日常运营中广泛地使用运筹学,很多运筹学专家在该领域工作。主要的航空公司都有专门从事运筹学应用的内部机构。另外,一些著名的咨询公司仅仅关注公司涉及运输的问题,如航空公司。我们将要提及两个应用,它们都使用 BIP。

一个是飞机安排问题。给定几种不同类型的可用飞机,问题是为每个日程安排中的航班指定某种机型,以使完成日程安排获得利润最大化。基本问题是如果给航班分配的飞机太小,那么将失去潜在的乘客。如果飞机太大,则因为存在空座位,公司将承担更大的开销。

对于每个机型与航班的组合,我们有如下是或否的决策。

$$\text{它的决策变量} = \begin{cases} 1 & \text{是} \\ 0 & \text{否} \end{cases}$$

应用案例

商业航空公司必须解决两个调度难题以保证所有航班均有机组成员。第一个问题是工作计划问题,包括安排航班次序及配置剩余时间——对于每个员工来说,几天的休假时间是对工作的补偿。第二个问题是飞机和员工的班次及时间计划问题,包括将工作计划分配给每个员工。管理者追求的是成本最小化或者是生产率最高的解,同时要满足劳动合同并且要考虑员工的偏好。

通过应用 0-1 整数规划(BIP)模型求得这些问题的最优解,世界上很多主要的航空公司最近几年均节约了大量的成本。其中之一就是新西兰航空公司——新西兰最大的国内和国际航空公司。该公司的员工超过 2 000 人,拥有到澳大利亚、亚洲、北美和欧洲的国际航线及国内主要城市间的国内航线。

新西兰航空公司应用的 BIP 模型有上百个函数约束和上千个二元变量,并且应用了先进的技术求解这些模型。通过这些模型的应用,每年节约的成本保守估计达 670 万美元,占该公司最近一年营业收入的 11%。该模型的成功应用还有许多其他无形的收益,包括快速执行、有效调节最新的时刻表改变、改善旅客服务。

资料来源: E. R. Butchers, P. R. Day, A. P. Goldie, S. Miller, J. A. Meyer, D. M. Ryan, A. C. Scott, and C. A. Wallace: "Optimized Crew Scheduling at Air New Zealand," *Interfaces*, 31(1): 30-56, Jan. - Feb. 2001. (以下网址提供本文的链接: www.mhhe.com/hillier.)

Delta 航空公司(《界面》1994 年 1-2 月期)每天的班次超过 2 500 个,拥有属于 10 种不同机型的 450 架飞机。一旦需要变动,它们就运用巨大的整数规划模型(大概 40 000 个约束条件,20 000 个 0-1 变量和 40 000 个一般整数变量)来解决飞机安排的问题。这个应用每年为 Delta 航空公司节省大约 1 亿美元。

一个很相似的应用是机组人员安排问题。在这里,不是为航班分配机型,而是把飞行员和乘务人员分配给某条航线。因此,每条可行的航线都是从机组人员的基地出发再返回同一基地,对每条航线,是或否的决策是:

是否应该指定某队机组人员飞行某航线?

$$\text{它的决策变量} = \begin{cases} 1 & \text{是} \\ 0 & \text{否} \end{cases}$$

目标是使提供机组人员所花的费用最小,机组人员要飞行所有班次。

美国航空公司(《界面》1989年7-8月期与1991年1-2月期)以一个月为单位,运用BIP解决机组人员安排的问题,每年节省超过2000万美元。这个方法被总部设在美国以外的航空公司所广泛采用。例如,新西兰航空公司(《界面》2001年1-2月期)运用BIP优化机组人员安排,每年能节省大约670万美元。可参见本节应用案例的进一步描述。

此类的一个比较完整的建模案例将在11.4节末尾给出。

与航空公司有关的一个问题是,有时由于天气恶劣、飞机机械故障或人员缺乏等原因,出现航班延误或取消的情况时,需要很快调整机组人员的安排。正如2.2节和2.5节(《界面》2003年1-2月期)所描述的,大陆航空公司在发生上述情况时,在使用一个基于BIP的复杂决策支持系统来进行机组人员安排的第一年,就节省了4000万美元(大陆航空公司因为这个创新应用,获得了2002年Franz Edelman管理科学成就奖的一等奖)。

航空公司所面临的问题在其他运输业同样会出现。因此,运筹学研究在航空业的一些应用也扩展到其他部门,包括铁路运输。例如,近年来,有三个Franz Edelman管理科学成就奖的第一名是关于铁路应用,包括法国国家铁路,加拿大太平洋铁路和荷兰铁路,它们带来了巨大的财务节约。(《界面》1998年1-2月期、2004年1-2月期和2009年1-2月期)。参考文献A1描述了荷兰铁路通过应用MIP优化人员安排每年节约近480万美元。



11.3 0-1 变量在模型构建中的创新应用

前面我们看了一些例子,这些问题的基本决策结果都为是或否,因此引入0-1变量来表示这些决策。现在我们来查看一些0-1变量的其他有效应用。特别地,有时这些变量有助于解决那些模型本身很复杂的问题,并将它们重新建模,使之成为纯或混合IP问题。

如果问题的原模型对应于一个整数规划模型或线性规划模型,只是在模型中的组合关系稍有不同,那么就可以对它们重新建模。通过问题来表达这些组合关系,而对问题的回答只能为是或否,于是辅助0-1变量被引入模型以表达是或否的决策(与其作为原问题的决策变量考虑,不如在问题模型中引入一个辅助的二元变量帮助建立一个纯或混合的BIP模型)。引进这些变量可以将问题变成一个混合整数规划(MIP)问题(或一个纯IP问题,如果所有的原始变量都要求是整数值)。

下面介绍一些可以用这种方法来解决的例子, x_j 表示问题的原始变量(可以是连续变量或者是整数变量), y_j 表示用于重新建模的辅助0-1变量。

“或”约束

考虑这种重要情况:在两个约束条件之间选择一个,即只有一个约束条件(两者之中

任一)是必须保留的(尽管另一个也可以保留,但我们不要求这么做)。例如,为了达到某种目的,在两种资源中择其一使用,因此在计算上,有必要把其中一种资源的可用性约束保留下来。为了说明适用于这种情况,假设整个问题一个要求是

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

或

$$x_1 + 4x_2 \leq 16$$

也就是说,两个不等式中至少有一个要保留,但不必保留两个。为了使这个要求满足线性规划模型,必须改变它的形式,因为在线性规划模型中,所有约束条件都必须被保留下来。假设 M 是一个很大的正数,则这个要求可以重写为

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 16 + M$$

或

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18 + M$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 16$$

关键是把 M 加到约束式的右边后,约束条件不再起作用,因为满足该问题其余约束条件的解都必然满足该约束(这个公式假设总体问题的可行解集是一个有限集合,而 M 足够大以至于不会漏掉任何一个可行的解)。这等价于下面这种约束条件集

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18 + My$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 16 + M(1 - y)$$

因为辅助变量 y 必须是 0 或 1,这个公式保证原始约束条件中的一个被满足,而另一个实际上是不起作用的。把这个新约束集加入总体模型的其他约束集中,使之成为一个纯或混合的 IP 问题(主要取决于 x_j 是整数变量还是连续变量)。

我们先前讨论了通过问题来表达组合联系,而对问题的回答只能为是或否,这种方法与之直接相关。这里涉及的组合联系主要是模型的其他约束条件与可选约束的第一个的组合,然后是与第二个的组合。这两种约束组合哪一种更好呢(根据可以取得的目标函数值)? 为了用是或否来重写这个问题,我们提出两个补充问题:

1. 公式 $x_1 + 4x_2 \leq 16$ 应该作为被保留的约束吗?
2. 公式 $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ 应该作为被保留的约束吗?

因为两个问题中的一个要被肯定地回答,所以我们让 0-1 变量 y 和 $1-y$ 相应地表示是或否决策。因此,当第一个问题回答是(第二个问题回答否)时, $y=1$; 当第二个问题回答是(第一个回答否)时, $1-y=1$ (也就是 $y=0$)。既然 $y+1-y=1$ (其中一个回答是)自动满足,就不再需要加入另一个约束来迫使这两个决策是互斥的了(如果用单独的 0-1 变量 y_1 和 y_2 表示这两个是或否决策,那么还需要附加额外的约束 $y_1 + y_2 = 1$ 使之互斥)。

对于这种方法,以后我们将在一个更常见的例子中正式介绍。

保留 N 个约束条件中的 K 个

考虑这样一个例子: 总体模型有一个大小为 N 的可能约束集,而只有其中的 K 个约束条件要保留下来(假设 $K < N$)。优化过程的部分工作是选择 K 个约束的组合使目标函数达到可能的最佳值。其余没有被选择的 $N-K$ 个约束条件,实际上这个问题不起作用,虽然可行解可能恰巧也能使它们中的部分成立。

本例情况是前面假设 $K=1, N=2$ 例子的一般化。 N 个可能的约束如下所示

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq d_1 \\ f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq d_2 \\ &\vdots \\ f_N(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq d_N \end{aligned}$$

然后,应用与前述例子相同的逻辑,我们可以找到必须保留 K 个约束条件所要求的一个等式

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq d_1 + My_1 \\ f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq d_2 + My_2 \\ &\vdots \\ f_N(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq d_N + My_N \\ \sum_{i=1}^N y_i &= N - K \end{aligned}$$

且 y_i 是 0-1 变量, $i = 1, 2, \dots, N$

式中, M 是一个极大正数。对每一个二值变量 $y_i (i=1, 2, \dots, N)$, 注意到 $y_i=0$ 时 $My_i=0$, 这使得新约束 i 变成初始约束 i 。若 $y_i=1$, $d_i + My_i$ 变得相当大(仍然假定在一个范围内), 以至于新约束 i 能够自动被任一满足其余新约束的解所满足, 它消除了初始约束 i 的作用。因此, 因为对 y_i 的约束保证了其中的 K 个变量等于 0 而剩下的等于 1, 初始约束中的 K 个变量将不会改变, 而另外 $(N-K)$ 个实际将被剔除。通过对整个问题应用适当的算法, 能够决定哪 K 个约束条件被保留在模型中, 以得到对所有变量最佳的解。

有 N 个可能取值的函数

考虑下面的情况: 一个给定函数要求取给定 N 个值中的一个。如下所示

$$f(x_1, x_2, \dots, x_N) = d_1 \quad \text{或} \quad d_2, \dots, \quad \text{或} \quad d_N。$$

一种特殊情况是

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_j x_j$$

类似一个线性规划约束条件的左边项。另一种特殊情况是 $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_j$, 即对于给定的 j , x_j 必须取给定的 N 个值之一。

等价的 IP 方程如下表示

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^N d_i y_i \\ \sum_{i=1}^N y_i &= 1 \end{aligned}$$

且 y_i 是 0-1 变量, $i = 1, 2, \dots, N$

因此, 新的约束集将会取代整个问题的要求。该约束集提供了一个等价形式, 因为必须有一个 y_i 等于 1, 而其他的等于 0, 所以正好有一个 d_i 被选为函数值。在这个例子中, 提出了 N 个是或否问题, 那么是否应该选择 $d_i (i=1, 2, \dots, N)$ 作为函数值呢? 因为 y_i 表

示相应是或否决策,所以第二个约束条件使得它们成为互斥的可选择。

为了说明为什么会出现这种情况,重新考虑 3.1 节提出的 Wyndor Glass 公司的问题。在第三个工厂,每周有 18 个小时的生产时间可以用来生产两种新产品,或者生产即将投入生产的某些产品。为了保留一些生产力来生产未来的产品,管理层现在想限制两种新产品的生产时间,每周 6 小时、12 小时或者 18 小时。因此,初始模型的第三个约束 ($3x_1 + 2x_2 \leq 18$) 现在变成

$$3x_1 + 2x_2 = 6 \quad \text{或} \quad 12 \quad \text{或} \quad 18$$

在之前的符号中, $N=3$, 而 $d_1=6, d_2=12, d_3=18$ 。因此,管理层的新要求可以用如下公式表示

$$3x_1 + 2x_2 = 6y_1 + 12y_2 + 18y_3$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

且 y_1, y_2, y_3 是 0-1 变量。

现在这个新问题的总体模型由两部分构成,原模型(见 3.1 节)加上替换原始第 3 个约束的新约束集。该替换产生一个易处理的 MIP 模型。

固定支出问题

当举办一项活动时,发生固定支出和准备成本的情况是很常见的。比如,一个工厂接下生产一批产品的订单后,必须建立相应的生产设施以启动生产,这时就产生了一笔费用。在这种情况下,项目的总开销就是与项目进度相关的可变支出以及用来启动项目的启动资金。可变支出通常大致与项目进度成比例。如果是这种情况,项目(称为项目 j)的总开销可以用如下的函数形式来表示

$$f_j(x_j) = \begin{cases} k_j + c_j x_j & \text{如果 } x_j > 0 \\ 0 & \text{如果 } x_j = 0 \end{cases}$$

在上式中, x_j 表示项目 j 的进度 ($x_j \geq 0$), k_j 表示准备成本,而 c_j 表示多生产一个单位所带来的成本。如果不是因为准备成本 k_j ,成本结构表明可以用线性规划模型来决定项目最佳的生产进度。幸运的是,即使有 k_j ,仍然可以使用 MIP 模型。

为了建立总体模型,假设有 n 个项目,它们的成本结构如前所述(每个项目的 $k_j \geq 0$, 对于某些 $j=1, 2, \dots, n$ 来说, $k_j > 0$), 这样,问题表示为

$$\min \quad Z = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n)$$

s. t. 给定的线性规划约束条件

为了将问题转化为 MIP 形式,我们提出 n 个问题,这些问题必须回答是或者不是;也就是说,对于每一个 $j=1, 2, \dots, n$, 项目 j 应该被实施 ($x_j > 0$) 吗? 每一个是或否决策用一个辅助 0-1 变量 y_j 表示,所以

$$Z = \sum_{j=1}^n (c_j x_j + k_j y_j)$$

其中

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{如果 } x_j > 0 \\ 0 & \text{如果 } x_j = 0 \end{cases}$$

因此, y_j 可以被看成可能决策, 与 11.1 节中提到的类型类似(但不等同)。假设 M 是一个极大正数, 它大于任一 $x_j (j=1, 2, \dots, n)$ 的最大可能值。那么约束

$$x_j \leq My_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

将保证当 $x_j > 0$ 时, $y_j = 1$ 而不是 0。剩下的一个难题是当 $x_j = 0$ 时, y_j 自由地选择 0 或者 1。幸运的是, 这个难题会因目标函数自身的特点而被自动解决。 $k_j = 0$ 的情况将会被忽略, 因为这时 y_j 将从模型中去掉。所以我们考虑另一种情况, 也就是, $k_j > 0$ 。当 $x_j = 0$ 时, 既然约束集允许 y_j 在 $y_j = 0$ 和 $y_j = 1$ 之间选择, $y_j = 0$ 必然产生一个比 $y_j = 1$ 更小的 Z 值。既然如此, 因为目标是最小化 Z , 所以产生最优解算法会在 $x_j = 0$ 的时候选择令 $y_j = 0$ 。

总之, 一个固定支出问题的 MIP 模型如下

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = \sum_{j=1}^n (c_j x_j + k_j y_j) \\ \text{s. t.} \quad & \text{原始约束条件, 加上} \\ & x_j - My_j \leq 0 \end{aligned}$$

$$\text{且 } y_j \text{ 是 0-1 变量, } j = 1, 2, \dots, n$$

如果 x_j 也被限制为整数, 那么它将会变成一个纯 IP 问题。

为了说明这种方法, 再次回顾 3.4 节所介绍的 Nori&Leets 公司空气污染问题。考虑第一种消除污染方法——增加烟囱的高度——实际上包括为增高烟囱而做准备产生的固定支出和大致与增高量成比例的可变支出。在转化为模型中相应的年支出后, 对于每一个鼓风机和平炉来说, 固定支出将会是 200 万美元, 而可变支出见表 3.14。因此, 在之前的符号中, $k_1 = 2, k_2 = 2, c_1 = 8$ 以及 $c_2 = 10$, 这里目标函数是以百万美元为单位的。因为另一种消除污染的方法不涉及任何固定支出, 即对于 $j = 3, 4, 5, 6, k_j = 0$, 所以, 此问题的新 MIP 模型可表示如下

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = 8x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 11x_5 + 9x_6 + 2y_1 + 2y_2 \\ \text{s. t.} \quad & \text{3.4 节中给出的约束条件, 加上} \\ & x_1 - My_1 \leq 0 \\ & x_2 - My_2 \leq 0 \\ & \text{且 } y_1, y_2 \text{ 是 0-1 变量。} \end{aligned}$$

一般整数变量的二值表示

假设有一个纯 IP 问题, 其中大多数变量都是 0-1 变量, 但是一般整数变量的存在使我们没有行之有效的 BIP 算法来解决这个问题。一种绕开该难点的有效办法是对每一个一般整数变量进行二值表示。特别地, 如果一个整数变量 x 的取值范围是

$$0 \leq x \leq u$$

而 N 被定义成如下所示的整数

$$2^N \leq u < 2^{N+1}$$

那么 x 的二值表示(binary representation)是

$$x = \sum_{i=0}^N 2^i y_i$$

上式中,变量 y_i 是(辅助)二值变量。用二值表示来替换每一个一般整数变量(用不同的辅助二值变量集),这样就将整个问题简化成一个 BIP 模型。

例如,假设一个 IP 问题有两个一般整数变量 x_1 和 x_2 ,以及许多二值变量。再假设 x_1 和 x_2 都是非负的,函数约束包括

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 5 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 30 \end{aligned}$$

这些约束条件显示对于 $x_1, u=5$,而对于 $x_2, u=10$,所以根据 N 的定义,对应于 $x_1, N=2(2^2 \leq 5 < 2^3)$ 而对 $x_2, N=3(2^3 \leq 10 < 2^4)$ 。因此,这些变量的二值表示是

$$\begin{aligned} x_1 &= y_0 + 2y_1 + 4y_2 \\ x_2 &= y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 8y_6 \end{aligned}$$

在上式替换在所有函数约束和目标函数中的变量后,上述的两个函数约束变成

$$\begin{aligned} y_0 + 2y_1 + 4y_2 &\leq 5 \\ 2y_0 + 4y_1 + 8y_2 + 3y_3 + 6y_4 + 12y_5 + 24y_6 &\leq 30 \end{aligned}$$

注意, x_1 的可能值对应于向量 (y_0, y_1, y_2) 的可能值;同样, x_2 对应于 (y_3, y_4, y_5, y_6) 。例如, $x_1=3$ 对应于 $(y_0, y_1, y_2)=(1, 1, 0)$,而当 $x_2=5$ 时, $(y_3, y_4, y_5, y_6)=(1, 0, 1, 0)$ 。

对于一个 IP 问题,其所有的变量都是(有界的)一般整数变量,我们有可能利用相同的方法将其简化为一个 BIP 模型。然而,大多数情况下这么做并不可取,因为其中包含的变量将会急剧增加。对一个原始 IP 模型使用一个好的 IP 算法,通常会比在一个更大的 BIP 模型上应用一个好的 BIP 算法更为有效。^①

概括地说,对于本节介绍的所有用辅助二值变量表达的形式,我们需要小心谨慎。这种方法有时要求加入大量变量,这可能使模型在计算上是不可行的(11.5 节将会讨论可求解的 IP 问题的规模)。



11.4 一些建模例子

我们现在给出一些例子,来阐明各种用 0-1 变量建模的方法,包括前面几节所讨论的内容。为了清楚起见,例子都很简单。在实际应用中,在一个更为巨大模型中,这些模型是典型的小的组成部分。

^① 支持该结论的证据,见 J. H. Owen and S. Mehrotra, "On the Value of Binary Expansions for General Mixed Integer Linear Programs", *Operations Research*, 50: 810-819, 2002.

例 1 当决策变量是连续变量时的选择

Good Products 公司的研发部开发了三种可行的新产品。然而,为了使产品的生产线不至过于多样化,管理层决定实施以下限制。

限制 1 在三种新产品中,至多有两个被投入生产。

每一种产品可能由两个工厂中的任何一个生产。出于管理方面的考虑,管理层实行了第二条限制。

限制 2 两个工厂中,仅有一个能作为新产品的唯一生产者。

对于两个工厂来说,每种新产品的单位生产成本都是相同的。然而,由于两个工厂的生产设备不同,每种产品的单位生产时间可能是不同的。数据在表 11.2 中给出,还有其他一些信息,包括在投产后每周每种新产品的预期销售数量。目标是选择新产品、工厂和生产新产品的生产率,以使总利润最大化。

表 11.2 例 1 的数据(Good Products 公司的问题)

	单位产品的生产时间/小时			每周可用生产时间/小时
	产品 1	产品 2	产品 3	
工厂 1	3	4	2	30
工厂 2	4	6	2	40
单位利润/千美元	5	7	3	
销售量/周	7	5	9	

在某种程度上,这个问题类似一个标准的产品混合问题,正如 3.1 节所描述的 Wyndor Glass 公司的例子。实际上,如果我们去掉两个约束条件并且满足表 11.2 列出的两个工厂(所以这两个工厂生产产品的工艺是不同的)生产每种新产品所用的时间,那么原问题就变成了此类问题。特别地,令 x_1, x_2, x_3 分别代表新产品的生产率,那么模型变为

$$\begin{aligned}
 \max \quad & Z = 5x_1 + 7x_2 + 3x_3 \\
 \text{s. t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 30 \\
 & 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 40 \\
 & x_1 \leq 7 \\
 & x_2 \leq 5 \\
 & x_3 \leq 9
 \end{aligned}$$

且 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

对于实际问题,必然会给模型加入约束:

严格大于零的决策变量(x_1, x_2, x_3)数必须 ≤ 2 。

这个约束条件无法用于一个线性或整数规划模型,所以关键问题是怎样把它转化成

此类模型,以便使用相应的算法求解总体模型。如果决策变量是 0-1 变量,那么约束条件就可以表达为 $x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$ 。然而,我们需要一个更为复杂的模型,不仅涉及辅助 0-1 变量,还包含连续变量。

第二个约束要求前两个约束条件($3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 30$ 与 $4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 40$)被下述约束条件代替

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 30$$

或

$$4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 40$$

至于哪个约束条件被保留,对应于选择哪个工厂来生产新产品,我们在前面的章节已经讨论了怎样把或约束转化成为一个线形或整数规划形式,我们再次用到一个辅助 0-1 变量。

使用辅助 0-1 变量建模

为了处理第一个要求,我们引入三个辅助 0-1 变量(y_1, y_2, y_3),它们的含义如下

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{如果 } x_j > 0 \text{ 被保留(生产产品 } j) \\ 0 & \text{如果 } x_j = 0 \text{ 被保留(不生产产品 } j) \end{cases}$$

$j=1,2,3$ 。为了把该含义融入模型中,我们把 M (一个非常大的正数)加到约束条件当中

$$x_1 \leq My_1$$

$$x_2 \leq My_2$$

$$x_3 \leq My_3$$

$$y_1 + y_2 + y_3 \leq 2$$

$$y_j \text{ 是 0-1 变量, } j = 1, 2, 3$$

或约束与非负约束使决策变量的可行域是有限的(每个 $x_j \leq M$)。因此,在每个约束条件 $x_j \leq My_j$ 中, $y_j = 1$ 使 x_j 能取到可行域中的任何值,而 $y_j = 0$ 迫使 $x_j = 0$ (反过来, $x_j > 0$ 迫使 $y_j = 1$,而 $x_j = 0$ 时允许 y_j 等于 0 或 1)。结果,因为第四个约束条件令至多能有两个 y_j 等于 1,所以它等价于至多能有两种新产品被投入生产。

为了处理第二个要求,我们引入第二个辅助 0-1 变量 y_4 ,其含义如下

$$y_4 = \begin{cases} 1 & \text{如果 } 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 40 \text{ 被保留(选择第二个工厂)} \\ 0 & \text{如果 } 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 30 \text{ 被保留(选择第一个工厂)} \end{cases}$$

正如 11.3 节所论述的,通过加上如下约束条件来表达该含义

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 30 + My_4$$

$$4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 40 + M(1 - y_4)$$

y_4 是 0-1 变量。

结果,我们把所有变量移到约束条件的左边后,完整的模型是

$$\max \quad Z = 5x_1 + 7x_2 + 3x_3$$

$$\begin{aligned}
 \text{s. t.} \quad & x_1 \leq 7 \\
 & x_2 \leq 5 \\
 & x_3 \leq 9 \\
 & x_1 - My_1 \leq 0 \\
 & x_2 - My_2 \leq 0 \\
 & x_3 - My_3 \leq 0 \\
 & y_1 + y_2 + y_3 \leq 2 \\
 & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - My_4 \leq 30 \\
 & 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + My_4 \leq 40 + M \\
 \text{且} \quad & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \\
 & y_j \text{ 是 } 0\text{-}1 \text{ 变量, } j = 1, 2, 3, 4
 \end{aligned}$$

现在这是一个 MIP 模型,三个变量(x_j)不要求是整数,四个 0-1 变量,所以可以用 MIP 算法来求解这个模型。求得结果是(在用一个相当大的数替换 M 之后)^①,最优解为 $y_1=1, y_2=0, y_3=1, y_4=1, x_1=5\frac{1}{2}, x_2=0$ 和 $x_3=9$; 也就是说,选择生产第一和第三个新产品,选择第二个工厂生产新产品,并且第一个产品的生产率是每周 $5\frac{1}{2}$ 个,第三个产品的生产率是每周 9 个。总利润是每周 54 500 美元。

例 2 违反比例性

Supersuds 公司正在为明年的新产品开发市场计划。对于三个新产品,公司决定在国内电视网共购买五个时段播出广告。问题是怎样把这五个时段分配给三个产品,对每个产品最多只能分配三个(最小值为零)时段。

表 11.3 显示了把时段 0、1、2、3 分配给每个产品带来的估计效果,这个效果是由通过在该时段播出广告所产生的销售增长带来的利润(以百万美元为单位)来衡量的,也要考虑到制作广告和购买时段所花的费用。目标是把五个时段分配给产品来使利润最大化。

这个小问题可以很容易用动态规划或推断来解决(最优解是分配 2 个时段给产品 1, 3 个时段给产品 3,不为产品 2 做广告)。然而,我们将给出两个不同的 BIP 模型来阐明这个问题。如果这个小问题要与一个涉及为公司所有新产品的市场活动分配资源的大 IP 模型组合起来,则需要应用这类模型。

带有 0-1 变量的模型

一个自然的建模方式是令 x_1, x_2, x_3 分别为分配给每种产品的电视广告的时间段数。每个 x_j 对目标函数的贡献由表 11.3 的相应列给出。然而,每一列都不满足 3.3 节提出的成比例的假定。因此,我们无法用这些整数决策变量写出一个线性的目标函数。

^① 实际上,给 M 取值的时候要谨慎, M 应足够大以免消除任何可行解,但也应尽可能小,这是为了避免在进行 LP-松弛(并避免数字上的不稳定)的时候,无谓地扩大可行域的范围。对于本例,经过对约束条件的检查, M 的最小可行值为 $M=9$ 。

表 11.3 例 2(Supersuds 公司问题)的数据

电视时段数	利 润		
	产 品		
	1	2	3
0	0	0	0
1	1	0	-1
2	3	2	2
3	3	3	4

现在看一下当我们为每个正整数 $x_i = j (j=1, 2, 3)$ 引入一个辅助 0-1 变量 y_{ij} 会发生什么, y_{ij} 的含义是

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{如果 } x_i = j \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

(例如, $y_{21} = 0, y_{22} = 0$ 以及 $y_{23} = 1$ 意味着 $x_2 = 3$) 结果这个线性 BIP 模型是

$$\max Z = y_{11} + 3y_{12} + 3y_{13} + 2y_{22} + 3y_{23} - y_{31} + 2y_{32} + 4y_{33}$$

$$\text{s. t.} \quad y_{11} + y_{12} + y_{13} \leq 1$$

$$y_{21} + y_{22} + y_{23} \leq 1$$

$$y_{31} + y_{32} + y_{33} \leq 1$$

$$y_{11} + 2y_{12} + 3y_{13} + y_{21} + 2y_{22} + 3y_{23} + y_{31} + 2y_{32} + 3y_{33} = 5$$

且 每个 y_{ij} 是 0-1 变量。

注意前三个约束条件确保每个 x_i 只能取一个可能值(在这里, $y_{i1} + y_{i2} + y_{i3} = 0$ 对应 $x_i = 0$, 这对于目标函数没有贡献)。最后一个约束条件确保 $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ 。根据表 11.3, 这个线性目标函数给出了总利润。

解这个 BIP 模型, 最优解为

$$y_{11} = 0, y_{12} = 1, y_{13} = 0, \text{故 } x_1 = 2$$

$$y_{21} = 0, y_{22} = 0, y_{23} = 0, \text{故 } x_2 = 0$$

$$y_{31} = 0, y_{32} = 0, y_{33} = 1, \text{故 } x_3 = 3$$

用 0-1 变量建模的另一个例子

现在重新定义辅助 0-1 变量 y_{ij} 如下

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{如果 } x_i \geq j \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

故不同之处在于, 当 $x_i \geq j$, 而不是 $x_i = j$ 时, 有 $y_{ij} = 1$ 。因此

$$x_i = 0 \Rightarrow y_{i1} = 0, y_{i2} = 0, y_{i3} = 0$$

$$x_i = 1 \Rightarrow y_{i1} = 1, y_{i2} = 0, y_{i3} = 0$$

$$x_i = 2 \Rightarrow y_{i1} = 1, y_{i2} = 1, y_{i3} = 0$$

$$x_i = 3 \Rightarrow y_{i1} = 1, y_{i2} = 1, y_{i3} = 1$$

故 $x_i = y_{i1} + y_{i2} + y_{i3}$ 。

因为 $y_{i1}=1$ 时才可能有 $y_{i2}=1$, $y_{i2}=1$ 时才可能有 $y_{i3}=1$, 这些定义通过加入下述约束条件来实现

$$y_{i2} \leq y_{i1} \text{ 并且 } y_{i3} \leq y_{i2}, i = 1, 2, 3$$

y_{ij} 的新定义同样改变了目标函数, 图 11.1 显示了目标函数中产品 1 的部分。因为 y_{11} 、 y_{12} 、 y_{13} 提供了 x_1 值(从 0 开始)的连续增加(如果有的话), y_{11} 、 y_{12} 、 y_{13} 的系数分别由表 11.3 中产品 1 相应的增长量给出($1-0=1$, $3-1=2$, $3-3=0$)。这些增长量在图 11.1 中是斜率, 得到 $1y_{11} + 2y_{12} + 0y_{13}$ 作为目标函数的产品 1 部分。注意对三种产品应用这个方法必然会得到一个线性目标函数。

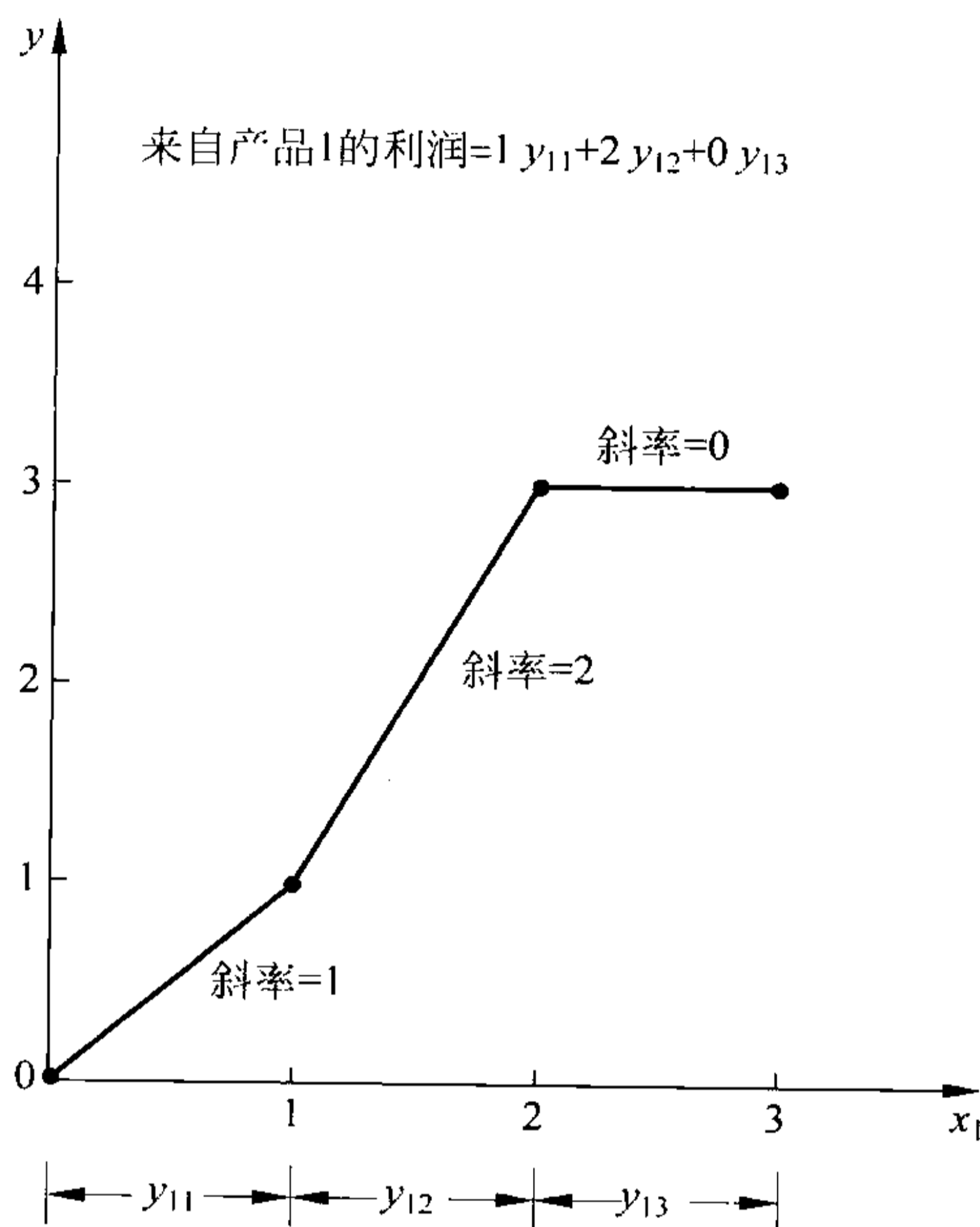


图 11.1 为产品 1 播出 x_1 个时段的广告导致销售增加而带来的利润, 其中范围给出了例 2 的第二个 BIP 模型中目标函数的相应系数(Supersuds 公司的问题)

我们把所有变量移到约束条件的左边, 最后得到完整的 BIP 模型:

$$\max Z = y_{11} + 2y_{12} + 2y_{22} + y_{23} - y_{31} + 3y_{32} + 2y_{33}$$

$$\text{s. t. } y_{12} - y_{11} \leq 0$$

$$y_{13} - y_{12} \leq 0$$

$$y_{22} - y_{21} \leq 0$$

$$y_{23} - y_{22} \leq 0$$

$$y_{32} - y_{31} \leq 0$$

$$y_{33} - y_{32} \leq 0$$

$$y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{21} + y_{22} + y_{23} + y_{31} + y_{32} + y_{33} = 5$$

且 每个 y_{ij} 是 0-1 变量。

解这个 BIP 模型, 最优解为

$$y_{11} = 1, y_{12} = 1, y_{13} = 0, \text{故 } x_1 = 2$$

$$y_{21} = 0, y_{22} = 0, y_{23} = 0, \text{故 } x_2 = 0$$

$$y_{31} = 1, y_{32} = 1, y_{33} = 1, \text{故 } x_3 = 3$$

除了个人偏好外,在这个 BIP 模型与前一个模型之间没有优劣之分。它们有相同数目的 0-1 变量(决定 BIP 问题计算效果的主要因素)。它们都有一些特定结构(第一个模型中存在互斥的约束条件,第二个模型中存在相互关联的决策)来提高模型效率。第二个模型较第一个具有更多的函数约束。

例 3 覆盖所有特征

西南航空公司需要分配它的机组人员,使其覆盖所有将要飞行的航班。我们研究的重点是,为驻扎在旧金山的三队机组人员指定如表 11.4 第一列所示的所有航班,另外 12 列显示的是 12 条可行的航线(每列的数字代表该航线覆盖的航班,及其顺序号)。在这些航线中,需要选择 3 条(一队机组人员负责一条航线),但是要保证覆盖所有的航班(允许在一个航班上有多队机组人员,多出来的机组人员被视为乘客,但是工会合同要求,多余的机组人员被视为正在工作,应向其支付工资)。把一队机组人员分配给某条航线的成本由表中的最后一行给出(以千美元为单位)。目标是分配三队机组人员,使他们飞行所有航班的总成本最小。

用 0-1 变量建模

有 12 条可行的航线,相应的,我们有 12 个是或否的决策:

应该指定一队机组人员飞行航线 j 吗? ($j=1,2,\dots,12$)

因此,我们使用 12 个 0-1 变量分别代表这些决策:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{如果给航线 } j \text{ 指定一队机组人员} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

该模型最有趣的地方是,每个约束条件实际上是保证一个航班被覆盖。例如,考虑表 11.4 的最后一个航班(西雅图到洛杉矶)。五条航线(也就是 6 航线、9 航线、10 航线、11 航线和 12 航线)包括该航班,因此,公司至少会选择其中的一条航线飞行。结果约束条件是

$$x_6 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} \geq 1$$

表 11.4 例 3 的数据(西南航空公司的问题)

航 班	可行的航线											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1. 旧金山—洛杉矶	1			1			1			1		
2. 旧金山—丹佛		1			1			1			1	
3. 旧金山—西雅图			1			1			1			1
4. 洛杉矶—芝加哥				2			2		3	2		3
5. 洛杉矶—旧金山	2					3				5	5	
6. 芝加哥—丹佛				3	3				4			

续表

航 班	可行的航线											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
7. 芝加哥—西雅图							3	3		3	3	4
8. 丹佛—旧金山		2		4	4				5			
9. 丹佛—芝加哥					2			2			2	
10. 西雅图—旧金山			2				4	4				5
11. 西雅图—洛杉矶						2			2	4	4	2
成本 / 千美元	2	3	4	6	7	5	7	8	9	9	8	9

对另外 11 个航班使用类似的约束,完整的 BIP 模型是

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 5x_6 + 7x_7 + 8x_8 + 9x_9 + 9x_{10} + 8x_{11} + 9x_{12}$$

s. t.

$$x_1 + x_4 + x_7 + x_{10} \geq 1 \quad (\text{旧金山 - 洛杉矶})$$

$$x_2 + x_5 + x_8 + x_{11} \geq 1 \quad (\text{旧金山 - 丹佛})$$

$$x_3 + x_6 + x_9 + x_{12} \geq 1 \quad (\text{旧金山 - 西雅图})$$

$$x_4 + x_7 + x_9 + x_{10} + x_{12} \geq 1 \quad (\text{洛杉矶 - 芝加哥})$$

$$x_1 + x_6 + x_{10} + x_{11} \geq 1 \quad (\text{洛杉矶 - 旧金山})$$

$$x_4 + x_5 + x_9 \geq 1 \quad (\text{芝加哥 - 丹佛})$$

$$x_7 + x_8 + x_{10} + x_{11} + x_{12} \geq 1 \quad (\text{芝加哥 - 西雅图})$$

$$x_2 + x_4 + x_5 + x_9 \geq 1 \quad (\text{丹佛 - 旧金山})$$

$$x_5 + x_8 + x_{11} \geq 1 \quad (\text{丹佛 - 芝加哥})$$

$$x_3 + x_7 + x_8 + x_{12} \geq 1 \quad (\text{西雅图 - 旧金山})$$

$$x_6 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} \geq 1 \quad (\text{西雅图 - 洛杉矶})$$

$$\sum_{j=1}^{12} x_j = 3 \quad (\text{共三队机组成员})$$

且 x_j 是 0-1 变量。 $j = 1, 2, \dots, 12$

该 BIP 模型的一个最优解是

$$x_3 = 1 \quad (\text{选择飞行航线 3})$$

$$x_4 = 1 \quad (\text{选择飞行航线 4})$$

$$x_{11} = 1 \quad (\text{选择飞行航线 11})$$

其余 $x_j = 0$, 总成本为 18 000 美元(另一最优解是 $x_1 = 1, x_5 = 1, x_{12} = 1$ 其他 $x_j = 0$)。

这个例子阐明了一类更常见的问题——集合覆盖问题(set covering problems)^①。任何集合覆盖问题都可以用涉及一些可能的活动(如航线)与特征(如航班)的一般模型描述。每个活动处理一些特征但不是全部特征。目标是决定成本最小的活动组合,所有活

^① 严格地讲,一个集合覆盖问题不包括任何其他函数约束,如上例中最后一个函数约束。有时还假定目标函数的每个系数都被最小化为 1,在不满足这个假定时称其为加权的集合覆盖问题。

动必须覆盖所有特征。因此,令 S_i 是覆盖特征 i 的所有活动的集合。集合 S_i 中,至少有一个被选择,所以对于每个特征 i ,一个约束条件是

$$\sum_{j \in S_i} x_j \geq 1$$

另一类相关问题是集合分离问题(set partitioning problems),把每个约束条件变成

$$\sum_{j \in S_i} x_j = 1$$

所以每个集合 S_i 中恰好有一个被包括在选择出来的活动中。用于该例,也就是对选出的航线,每个航班只能在一条航线中出现,消除了在任何航班上有多余机组人员的情况。



11.5 求解整数规划问题的若干展望

表面看来 IP 问题应该相对容易解决,毕竟我们能够采取很有效的方法来解决线性规划问题,而它们的区别也仅仅是对于 IP 问题,我们需要考虑的解相对更少。事实上,具有有限可行域的纯 IP 问题一定有有限个可行解。

不幸的是,在这个推理过程中存在两个谬误。一个是有限个数的可行解保证了问题是容易解决的,然而有限个数也可以是天文数字那么大。比如考虑一个简单的 BIP 问题。如果有 n 个变量,则需要考虑 2^n 个解(随后其中一些解可能因为不符合函数约束条件而被舍去)。因此, n 的个数每增长一个,解的数量就会变成 2 倍。这种情况称为问题难度呈指数增长(exponential growth)。如果 $n=10$,就有 1 000 多个(1 024)解;如果 $n=20$,就有 1 000 000 多个解;如果 $n=30$,就有 10 亿多个解,依此类推。因此,对于有几十个的变量的 BIP 问题,即使是最快的计算机也不可能一一列举(检查每一个解的可行性,如果可行,计算目标函数值),更不用说有同样多整数变量的一般 IP 问题了。但幸运的是,应用后面各节中的思路,目前最好的整数规划算法远远优于上述枚举的算法。这种改进在过去 20 年内十分明显。20 年前需用一年计算时间的 BIP 问题,用目前最好的商业软件(例如 CPLEX)只需几秒钟时间。速度的极大提高主要基于以下三个方面的巨大进展: BIP 算法及其他 IP 算法的改进、整数规划程序中频繁调用的线性规划算法的改进,以及计算机(包括台式计算机)运算速度的提高。因此,目前规模十分巨大的 BIP 的求解,与过去 10 年相比具有了更大的可能性。今天最好的算法已能求解某些具有几十万变量的纯 BIP 问题。然而,由于呈指数增长,即使是最好的算法,也不一定能解出每一个相对小的问题(有少于几百个 0-1 变量)。由于小问题自身的特点,有时候它们比那些规模大得多的问题要难解得多。

当要处理的变量是一般整型变量而非 0-1 变量时,能够求解的问题规模往往小得多。然而,仍然存在例外。比如,CPLEX8.0 专业版已经成功地解决了一个拥有 215 000 个一般整型变量、75 000 个函数约束条件和 6 000 000 个非零约束系数的 IP 问题。

另一个谬误是从一个线性规划问题里去除一些可行解(非整型的)将使得问题更易于解决。相反,正是所有的这些可行解才保证了能够得到一个位于顶点的可行解(CPF 解)

(也是一个相应基本可行解(BF解)),这个 CPF 解是整个问题的最优解。这个保证是高效率实现单纯形法的关键。因此,线性规划问题通常比 IP 问题更容易求解。

因此,大多数成功的整数规划算法都通过把 IP 问题的一部分与相应的线性规划算法联系起来,例如单纯形法或对偶单纯形法。对给定的 IP 问题,从中去除变量的整约束,得到的相应的线性规划问题通常被称作它的 LP 松弛(LP relaxation)。在接下来两节里所描述的算法阐述了一个 IP 问题某些部分的一系列 LP 松弛是如何有效地解决整个 IP 问题的。

在一种特殊情况下,解决 IP 问题不再比用单纯形法解决它的 LP 松弛困难,也就是说,后者最优解恰好满足 IP 问题的整数约束。当发生这种情况时,这个解也一定是 IP 问题的最优解,因为这个解是 LP 松弛所有可行解中的最优解,也包括了 IP 问题的所有可行解。因此,对于一个 IP 算法来说,用单纯形法求解 LP 松弛问题,首先检查这个偶然的结果是否已经产生,是很常见的事情。

通常来说,尽管发生 LP 松弛的最优解也是整数这种情况的几率很小,但是事实上,存在几种特殊类型的 IP 问题,其结果一定是整数。在第 8 章和第 9 章,你已经看到这些特殊类型的典型代表,即最小费用流问题(带有整型参数)和它的特殊案例(包括运输问题、分配问题、最短路径问题和最大流问题)。这些类型的问题保证了这个最优解是整数,因为它们具有一种特殊的结构(例如,参见表 8.6),而正如 8.1 节和 9.6 节关于整数解的性质里提到的,这种结构保证了每一个 BF 解都是整数。因此,这些特殊类型的 IP 问题可以被看做线性规划问题,因为它们完全可以用改进的单纯形法来求解。

尽管这种较大程度的简化并不常见,但实际上 IP 问题常常有某种特殊的结构,这种结构可以用来简化问题(上一节的例 2 和例 3 就属于此类,因为它们有互斥的约束条件、可能决策约束条件或者集合覆盖约束条件)。有些时候,这类问题的很大一部分都能够被成功地解决。在整数规划问题上,用于求解一定特殊结构的、具有特殊用途的算法正变得越来越重要。

因此,有三个主要的因素决定了 IP 问题的计算难度,它们是:(1)整数变量的数量;(2)这些变量是 0-1 变量还是一般整型变量;(3)问题中的特殊结构。这种情况正好与线性规划相反,在线性规划中(函数)约束条件的数量要比变量的数量重要得多。在整数规划中,约束条件的数量也是比较重要的(尤其是如果正在求解 LP 松弛),但是其重要性严格次于上面提到的三个因素。事实上,偶尔会出现,约束条件的数量增加了而计算时间却减少了,产生这种情况的原因是可行解的数量减少了。对 MIP 问题来说,整数变量的数量才是重要的,而不是所有变量的总数,因为连续变量几乎对计算量没有什么影响。

应用案例

塔可钟公司在美国有超过 6 500 家快餐店,其国际业务也增长迅猛。每年该公司要卖出大约 20 亿份套餐,年销售额约为 54 亿美元。

在每家塔可钟快餐店,每天的生意均非常可观,特别是在饭口时间顾客非常拥挤。因

此决定每个时刻员工的数量及其应该完成的工作是一件非常复杂、令人焦虑的工作。

为了解决该问题,塔可钟公司的管理者雇用了运筹学团队(包括一些咨询师)开发一套新的人力管理系统。该团队认为该系统需要三个主要的功能模块:(1)一个预测模型,用来预测任何时刻的顾客订单;(2)一个仿真模型(如第 20 章所描述的),用来将顾客订单转换为人力需求;(3)一个整数规划模型,用来调度员工以满足人力需求同时最小化薪金。

该整数规划模型的整数决策变量是不同时间段每次轮班需要的员工数。轮班的时长也是决策变量(受最小和最大轮班时间的限制),该模型还包括连续决策变量,因此该模型称为混合整数规划(MIP)模型。主要的约束是,每 15 分钟间隔内工作的员工数要大于或等于该间隔内需要的最少员工数(根据预测模型)。

该 MIP 模型与 3.4 节介绍的联合航空公司分配员工的线性规划模型类似。然而,主要的区别是塔可钟快餐轮班的工作员工比联合航空少得多,因此必须将这些决策变量限制为整数(对于联合航空公司的非整数解可以整数化,同时整数化后精确度的损失很小)。

MIP 模型及人力管理系统其他模块的应用每年为塔可钟节约了大约 1 300 万美元的账面人力成本。

资料来源: J. Hueter and W. Swart: "An Integrated Labor Management System for Taco Bell", *Interfaces*, 28 (1): 75-91, Jan. - Feb. 1998. (以下网址提供本文的链接: www.mhhe.com/hillier.)

因为 IP 问题通常比线性规划问题难解得多,所以有时候采用一种近似程序是很吸引人的。首先用单纯形法求解 LP 松弛,然后在最终的结果中,把非整数值凑整成为整数值。这种方法对一些应用来说可能就足够了,尤其是变量的值非常大,以至于调整所产生的误差相对很小时。然而,应该注意这个方法有两个缺陷。

一个缺陷是线性规划的最优解,在凑整之后,并不一定是可行的。通常来说,预见到怎样调整能够保持可行性是困难的。在调整之后,甚至有必要将一些变量的值改变一个或更多单位。为了说明这种情况,考虑下面这个问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = x_2 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 + x_2 \leq \frac{1}{2} \\ & x_1 + x_2 \leq 3\frac{1}{2} \\ & \text{且 } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \text{ 是整数。} \end{aligned}$$

如图 11.2 所示,LP 松弛的最优解是 $x_1 = 1\frac{1}{2}$, $x_2 = 2$, 但是不可能把非整数解 x_1 改进到 1 或 2(或其他任何整数)并且保持可行性。可行性的唯一保持方法是同时改变 x_2 的值。可以想象,当有成百上千个约束条件和变量的时候,这种改进会有多困难。

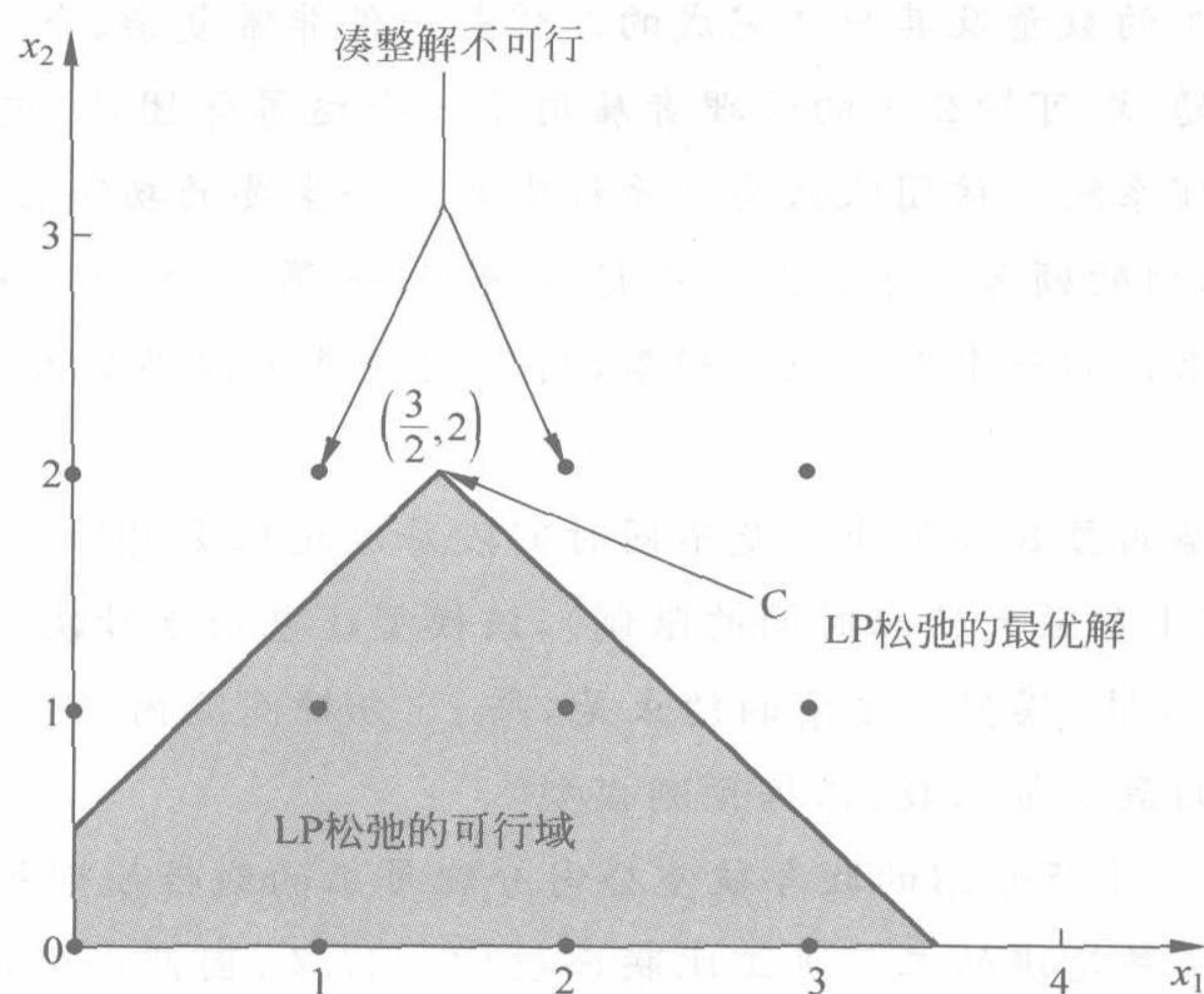


图 11.2 LP 松弛的最优解无论怎样凑整,也不是可行解的 IP 问题的例子

即使 LP 松弛的最优解被成功地改进,仍存在另一个缺陷。不能保证这个改进的解是最优整数解。实际上,从目标函数值的角度考虑,它可能远离了最优。这个事实可由以下问题来说明:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = x_1 + 5x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + 10x_2 \leq 20 \\ & x_1 \leq 2 \\ \text{且} \quad & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \text{ 是整数。} \end{aligned}$$

因为只有两个决策变量,这个问题可以用图形描述,见图 11.3。无论用图解法还是单纯形法都可以得到 LP 松弛的最优解是 $x_1 = 2, x_2 = \frac{9}{5}, Z = 11$ 。如果不能使用图解法(有更多变量的情况),那么非整数变量 $x_2 = \frac{9}{5}$ 一般会朝着可行的方向调整到 $x_2 = 1$ 。最后的整数解是 $x_1 = 2, x_2 = 1$,得到 $Z = 7$ 。注意,这个解远离最优解 $(x_1, x_2) = (0, 2), Z = 10$ 。

因为这两个缺陷,当 IP 问题过大而无法求解的时候,一种更好的方法是启发式的算法。这种算法对于大型问题是相当有效的,但是不能保证找到一个最优解。然而,在寻找非常好的可行解方面,这种算法比刚刚讨论的改进的方法要有效率得多。

近年来,运筹学取得了一个令人兴奋的发展,即为处理各种组合问题如 IP 问题,而开发的高效启发式的算法(通常被称作元启发式算法)发展快速。这些复杂的元启发式算法甚至可以用于整数非线性规划问题,这种问题的局部最优解可能是远离全局最优解的。它们还可以用于各种联合最优问题,这种问题常常在一个有整数变量但约束条件比 IP 模型复杂的模型中出现。

回到整数线性规划,对一个小到可以求解的 IP 问题来说,有很多算法是可用的。但

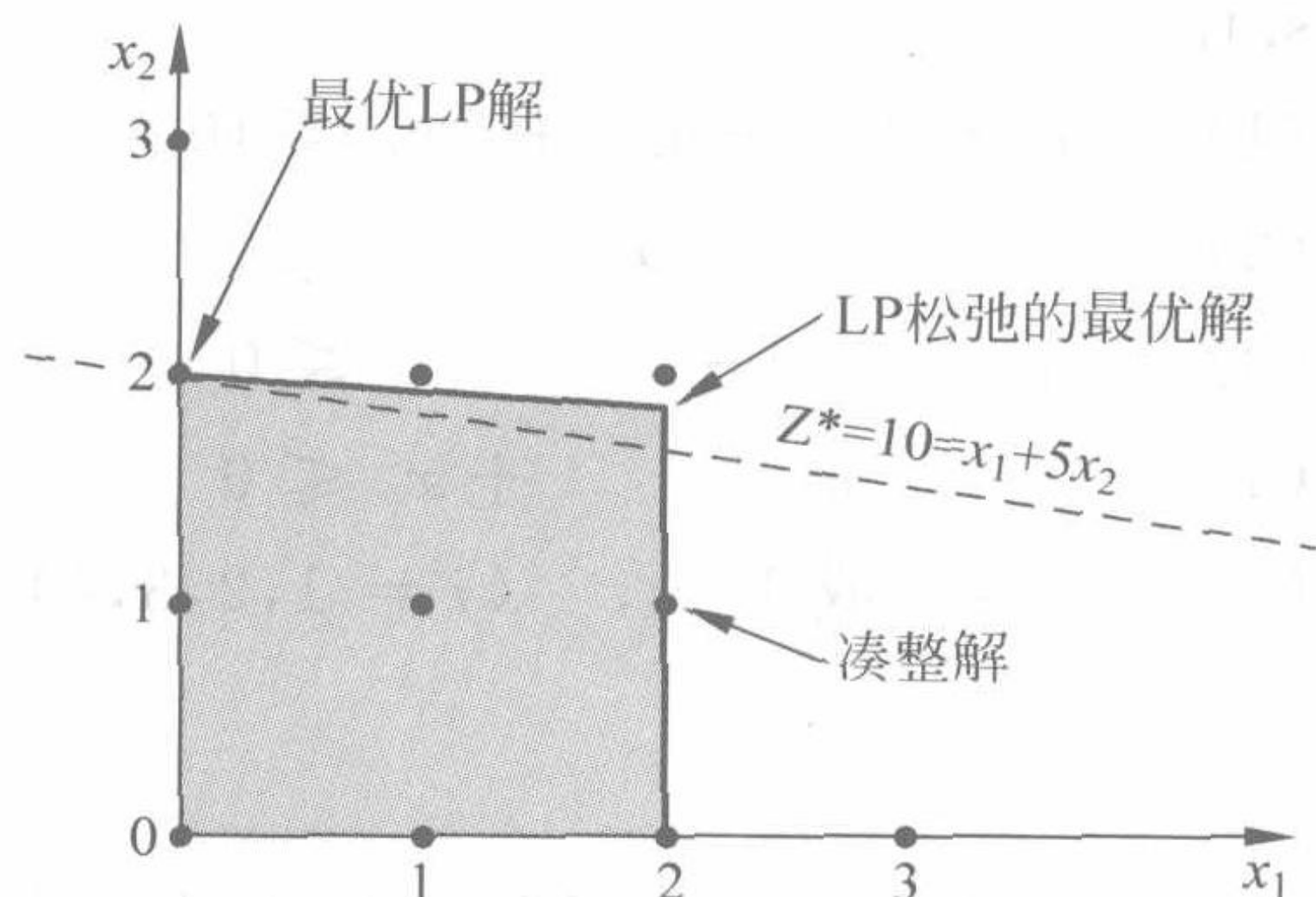


图 11.3 对 LP 松弛最优解的凑整解远离了 LP 问题的最优解的例子

是,在计算效率方面,没有任何一种 IP 算法可以与单纯形法(除了问题的特殊性)相提并论。因此,开发 IP 算法仍然是一个活跃的研究领域。幸运的是,已经取得了一些令人兴奋的算法进展,并且预期在未来几年中将获得更多成果。这些进展将在 11.8 节与 11.9 节论述。

在 IP 算法中,最常见、最传统的方法是使用分支定界技术和相关思想,来枚举可行整数解,我们应该主要讨论这种方法。下一节将提出分支定界技术,并且用一个解 BIP 问题的基本分支定界算法来阐述。11.7 节提出了另一个用于求解一般 MIP 问题的同类算法。



11.6 分支定界法及其在求解 0-1 整数规划中的应用

任何一个有界纯整数线性规划问题只有有限数目的可行解,所以我们很自然地考虑是否可以用类似枚举的方法来找出最优解。不幸的是,正如前文所述,有限的数目通常也很大。因此,必须巧妙地设计枚举方法使我们只需检查一小部分可行解。例如,动态规划(见第 10 章)就为那些只有有限数目可行解的问题提供了这样的方法(虽然对大多数线性规划问题其效率并不高)。另一种方法则是分支定界法。这种方法及其变形已经成功地应用于各种运筹学问题,尤其在解决整数规划问题方面更为出色。

分支定界法的基本思想是拆分排除法。对于那些很难直接处理的大问题,我们把它拆分成越来越小的子问题,直到这些子问题能被处理。拆分(分支)的工作是通过把整个可行解的集合分成越来越小的子集来完成的。排除(剪枝)的工作是通过界定子集中的最好的解的“好”的程度,然后舍弃这样的子集——其边界值表明它不可能包含原问题的最优解来完成。

现在我们依次介绍这三个基本步骤——分支、定界、剪枝,并通过应用分支定界算法的一个原型例子来解释这些步骤。例子(加州制造公司)出现在 11.1 节,现在复述一下(对约束条件进行编号以便下文引用)。

$$\max Z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

s. t.

$$(1) \quad 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10$$

$$(2) \quad \quad \quad x_3 + x_4 \leq 1$$

$$(3) \quad -x_1 \quad \quad + x_3 \quad \leq 0$$

$$(4) \quad \quad -x_2 \quad \quad + x_4 \leq 0$$

$$(5) \quad x_j = 0 \text{ 或 } 1 \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

分支

在处理 0-1 变量时,把可行解集合拆分成子集的最直接的办法是在某个子集中令某个变量(如 x_1)取值为 0,在另一个子集中令此变量为 1。在本例中,原问题被拆分成如下两个小的子问题。

子问题 1:

令 $x_1=0$ 相应的子问题为

$$\max \quad Z = 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

s. t.

$$(1) \quad 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10$$

$$(2) \quad \quad \quad x_3 + x_4 \leq 1$$

$$(3) \quad \quad \quad x_3 \quad \leq 0$$

$$(4) \quad -x_2 \quad \quad + x_4 \leq 0$$

$$(5) \quad x_j = 0 \text{ 或 } 1 \quad (j = 2, 3, 4)$$

子问题 2:

令 $x_2=1$ 相应的子问题为

$$\max \quad Z = 9 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

s. t.

$$(1) \quad 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 4$$

$$(2) \quad \quad \quad x_3 + x_4 \leq 1$$

$$(3) \quad \quad \quad x_3 \quad \leq 1$$

$$(4) \quad -x_2 \quad \quad + x_4 \leq 0$$

$$(5) \quad x_j = 0 \text{ 或 } 1 \quad (j = 2, 3, 4)$$

图 11.4 用树图展示了这个分支过程。树图中,从 All 节点(对应于包含所有可行解的原问题)分支(弧)生成与两个子问题相对应的两个节点。经过一次次迭代,树会继续长出新枝,我们称这种树为求解树(solution tree)(或枚举树)。在每次迭代中被赋值用以产生分支的变量(如上文的 x_1)称为分支变量(branching variable)(选择分支变量方法很复杂,它是某些分支定界算法重要的研究内容,不过,为了简化问题,我们在本节中只是以变量的自然顺序—— x_1, x_2, x_3 进行选择)。

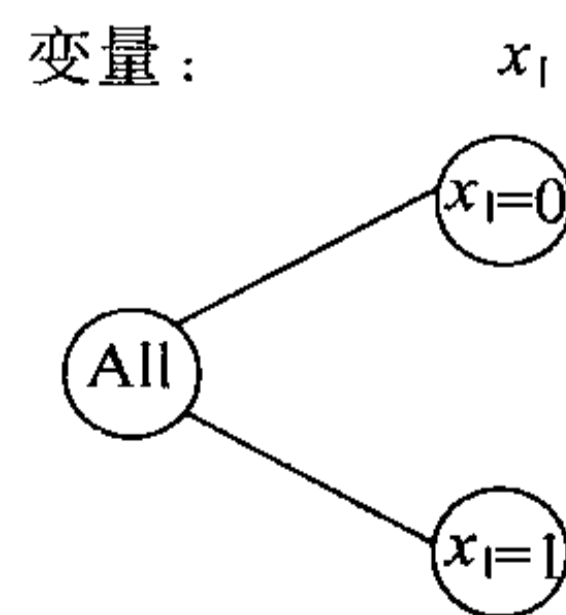


图 11.4 对 11.1 节中的例子应用 0-1 整数规划的分支定界法进行第一次迭代分支后产生的求解树

在本节以下部分你将看到某些子问题被直接处理(剪枝),而另一些子问题通过赋值 $x_2=0$ 或 $x_2=1$ 被进一步拆分成更小的子问题。

对于那些整数变量有两个以上取值的整数规划问题,可对其分支变量的每个方面都赋予单个值来产生分支,从而建立两个以上的子问题。不过,较好的选择是对分支变量设置取值区间(如 $x_j \leq 2$ 或 $x_j \geq 3$)来产生子问题。11.7 节中描述了这种方法。

定界

对每个子问题,我们需要得到一个边界值,此边界值可表示该子问题最好的可行解的“好”的程度。完成这项工作的标准方式是快速求解该子问题的松弛问题,此松弛问题比该子问题更为简单。在大多数情况下,我们通过删除(放松)某些使问题难以解决的约束条件就能很容易地得到一个问题的松弛问题。对于整数规划问题,最烦人的约束是要求变量为整数。因此,最广泛采用的松弛方法是删除此类约束的线性松弛法。

举个例子,考查 11.1 中给出并在本节一开始重复的问题。它的松弛问题是把模型的最后一行($x_j=0$ 或 $1, j=1, 2, 3, 4$)换成如下新的约束:

$$(5) \quad 0 \leq x_j \leq 1 \quad \text{对 } j = 1, 2, 3, 4$$

利用单纯形法,我们就能很快得出线性松弛问题的最优解是

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{5}{6}, 1, 0, 1\right), \quad Z = 16\frac{1}{2}$$

因此,对原 0-1 整数规划问题的所有可行解都有 $Z \leq 16\frac{1}{2}$ (因为这些解是线性松弛问题的可行解的子集)。事实上,正如下文总结所述, $16\frac{1}{2}$ 这个上限可以下调至 16, 因为目标函数的所有系数都是整数,所有的整数解必定产生整数值 Z 。

原问题的边界值: $Z \leq 16$ 。

我们以同样的方式求得两个子问题的边界值。对于子问题 1, 固定变量 $x_1=0$, 这很容易在线性规划松弛式中通过加入约束 $x_1 \leq 0$ 得到。因为将其同现有约束 $0 \leq x_1 \leq 1$ 结合, 得到 $x_1=0$ 。类似的, 对于子问题 2, 当固定变量 $x_1=1$, 即在线性规划松弛式中加入约束 $x_1 \geq 1$ 。应用单纯形法可以求得对这些线性规划松弛问题的最优解, 如下所示。

子问题 1 的松弛问题: (5) $x_1 \leq 0, 0 \leq x_j \leq 1$, 对 $j=1, 2, 3, 4$

最优解: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 0, 1), Z=9$

子问题 2 的线性松弛问题: (5) $x_1 \geq 1, 0 \leq x_j \leq 1$, 对 $j=1, 2, 3, 4$

最优解: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(1, \frac{4}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$

$$Z = 16\frac{1}{5}$$

则子问题 1 的边界值为: $Z \leq 9$

子问题 2 的边界值为: $Z \leq 16$

图 11.5 汇总了这些结果, 节点下方的数字即为边界值, 而边界值下方则为线性松弛问题的最

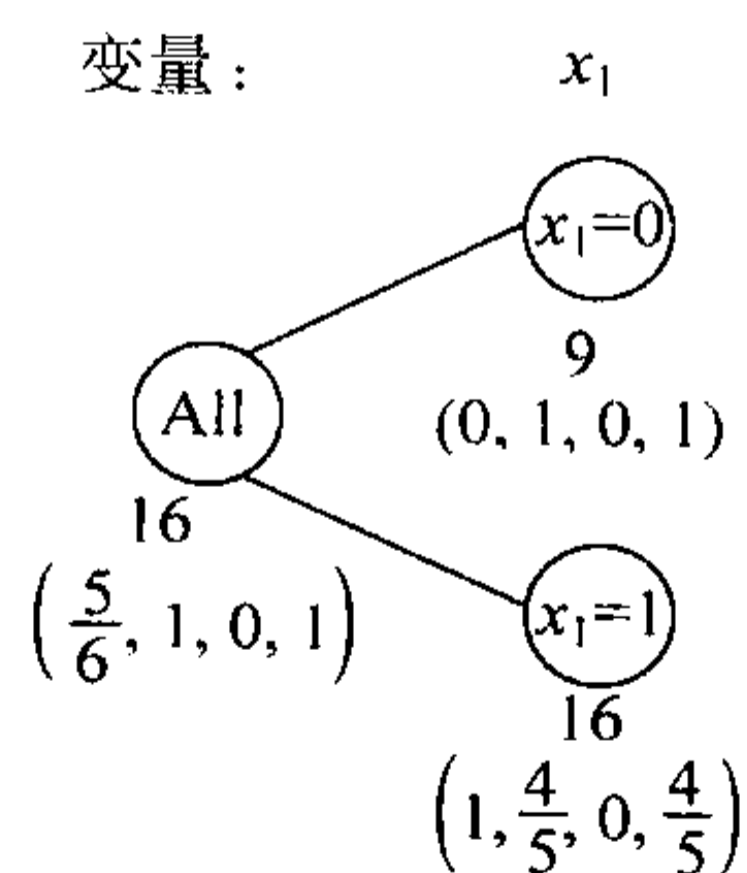


图 11.5 对 11.1 节中的例子应用 0-1 整数规划的分支定界法进行第一次迭代分支后产生的边界值

优解。

剪枝

子问题可采用以下三种方式处理(剪枝),以避免进一步的考查。

第一种方式可通过图 11.5 中 $x_1=0$ 节点处子问题 1 的结果看出。注意,它的线性松弛问题的(唯一)最优解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 0, 1)$ 是整数解。因此该解也必定是子问题 1 的最优解。这个解及其 Z 值作为原问题的现有最佳可行解(incumbent)(到目前为止最好的可行解)保留下来。该值被标注为

$$Z^* = \text{当前现有最佳可行解的 } Z \text{ 值}$$

所以此时 $Z^* = 9$ 。一旦解被保留,就不必再从 $x_1=0$ 节点分支进一步考虑子问题 1, 因为继续这样做,所得出的其他可行解都劣于现有最佳可行解,我们对这样的解并无兴趣。子问题 1 已被解决,我们就剪枝(fathom)(舍弃)子问题 1 了。

以上的结果表明了另一种重要的剪枝测试。一旦 $Z^* = 9$,就没有理由再进一步讨论边界值小于等于 9 的子问题,因为这样的子问题不含有比现有最佳可行解更好的可行解。一般而言,当子问题的边界值小于等于 Z^* 时,就可剪枝。

这样的结果并没有在本例的此次迭代中发生,因为子问题 2 的边界值 16 大于 9。然而,它却有可能在此子问题的后代(descendants)(从该子问题分支而成的新的更小的子问题,或者从接下来的后代更进一步产生的分支)中出现。而且,采用这种方式,一旦发现新的比现有最佳可行解产生更大的 Z^* 值的解,它就能很容易被剪枝。

第三种剪枝的方式十分直截了当。如果利用单纯形法发现某个子问题的线性松弛问题没有可行解,则该子问题本身必不含有可行解。那么它可以被舍弃(剪枝)。

在这三种情况下,只有那些有可能含有比当前的现有最佳可行解更好的可行解的子问题才被保留下来进一步探查,我们就是采用这样的方式来指导搜寻最优解的过程的。

剪枝测试总结

在下列情况下,子问题可被剪枝(不必进一步考查)。

测试 1: 它的边界值 $\leq Z^*$ 。

或

测试 2: 它的线性松弛问题不含可行解。

或

测试 3: 它的线性松弛问题的最优解是整数(如果此解比现有最佳可行解更好,则它成为新的现有最佳可行解,测试 1 以新的更大的 Z 值重新应用于所有未被剪枝的子问题)。

图 11.6 中的求解树汇总了对子问题 1 和子问题 2 进行这三项测试的结果。 $x_1=0$ 节点旁边的 $F(3)$ 表明只有子问题 1 由于测试 3 而被剪枝。所产生的现有最佳可行解标注在节点下方。

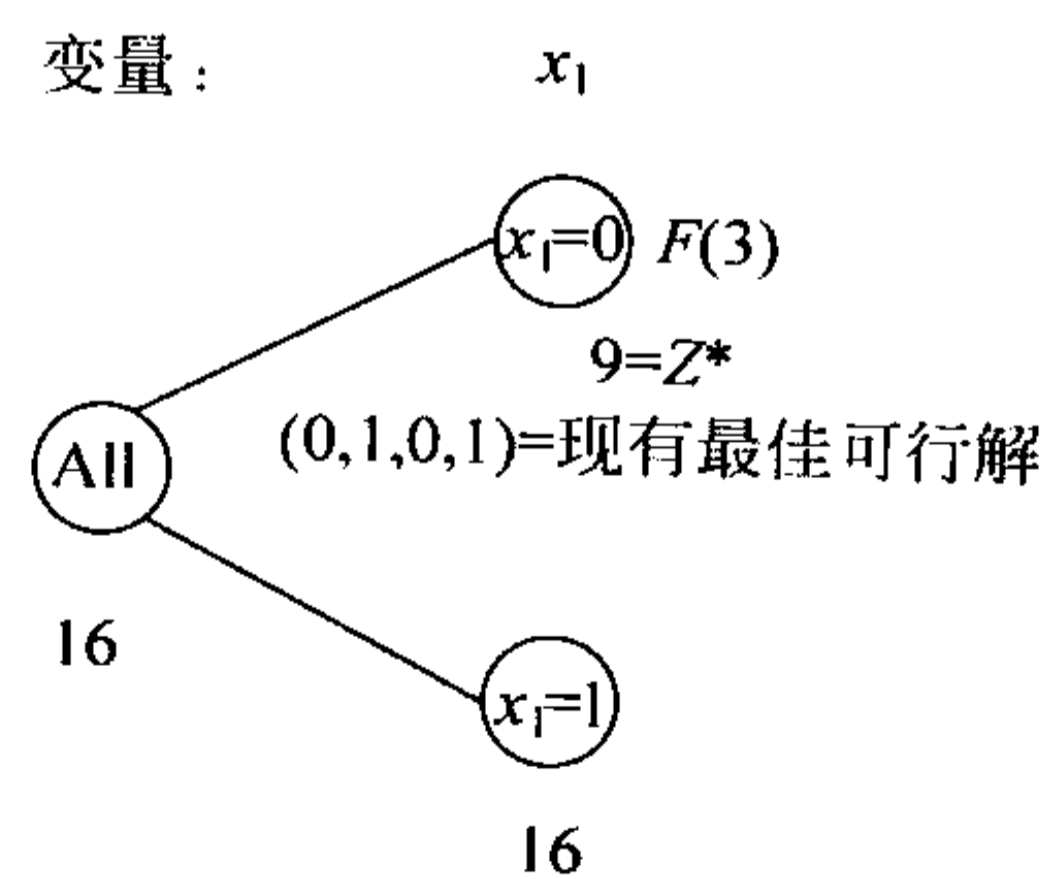


图 11.6 对 11.1 节中的例子应用 0-1 整数规划的分支定界法进行第一次迭代分支后产生的求解树

下一次迭代将显示这三项测试的成功应用。不过,继续这个例子之前,我们先对应用于 0-1 整数规划问题的这种算法做个总结(此算法假定目标函数为求最大化,目标函数中的所有系数都是整数,为简化起见,用来产生分支的变量的顺序为 x_1, x_2, \dots, x_n 用以代替前面讲到的较复杂的选择分支变量的方法)。

0-1 整数规划问题的分支定界算法总结

初始化: 设 $Z^* = -\infty$ 。对原问题进行下文所述的定界、剪枝、最优性测试。如果没有被剪枝,则把该问题归类为进行以下的一次完整迭代的保留下来的子问题。

每次迭代的步骤:

1. 分支: 从这些保留下来的(未被剪枝的)子问题中,选择最近建立的子问题(并不是选择具有最大边界值的子问题)。固定下一个变量(分支变量)为 0 或 1,从而在对应于这个子问题的节点处,分支建立两个新的子问题。

2. 定界: 对于每一个新的子问题,利用单纯形法获得它的线性松弛问题的边界值,对其 Z 值向下取整得到最优解。

3. 剪枝: 对于每一个新的子问题,应用如上所述的三种剪枝测试,舍弃那些被剪枝的子问题。

最优性测试: 当没有保留下来的子问题时,测试结束;当前的现有最佳可行解即是最优的。^① 否则,返回进行新的迭代。

该算法的分支步骤注定要引起争议: 为什么要这样选取将被分支的子问题。按理来说,应采用的方案并不采用,是选择那些具有最好边界值的保留下来的子问题,因为这些子问题最有可能含有原问题的最优解。采用选择最近建立的子问题的方案,是因为线性松弛问题在定边界步骤被求解。不是每次都从头进行单纯形法计算,算法执行的规模大时,每个线性松弛问题一般是通过再优化而得以解决的。再优化包括修改前一个线性松弛问题的最终单纯形表,因为模型只有少许不同(正如灵敏度分析一样),然后可能要采用对偶单纯形法进行几次迭代。如果前后模型关系紧密的话,再优化会比从头进行快得多。在遵守分支规则的情况下,前后模型紧密相关;但如果你通过采用选择最好边界值的子问题,绕过求解树,则前后模型并不相关。

完成示例

接下来的迭代模式与前文所述的第一次迭代非常相似,除了剪枝发生的方式。因此我们简单地介绍分支和定界步骤,而把精力放在剪枝步骤。

第二次迭代

图 11.6 中唯一保留下来的子问题对应于 $x_1 = 1$ 的节点,所以我们从这个节点分支,产生以下两个新的子问题。

子问题 3:

固定 $x_1 = 1, x_2 = 1$, 则相应的子问题为

^① 如果没有现有最佳可行解,那么该问题没有可行解。

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 9 + 6x_3 + 4x_4 \\ \text{s. t.} \quad & \\ (1) \quad & 5x_3 + 2x_4 \leq 4 \\ (2) \quad & x_3 + x_4 \leq 1 \\ (3) \quad & x_3 \leq 1 \\ (4) \quad & x_4 \leq 0 \\ (5) \quad & x_j = 0 \text{ 或 } 1 \quad (j = 3, 4) \end{aligned}$$

子问题 4:

固定 $x_1 = 1, x_2 = 0$, 则相应的子问题为

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 14 + 6x_3 + 4x_4 \\ \text{s. t.} \quad & \\ (1) \quad & 5x_3 + 2x_4 \leq 1 \\ (2) \quad & x_3 + x_4 \leq 1 \\ (3) \quad & x_3 \leq 1 \\ (4) \quad & x_4 \leq 1 \\ (5) \quad & x_j = 0 \text{ 或 } 1 \quad (j = 3, 4) \end{aligned}$$

这些子问题的线性松弛问题可通过把约束条件 $x_j = 0$ 或 1 换成 $0 \leq x_j \leq 1$ 得到。它们的最优解(还有固定的 x_1 和 x_2)是

子问题 3 的线性松弛问题: (5) $x_1 \geq 1, x_2 \leq 0$ 和 $0 \leq x_j \leq 1$ 对 $j = 1, 2, 3, 4$ (x_1, x_2, x_3, x_4) = $(1, 0, \frac{4}{5}, 0)$, $Z = 13 \frac{4}{5}$

子问题 4 的线性松弛问题: (5) $x_1 \geq 1, x_2 \geq 1$ 和 $0 \leq x_j \leq 1$ 对 $j = 1, 2, 3, 4$ (x_1, x_2, x_3, x_4) = $(1, 1, 0, \frac{1}{2})$, $Z = 16$

子问题 3 的边界值: $Z \leq 13$

子问题 4 的边界值: $Z \leq 16$

注意, 这些边界值都大于 $Z^* = 9$, 所以两者都无法由测试 1 被剪枝。这两个线性松弛问题都有可行解(它们存在最优解表明了这一点), 所以也无法由测试 2 被剪枝。测试 3 也一样, 因为两个最优解都包括非整数值的变量。

图 11.7 显示了此时的求解树。每个新节点的右端缺少 F 项, 表明它们都尚未被剪枝。

第三次迭代

到目前为止, 利用该算法, 我们已经建立了四个子问题。子问题 1 被剪枝, 子问题 2 被替换成(拆分成)子问题 3 和子问题 4, 这两个子问题还需进一步考虑。它们是同时建立的, 但子问题 4 ($x_1 = 1, x_2 = 1$) 的边界值较大, 下一次分支从 $(x_1, x_2) = (1, 1)$ 节点开始, 从而产生如下所示的新的子问题(其中第三个约束条件由于不含 x_4 而被删除)。

子问题 5:

固定 $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$, 则相应的子问题为

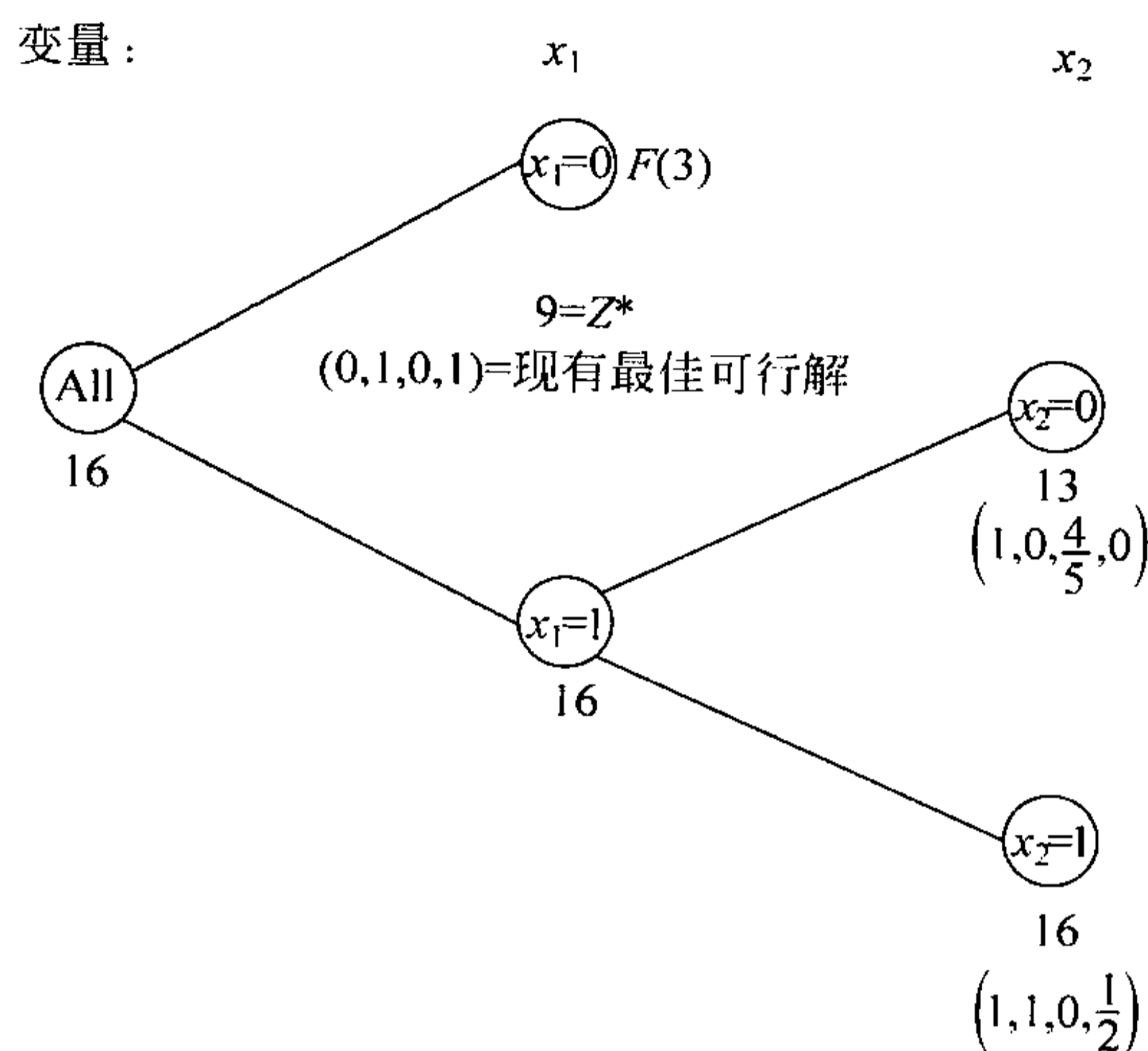


图 11.7 对 11.1 节中的例子应用 0-1 整数规划的分支定界法进行第二次迭代分支后产生的求解树

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 14 + 4x_4 \\ \text{s. t.} \quad & \\ (1) \quad & 2x_4 \leq 1 \\ (2), (4) \quad & x_4 \leq 1 \text{ (两次)} \\ (5) \quad & x_4 = 0 \text{ 或 } 1 \end{aligned}$$

子问题 6:

固定 $x_1=1, x_2=1, x_3=1$, 则相应的子问题为

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 20 + 4x_4 \\ \text{s. t.} \quad & \\ (1) \quad & 2x_4 \leq -4 \\ (2) \quad & x_4 \leq 0 \\ (4) \quad & x_4 \leq 1 \\ (5) \quad & x_4 = 0 \text{ 或 } 1 \end{aligned}$$

相应线性规划问题的松弛式具有约束(5)的不同形式, 其最优解和边界(如果存在的话)表示如下。

子问题 5 的线性规划松弛式

$$(5) \quad x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, x_3 \leq 0 \text{ 和 } 0 \leq x_j \leq 1, \text{ 对 } (j=1, 2, 3, 4)$$

$$\text{最优解: } (x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(1, 1, 0, \frac{1}{2}\right) \quad Z=16$$

边界值: $Z \leq 16$

子问题 6 的线性规划松弛式

$$(5) \quad x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, x_3 \geq 1 \text{ 和 } 0 \leq x_j \leq 1, \text{ 对 } (j=1, 2, 3, 4)$$

最优解: 无, 因为无可行解

边界值: 无

对上述两个子问题,约束(5)松弛的有关形式是先确定 x_1, x_2, x_3 为希望的值,然后要求 $0 \leq x_4 \leq 1$ 。所以对这些子问题的线性规划松弛形式,除了用 $0 \leq x_4 \leq 1$ 替换约束(5)之外,减少了对上面给出的子问题的叙述。将这些线性规划的松弛问题缩减为一个变量的问题(加上固定值的 x_1, x_2, x_3),使得容易看到子问题 5 的线性规划松弛问题的最优解实际上是上面给出的一个。类似的,子问题 6 中线性规划松弛问题中约束 1 同 $0 \leq x_4 \leq 1$ 的组合阻止了任何的可行解。因此,根据测试 2 该子问题被剪枝。然而,子问题 5 不符合测试 2,也不符合测试 1 ($16 > 9$) 和测试 3 ($x_4 = \frac{1}{2}$ 不是整数),所以尚需留待考查。

这样我们就得出了如图 11.8 所示的求解树。

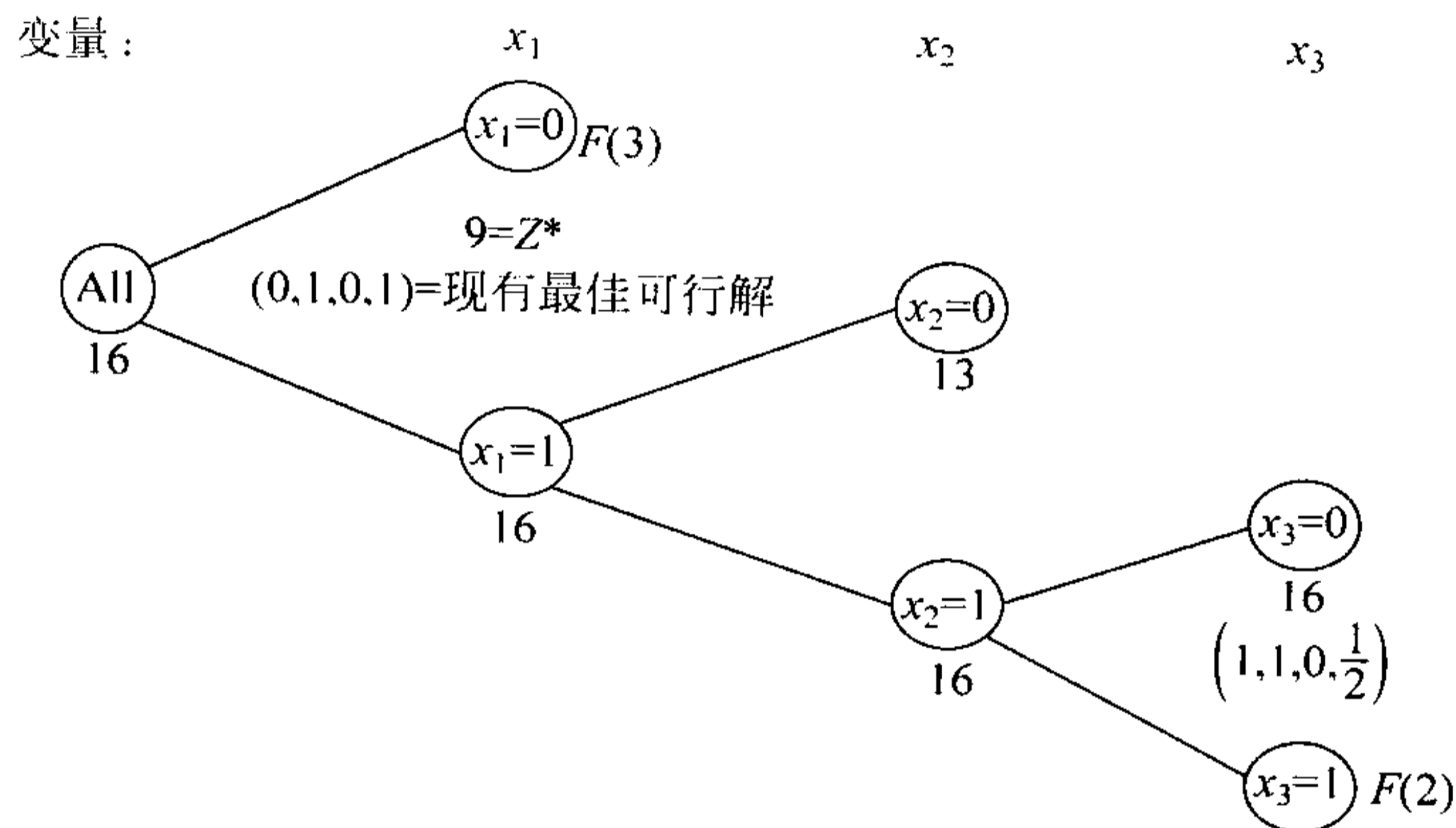


图 11.8 对 11.1 节中的例子应用 0-1 整数规划的分支定界法进行第三次迭代分支后产生的求解树

第四次迭代

对应图 11.8 中的节点(1,0)和节点(1,1,0)的子问题尚需考查,但后者较晚建立,所以它被选中用于下次分支。由于分支变量 x_4 是最后一个变量,固定它的值为 0 或 1 事实上已经产生了单一解,而不是还需计算的子问题。这些单一解是

$$x_4 = 0: (x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 0, 0) \text{ 是可行解, } Z = 14$$

$$x_4 = 1: (x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 0, 1) \text{ 不是可行解}$$

进行剪枝测试后,我们发现第一个解符合测试 3,而第二个解符合测试 2。而且,第一个可行解比现有最佳可行解更优($14 > 9$),所以它成为新的现有最佳可行解, $Z^* = 14$ 。

由于我们已经找到一个新的现有最佳可行解,则用新的 Z^* 值对保留下来的位于节点(1,0)的子问题进行剪枝测试 1。

子问题 3:

$$\text{边界值} = 13 \leq Z^* = 14$$

因此,该子问题被剪枝。

由此得出如图 11.9 所示的求解树。注意,已经不存在保留下来(未被剪枝)的子问题了。最后,最优性测试表明当前的现有最佳可行解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 1, 0, 0)$ 是最优解。本题至此完成。

在 OR Tutor 中包含了应用这个算法的另一个例子。同样,在 IOR Tutorial 上包含了执行这个算法的交互式程序。与前几章一样,本章的 OR Courseware 中的 Excel,

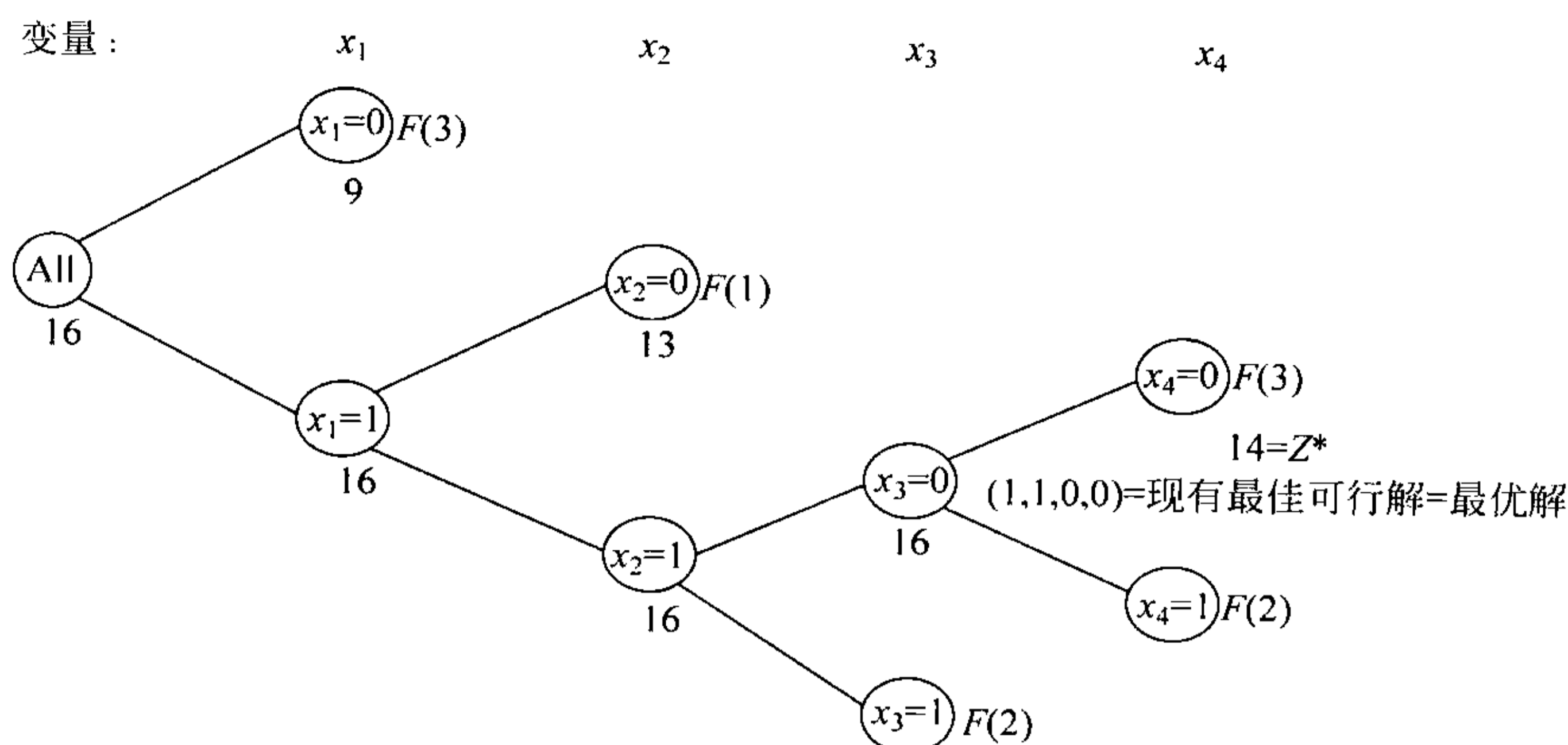


图 11.9 对 11.1 节中的例子应用 0-1 整数规划的分支定界法进行最后一次(第四次)迭代分支后产生的求解树

LINGO/LINDO 和 MPL/CPLEX 文件会说明这些软件包的学生版如何被用于本章的各个例子。它们用于 BIP 的算法均同上面描述的类似^①。

分支定界法的其他方案

本节介绍了求解 0-1 整数规划问题的分支定界法的基本算法。分支定界法的总体框架提供了很大的灵活性,使得可对给定类型的问题,如 0-1 整数规划,设计具体的算法。有多种方案可供选择,要得到效率高的算法要求按照问题的特定结构设计特定的算法。

每种分支定界算法都包括基本的三步骤:分支、定界和剪枝。灵活性体现在这些步骤是如何实施的。

分支包括选择一个保留下来的子问题,并把它拆分成小问题。灵活性就蕴涵在选择和拆分的策略中。0-1 整数规划算法选择最近建立的子问题,是因为从上一个子问题开始,对每个线性松弛问题进行再优化效率非常高。选择具有最好边界值的子问题也是非常受欢迎的策略,因为它趋向于更快地产生更好的现有最佳可行解和更多的剪枝。也可以把这两种策略结合起来。拆分通常(但并不总是)采取选择某个分支变量,然后赋予单一值(如我们的 0-1 整数规划算法)或指定取值区间(如下一节介绍的算法)的方式。更复杂的算法通常采用选择促使更早剪枝的分支变量的策略。较之简单地按 BIP 算法规则依据变量 x_1, x_2, \dots, x_n 的自然排序,上述选择分支的方法效率通常要高得多。例如,选择分支变量的简单规则的一个主要缺点是:假定这个变量在已分支子问题的线性规划松弛问题的最优解中取整数值,则固定该变量为同一整数值的下一个子问题对线性规划松弛问题具有相同的最优解,因此对将要进行的剪枝无任何进展。所以更具战略性的选择分支变量的方案是选择在现有子问题的线性规划松弛问题的最优解中其值离已有整数最远的变量。

定界通常是通过求解松弛问题来完成的。有多种形成松弛问题的方式。比如,采用拉格朗日松弛方式(Lagrangian relaxation),具体是,除了那些易于处理的约束以外,删除

^① LINGO, LINDO 和 CPLEX 的专业版本,通常按 11.8 节描述的各类非常复杂的算法求解 BIP 问题。

整个函数约束集 $Ax \leq b$ (矩阵形式), 然后, 目标函数

$$\max \quad Z = cx$$

替换成

$$\max \quad Z_R = cx - \lambda (Ax - b)$$

其中, 固定的向量 $\lambda \geq 0$ 。如果 x^* 是原问题的最优解, 它的 $Z \leq Z_R$, 所以求解拉格朗日松弛问题得到的 Z_R 值即是合乎要求的边界值。如果 λ 选得好, 此边界值很可能相当接近最优值 (至少与线性松弛问题的边界值相当)。如果没有任何函数约束, 此松弛问题也能非常快地求解。不足之处是进行剪枝测试 2 和测试 3 (修订后的) 不如线性松弛的效力大。

大体而言, 选择何种松弛方式主要考虑两个方面: 求解速度快, 边界值与最优值接近。缺少哪一方面都不充分。线性松弛之所以受人欢迎就在于它很好地平衡了这两个因素。

偶尔被使用的一种方案是快速求解一个松弛问题, 然后, 如果没有剪枝的情况发生, 以某种方式强化松弛问题的约束条件, 从而获得更接近的边界值。

剪枝一般按照 0-1 整数规划算法中所描述的进行。下文的三条剪枝准则可应用于更广泛的情况。

剪枝准则概要

当某个子问题的松弛问题有以下情况时, 该子问题可被剪枝。

准则 1: 由该子问题的可行解求得的 $Z \leq Z^*$, 或

准则 2: 该子问题没有可行解, 或

准则 3: 已找出该子问题的最优解。

正如 0-1 整数规划算法, 前两条准则大多用于通过求解松弛问题, 获得子问题的边界值, 然后检查边界值是否小于等于 Z^* (测试 1), 或松弛问题是否含有可行解 (测试 2) 的情况。如果松弛问题与子问题仅仅是由于删除 (或放宽) 某些约束而导致的不同, 则准则 3 大多被用来检查松弛问题的最优解是否为子问题的可行解, 如果是, 它必是子问题的最优解。对于其他松弛方式 (如拉格朗日松弛), 还要分析松弛问题的最优解是否也是子问题的最优解。

如果原问题是求最小值而不是最大值, 有两种可选方案。一是以通常的方式转换成求最大值 (见 4.6 节)。二是直接把分支定界法转换成求最小值形式, 此方案要求改变剪枝测试 1 的不等号方向, 从

子问题的边界值 $\leq Z^*$?

变成

子问题的边界值 $\geq Z^*$?

到目前为止, 我们介绍了如何应用分支定界法找出唯一的最优解。然而, 在存在相同最优解的情况下, 有时希望得到所有的最优解, 使我们能够根据未进入数学模型的无形因素做出最终的选择。为找出全部最优解, 你只需把求解过程稍作变动。第一, 把剪枝测试 1 的弱不等号 (子问题的边界值是否 $\leq Z^*$) 变为严格不等号 (子问题的边界值是否 $< Z^*$), 因此如果子问题有与现有最佳可行解相等的可行解, 也不会被剪枝。第二, 如果符合剪枝测试 3, 且子问题的最优解的目标函数值 $Z = Z^*$, 则把此解保存下来, 作为另一个 (相同的)

现有最佳可行解。第三,如果由测试 3 得到一个新的现有最佳可行解(相同的或其他),则检查由该松弛问题所得到的这个最优解是不是唯一的。如果不是,则识别该松弛问题的其他最优解,并检查它们对于此子问题来说,是否也是最优的。如果是,它们也是现有最佳可行解。第四,最优性测试发现不存在保留下来的(未被剪枝的)子问题,那么当前的所有现有最佳可行解就是最优解。

最后,我们发现除了能找到最优解,分支定界法也可用于发现接近最优解,用于该目的时,通常计算量远远小得多。对于某些应用来说,如果一个解的 Z 值足够接近最优解情况下的 Z 值(称为 Z^{**}),就可认为此值足够好了。“足够好”可由以下两种方式之一来定义:

$$Z^{**} - K \leq Z \text{ 或 } (1 - \alpha)Z^{**} \leq Z$$

K, α 为给定的(正的)常数。例如,如果以第二种定义为准,且设 $\alpha = 0.05$,则解要求在距离最优解 5% 附近。因而,假如我们知道当前的现有最佳可行解(Z^*)满足

$$Z^{**} - K \leq Z^* \text{ 或 } (1 - \alpha) * Z^{**} \leq Z^*$$

则求解过程可结束,选择此现有最佳可行解作为接近最优解。虽然求解过程实际上并未识别出最优解及其相应的 Z^{**} ,但是如果这个(未知的)解是当前所考查的子问题的可行解(也是最优解),那么由剪枝测试 1 就得出了上界,如

$$Z^{**} \leq \text{边界值}$$

所以

$$\text{边界值} - K \leq Z^* \text{ 或 } (1 - \alpha) \text{边界值} \leq Z^*$$

必然使上述不等式成立。即使此解不是当前子问题的可行解,仍然可求得此子问题最优解的 Z 作为上界。因此,满足这两个不等式之一就足以剪去此子问题,因为现有最佳可行解已足够接近子问题的最优解。

因此,为求得足够接近以至于可当成最优结果的解,只需对通常的分支定界法作个改变。这个改变就是把子问题通常的剪枝测试 1

$$\text{边界值} \leq Z^* ?$$

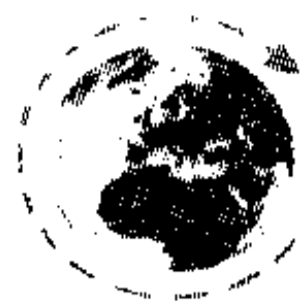
替换成

$$\text{边界值} - K \leq Z^* ?$$

或

$$(1 - \alpha)(\text{边界值}) \leq Z^* ?$$

然后在测试 3 之后执行这项测试(因此其 $Z > Z^*$ 的可行解仍被当作新的现有最佳可行解)。较弱的测试 1 就已足够的原因在于无论子问题的(未知的)最优解的 Z 值多么接近子问题的边界值,现有最佳可行解仍然足够接近此解(如果仍然保持不等关系)以至于该子问题并不需进一步考查。当不存在保留下来的子问题时,当前的现有最佳可行解就是希望得到的接近最优解。新的剪枝测试(二者选一的形式)使得剪枝更容易发生,所以算法会运行得更快。对于大问题,这种加速可能使得原本不会终止的求解过程最终能得到保证接近最优的解。对实践中出现的非常大的问题,因为模型毕竟是实际问题的理想表达,因此找出一个对实际问题已接近最优的解就可以了,在实践中这种走捷径的方法已经比较完美。



11.7 用于混合整数规划的分支定界算法

我们来考查一般混合整数规划问题。在此类问题中,某些变量(假定为 I 个)只能取整数值(未必是 0 和 1),其他变量为普通的连续变量。为了便于标记,我们按顺序安排这些变量,使得前 I 个变量为整数变量。因此,这类问题的一般形式为

$$\max Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

s. t.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i & (i = 1, 2, \dots, m) \\ x_j \geq 0 & (j = 1, 2, \dots, n) \\ x_j \text{ 为整数} & (j = 1, 2, \dots, I; I \leq n) \end{cases}$$

(当 $I=n$ 时,该问题就变成纯整数规划问题。)

对基本的分支定界算法进行一番改进之后,我们就得到了求解混合整数规划问题的标准途径。算法的基本结构是由 R. J. Dakin^① 在 A. H. Land and A. G. Doig^② 的开创性的分支定界算法基础上发展而来的。

算法在结构上与前文所述的 0-1 整数规划算法十分类似。定界和剪枝的基础仍然是求解线性松弛问题。实际上,只需对 0-1 整数规划算法作四处改变,即可处理由 0-1 扩大至一般整数变量和由纯整数规划扩大至混合整数规划的问题。

第一处改变为分支变量的选择。此前,下一个变量是按照自然顺序 x_1, x_2, \dots, x_n 自动选取的。现在,所选的变量是那些在当前子问题的线性松弛问题最优解中,取值为非整数的整数变量。我们的选择策略是在这些变量中按照自然顺序选取(商用算法一般采用更复杂的策略)。

第二处改变为对那些用以产生新的子问题的分支变量的赋值。此前,对应于两个新的子问题,0-1 变量被分别固定为 0 或 1。现在,一般的整数变量有大量的可能值,通过在变量的每个值上,产生一个子问题的方式将无多大效率。因此,替代的方案是指定变量的两个取值区间,从而仅仅产生两个新的子问题(与前面一样)。

为说明此过程,令 x_j 为当前的分支变量, x_j^* 为当前子问题的线性松弛问题最优解中 x_j 的取值(非整数)。采用方括号标记为

$$[x_j^*] = \text{最大的整数} \leq x_j^*$$

我们就得到这两个新的子问题中分支变量各自的取值区间

① R. J. Dakin, "A Tree Search Algorithm for Mixed Integer Programming Problems", *Computer Journal*, 8 (3): 250-255, 1965.

② A. H. Land and A. G. Doig, "An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems", *Econometrica*, 28: 497-520, 1960.

$$x_j \leq [x_j^*] \text{ 和 } x_j \geq [x_j^*] + 1$$

每个不等式成了新的子问题的附加约束。例如,如果 $x_j^* = 3\frac{1}{2}$, 则

$$x_j \leq 3 \quad \text{和} \quad x_j \geq 4$$

就成了新的子问题的各自的附加约束。

以上两个改变结合起来之后,就出现了有趣的递归分支变量的现象。如图 11.10 所示,令上面例子中 $x_j^* = 3\frac{1}{2}$ 的 $j=1$, 考查 $x_1 \leq 3$ 的子问题。求解该子问题的某个后代问题的线性松弛问题之后,假设得到 $x_1^* = 1\frac{1}{4}$, 则 x_1 作为分支变量递归出现,所建立的两个新的子问题各自多了附加约束 $x_1 \leq 1$ 和 $x_1 \geq 2$ (以及此前的附加约束 $x_1 \leq 3$)。然后,求解 $x_1 \leq 1$ 子问题的某个后代问题的线性松弛问题之后,假定得到 $x_1^* = \frac{3}{4}$, 则 x_1 又作为分支变量递归出现了。新建立的两个子问题分别有 $x_1 = 0$ (因为 $x_1 \leq 0$ 的约束及 x_1 的非负约束) 和 $x_1 = 1$ (因为 $x_1 \geq 1$ 的约束及此前 $x_1 \leq 1$ 的约束)。

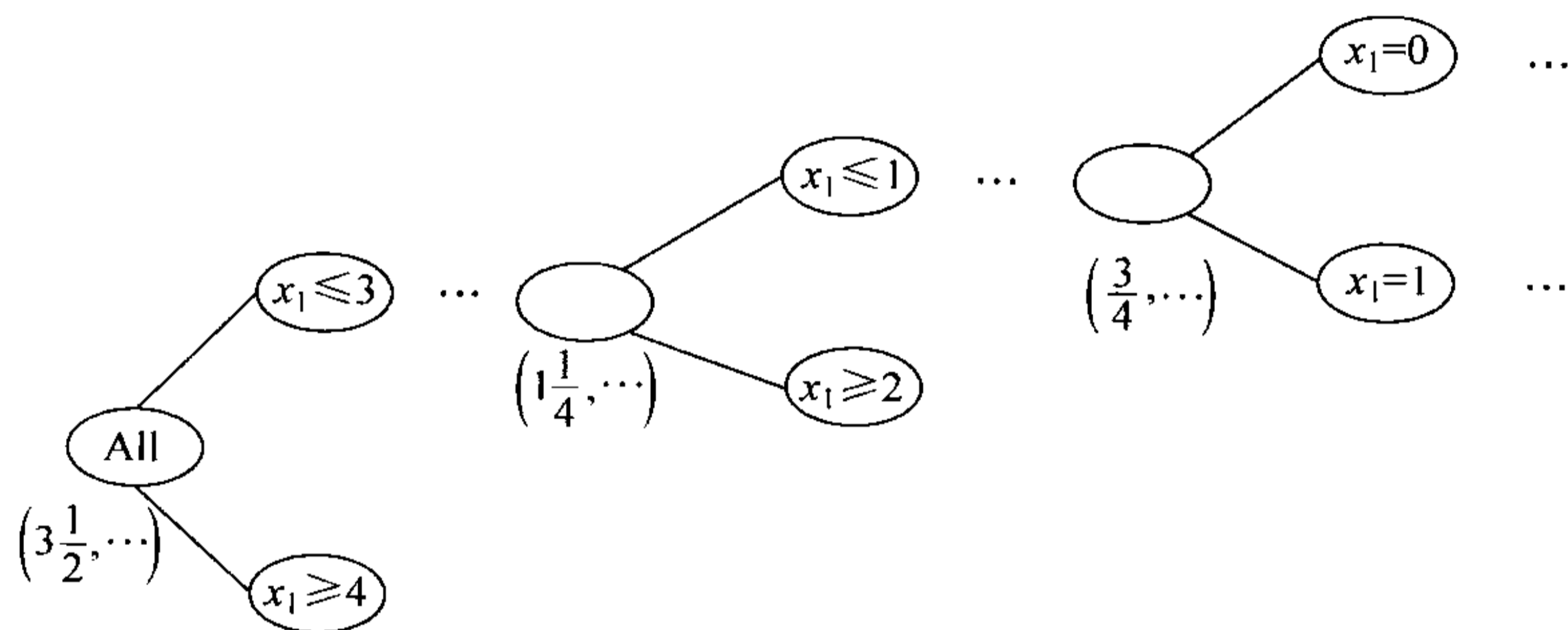


图 11.10 递归分支变量现象,该图中 x_1 三次成为分支变量,因为它在三个节点处的线性松弛问题最优解中取值都为非整数

第三处改变为定界步。此前,对于纯整数规划问题和系数为整数的目标函数,子问题的线性松弛问题最优解的 Z 值向下取整得到边界值,因为任何可行解都产生整数值 Z 。现在有些变量并不限定取整,使得 Z 值不必向下取值,本身即为边界值。

第四处(最后一处)改变为剪枝测试 3。此前,对于纯整数规划问题,测试为子问题的线性松弛问题最优解是整数,由于已保证解是可行解,所以它也是子问题的最优解。现在,对于混合整数规划问题,测试只要求那些整数变量在子问题的线性松弛问题的最优解中为整数,因为这足以保证解是可行解,从而它也是子问题的最优解。

把这四处改变与前面的 0-1 整数规划算法的总结结合起来,就产生了以下的求解混合整数规划问题的算法的总结。

(同前面一样,这个总结假定目标函数是求最大化,但对求最小化时当剪枝测试 1 时需改变不等式的不等号方向。)

混合整数规划的分支定界算法总结

初始化：设 $Z^* = -\infty$ 。对原问题进行下文所述的定界、剪枝、最优性测试。如果没有被剪枝，则把该问题归类为保留下来的进行以下一次完整迭代的子问题。

应用案例

总部位于得克萨斯州休斯敦的 Waste Management 公司(财富 100 强企业)是北美提供综合废物管理服务的一家领袖级企业。该公司的运营网络包括 293 个垃圾处理站、16 家废物转化为能源的工厂、72 个垃圾气体转化能源的设备、146 家再循环工厂、346 个转换站和 435 个回收仓库,服务对象包括美国和加拿大的 2 000 万家庭顾客和 200 万企业顾客。

公司的收集和转运车辆每天需要行驶近 2 万条路径。由于每辆车每年的成本接近 12 万美元,公司管理层希望有一套综合路径管理系统使每条路径尽可能有效。因此,成立了一个包括几名咨询师的运筹学团队以解决该问题。

该团队开发的路径管理系统的核心是一个巨大的混合 BIP 模型,该模型用于优化分配给每个收集转化车辆的路径。尽管目标函数考虑了很多因素,主要的目标还是最小化整个行驶时间。主要的决策变量是二元变量,等于 1 时表示分配给特殊车辆的路径包括一个特殊的路段,反之为 0。一个地理信息系统(GIS)能够提供两点间的距离和需要的时间。所有这些功能均被写入一个基于 Web 的 Java 程序,并且与公司的其他系统连接起来。

据估计,在 5 年内,该综合路径管理系统的应用将增加公司现金流近 6.48 亿美元,很大程度上是因为在该 5 年期限内能够节省运营费用近 4.98 亿美元。同时,该系统还能提供更好的顾客服务。

资料来源: S. Sahoo, S. Kim, B. I. Kim, B. Krass, and A. Popov, Jr.: "Routing Optimization for Waste Management," *Interfaces*, 35(1): 24-36, Jan.-Feb. 2005. (以下网址提供本文的链接: www.mhhe.com/hillier.)

每次迭代的步骤:

1. 分支: 从这些保留下来的(未被剪枝的)子问题中,选择最近建立的子问题(而不是选择具有最大边界值的子问题)。从那些在子问题的线性松弛问题最优解为非整数值的整数变量中,按照自然顺序选取第一个变量作为分支变量,设此变量为 x_j 。在该解中取值为 x_j^* 。在这个子问题的节点外,附加各自的约束 $x_j \leq [x_j^*]$ 和 $x_j \geq [x_j^*] + 1$,从而分支建立两个新的子问题。

2. 定界: 对于每个新的子问题,利用单纯形法(再优化时利用对偶单纯形法)获得它的线性松弛问题的边界值,该 Z 值作为最优解。

3. 剪枝: 对于每个新的子问题,应用如下所述的三种剪枝测试,舍弃那些被剪枝的子问题。

测试 1: 它的边界值 $\leq Z^*$, Z^* 是当前的现有最佳可行解的 Z 值。

测试 2: 它的线性松弛问题不含可行解。

测试 3: 它的线性松弛问题最优解中的整数变量取值为整(如果此解比现有最佳可行解更好,则它成为新的现有最佳可行解,测试 1 以新的更大的 Z 值重新应用于所有未被剪枝的子问题)。

最优性测试：当没有保留下来子问题时，测试结束；当前的现有最佳可行解即是最优的。^① 否则，返回进行新的迭代。

混合整数规划示例

现在我们通过以下混合整数规划问题来介绍这个算法。

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_4 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + 5x_3 \leq 10 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ & 6x_1 - 5x_2 \leq 0 \\ & -x_1 + 2x_3 - 2x_4 \leq 3 \\ & x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4) \\ & x_j \text{ 为整数 } (j = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

注意到整数变量为 $I=3$ ，所以 x_4 是唯一的连续变量。

初始化

设 $Z^* = -\infty$ ，删除 x_j 是整数变量的约束，就形成了该子问题的线性松弛问题，利用单纯形法求得该松弛问题的最优解，如下

$$\text{原问题的线性松弛问题：} (x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 0\right), Z = 14\frac{1}{4}$$

由于它是可行解，并且该最优解含有取值为非整数的整数变量，所以原问题并未被剪枝，因而应用此算法进行如下的一次完整迭代。

第一次迭代

在线性松弛问题的最优解中，第一个取值为非整数的整数变量为 $x_1 = \frac{5}{4}$ ，所以 x_1 就作为分支变量。以此分支变量从 All 节点（所有可行解）分支生成下面两个子问题。

子问题 1：

原问题加上附加约束

$$x_1 \leq 1$$

子问题 2：

原问题加上附加约束

$$x_1 \geq 2$$

再次删除整数约束，求解这两个子问题的线性松弛问题，得以下结果。

$$\text{子问题 1 的线性松弛问题：} (x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(1, \frac{6}{5}, \frac{9}{5}, 0\right), Z = 14\frac{1}{5}$$

$$\text{子问题 1 的边界值：} Z \leq 14\frac{1}{5}$$

子问题 2 的线性松弛问题：无可行解

子问题 2 的结果意味着它由于测试 2 而被剪枝。然而，正如原问题一样，子问题 1 并不符合剪枝的任何测试。

^① 如果没有现有最佳可行解，那么该问题没有可行解。

图 11.11 的求解树汇总了这些结果。

第二次迭代

由于只有一个子问题保留下来,即与图 11.11 中的 $x_1 \leq 1$ 节点相对应的问题,所以下一次分支从此节点开始。检查其线性松弛问题的最优解,我们发现分支变量应为 x_2 , 因为 $x_2 = \frac{6}{5}$ 是第一个取值为非整数的整数变量。附加约束 $x_2 \leq 1$ 或 $x_2 \geq 2$, 产生了以下两个新的子问题。

子问题 3:

原问题加上附加约束

$$x_1 \leq 1, \quad x_2 \leq 1$$

子问题 4:

原问题加上附加约束

$$x_1 \leq 1, \quad x_2 \geq 2$$

求解它们的线性松弛问题,得以下结果。

子问题 3 的线性松弛问题: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{5}{6}, 1, \frac{11}{6}, 0), Z = 14 \frac{1}{6}$

子问题 3 的边界值: $Z \leq 14 \frac{1}{6}$

子问题 4 的线性松弛问题: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{5}{6}, 2, \frac{11}{6}, 0), Z = 12 \frac{1}{6}$

子问题 4 的边界值: $Z \leq 12 \frac{1}{6}$

两个问题的解(可行解)都存在,解中含有取值为非整数的整数变量,所以两个子问题都不被剪枝(测试 1 未起作用,因为 $Z^* = -\infty$ 直至找到第一个现有最佳可行解)。

此时的求解树如图 11.12 所示。

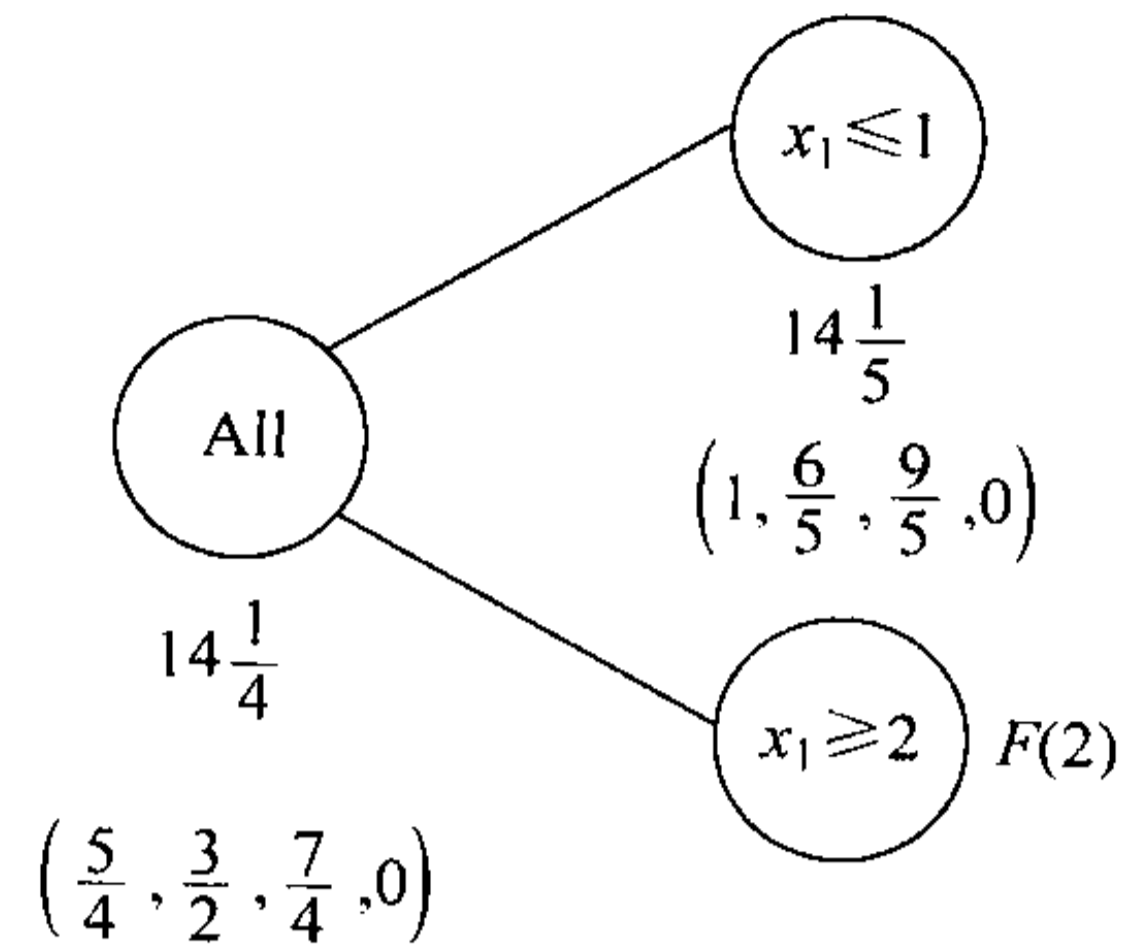


图 11.11 对示例应用混合整数规划的分支定界法进行第一次迭代后产生的求解树

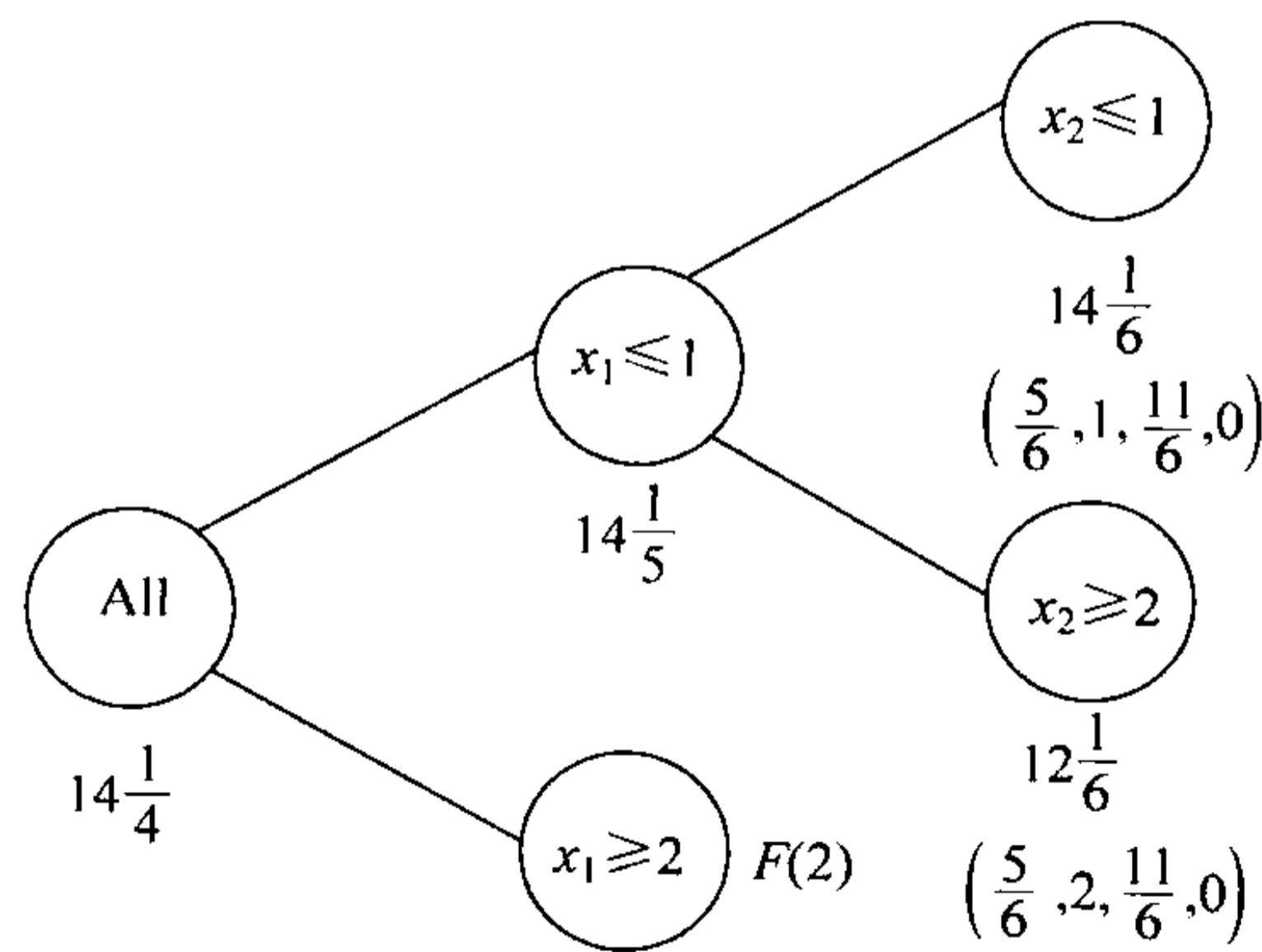


图 11.12 对示例应用混合整数规划的分支定界法进行第一次迭代后产生的求解树

第三次迭代

还剩下两个一同建立的子问题(子问题 3 和子问题 4),最大的一个(子问题 3, $14\frac{1}{6} > 12\frac{1}{6}$) 被选出用于下一次分支。由于 $x_1 = \frac{5}{6}$ 在此最优解中取值为非整数,则其被选为分支变量(注意, x_1 现在是递归的分支变量,它已在第一次迭代时被选中)。这就产生了以下新的子问题。

子问题 5:

原问题加上附加约束

$$\begin{aligned}x_1 &\leq 1 \\x_2 &\leq 1 \\x_1 &\leq 0 \quad (\text{所以 } x_1 = 0)\end{aligned}$$

子问题 6:

原问题加上附加约束

$$\begin{aligned}x_1 &\leq 1 \\x_2 &\leq 1 \\x_1 &\geq 1 \quad (\text{所以 } x_1 = 1)\end{aligned}$$

求解它们的线性松弛问题,得以下结果。

子问题 5 的线性松弛问题: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 2, \frac{1}{2}), Z = 13\frac{1}{2}$

子问题 5 的边界值: $Z \leq 13\frac{1}{2}$

子问题 6 的线性松弛问题: 无可行解

子问题 6 随即因测试 2 而被剪枝。不过,我们发现子问题 5 也可被剪枝。由于所有的整数变量在线性松弛问题的最优解($x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 2$)中都取整数值,所以满足测试 3(不必理会 $x_4 = \frac{1}{2}$, 因为 x_4 并不要求取值为整)。原问题的可行解就是我们的第一个现有最佳可行解。

现有最佳可行解 = $(0, 0, 2, \frac{1}{2}), Z^* = 13\frac{1}{2}$

用新的 Z^* 值去测试另外的一个子问题(子问题 4),结果是有效的。因为它的边界值 $12\frac{1}{6} \leq Z^*$ 。

本次迭代应用三种测试方式,成功地对子问题进行了剪枝。并且,不再有被保留下来的子问题,所以当前的现有最佳可行解是最优的。

$$\text{最优解} = (0, 0, 2, \frac{1}{2}), \quad Z = 13\frac{1}{2}$$

图 11.13 的最终求解树汇总了这些结果。

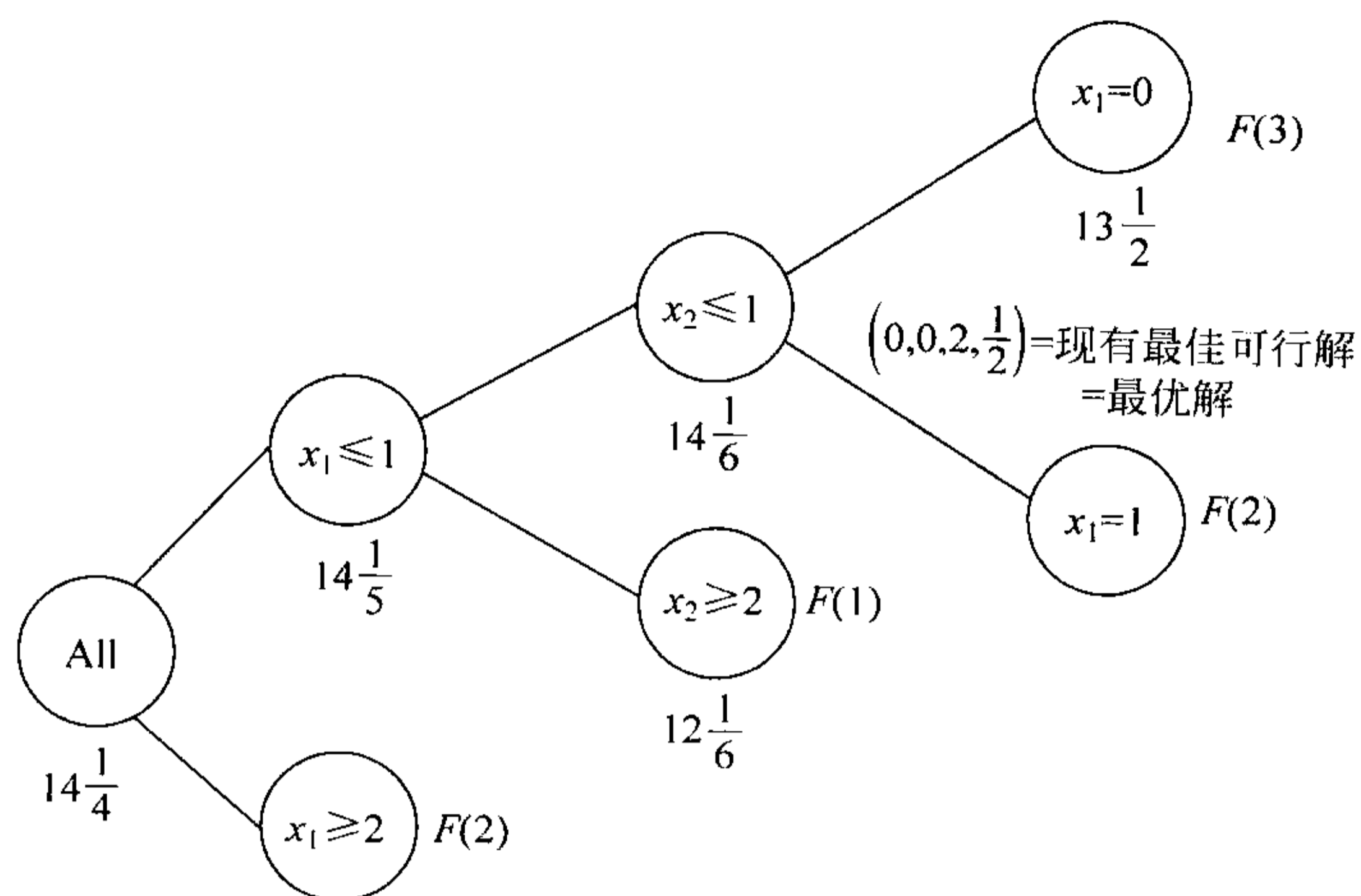
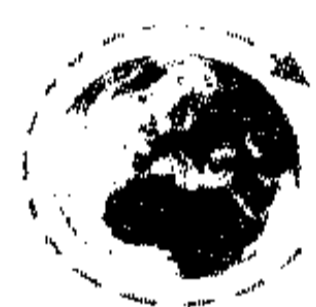


图 11.13 对示例应用混合整数规划的分支定界法进行最后一次(第三次)迭代后产生的求解树



11.8 解 0-1 整数规划的分支-切割法

由于整数规划求解方法论取得了显著的进步,所以从 20 世纪 80 年代中期开始,整数规划成为运筹学中一个特别活跃的领域。

背景

为正确地看待这些进步,我们先看看历史背景。20 世纪 60 年代至 70 年代初,由于分支定界法的发展和优化,产生了一次大的突破,但随后却停滞不前。虽然小问题(100 个变量以内)能被高效率地解决,但即使略微增大问题规模就很可能使计算时间呈指数级增长,超出了可行范围。在攻克计算时间随问题增大呈指数级增长方面没有多大进展。现实中产生的很多重要的问题无法得到解决。

随着分支-切割法被用于处理 0-1 整数规划问题,20 世纪 80 年代中期迎来了又一次突破。开始有报道说上千个变量的大问题通过这种方法得以解决。这极大地振奋了人心,使得从那时起此方法一直被人们深入地研究。起先,此方法只用于纯 0-1 整数规划问题,不久就被扩展至混合 0-1 整数规划问题。接着是混合整数规划问题。我们只在纯 0-1 整数规划内介绍此方法。

现在分支-切割法已很普遍地应用于有几千个变量的问题,甚至有时也用于几万或几十万变量的问题。正如 11.4 节指出的,这个巨大的进展是由以下三个原因造成的: BIP 算法同后来发展起来的分支-切割法的结合,在 BIP 算法中大量应用的线性规划算法的改进,计算机(包括台式计算机)计算速度的大大加快。

有必要做个提醒。这种算法并不能解决所有的上千个(甚至几百个)变量的 0-1 整数规划问题。很多能解决的纯 0-1 整数规划问题,其系数矩阵是稀疏矩阵,比如说,函数约

束中的系数不为零的只占小部分(可能不超过 5%,甚至不足 1%)。事实上,此方法非常依赖这种稀疏性(幸运的是,现实中的大问题一般具有稀疏性)。而且,除了稀疏性和规模之外,还有其他因素使得难以求解任意一个给定的整数规划问题。对大问题建立整数规划模型还需小心谨慎。

详细地阐述这种算法已超出本书的范围和层次,我们只作简要说明。由于我们只考虑纯 0-1 整数规划情况,接下来的内容中所提及的变量都是 0-1 变量。

该方法主要是结合三种技术^①:自动的问题预处理、割平面的生成,以及巧妙的分支定界技术。你已经很熟悉分支定界技术,所以我们不再详细地介绍它了。以下是其他两种技术的介绍。

对纯 0-1 整数规划问题的自动预处理

自动的问题预处理指的是利用计算机检查用户所建立的整数规划问题的模型,目的是重新构造模型,新的模型能使问题得以快速求解,而不减少可行解。重构可分为以下三类:

1. 固定变量:识别可固定为某个值(0 或 1)的变量,因为它取另外的值无法使包含它的解同时是可行解和最优解。
2. 消除冗余约束:识别并消除冗余约束(满足其他约束后,其自动满足的约束)。
3. 强化约束:以某种方式强化约束可以缩小线性松弛问题的可行域,但并不删减 0-1 整数规划问题的任何可行解。

下面依次介绍这三类重构。

固定变量

以下是固定变量的一般原则。

如果一个变量的某个值无法满足某个约束,即使当其他变量取最好的值去试图满足此约束时,该变量也可以固定地取另一个值。

例如,以下的每一个“ \leq ”约束都可让我们确定 $x_1 = 0$,因为当其他变量取最适合的值(系数为正的取 0,系数为负的取 1)而 $x_1 = 1$ 时,仍然会违反约束条件。

$$3x_1 \leq 2 \Rightarrow x_1 = 0, \text{ 因为 } 3(1) > 2$$

$$3x_1 + x_2 \leq 2 \Rightarrow x_1 = 0, \text{ 因为 } 3(1) + 1(0) > 2$$

$$5x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 2 \Rightarrow x_1 = 0, \text{ 因为 } 5(1) + 1(0) - 2(1) > 2$$

检查任何一个“ \leq ”约束的一般程序是先识别最大正系数的变量,如果该系数和任何一个负系数之和超过右端项,则该变量可固定为 0(一旦固定了变量,程序可重复进行,识别具有最大正系数的变量)。

对“ \geq ”约束进行类似处理,可使我们把变量固定为 1,如下所述。

$$3x_1 \geq 2 \Rightarrow x_1 = 1, \text{ 因为 } 3(0) < 2$$

$$3x_1 + x_2 \geq 2 \Rightarrow x_1 = 1, \text{ 因为 } 3(0) + 1(1) < 2$$

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 2 \Rightarrow x_1 = 1, \text{ 因为 } 3(0) + 1(1) - 2(0) < 2$$

^① 在 11.4 节中简略地提到,近年来还有一些重要的技术出现,比如启发式算法能快速找到好的可行解。

“ \geq ”约束也可使我们固定某变量的取值为 0, 如下所述。

$$x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 1 \Rightarrow x_3 = 0, \text{ 因为 } 1(1) + 1(1) - 2(1) < 1$$

下一个例子表明“ \geq ”约束可使我们固定某个变量为 1, 而另一个变量为 0。

$$3x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 2 \Rightarrow x_1 = 1, \text{ 因为 } 3(0) + 1(1) - 3(0) < 2$$

$$\text{且} \Rightarrow x_3 = 0, \text{ 因为 } 3(1) + 1(1) - 3(1) < 2$$

类似的, 右端项为负的“ \leq ”约束可固定某变量值为 0 或 1。例如, 以下的例子两者都发生。

$$3x_1 - 2x_2 \leq -1 \Rightarrow x_1 = 0, \text{ 因为 } 3(1) - 2(1) > -1$$

$$\text{且} \Rightarrow x_2 = 1, \text{ 因为 } 3(0) - 2(0) > -1$$

通过某个约束而固定某个变量的值有时可引起连锁反应, 将导致通过其他约束而固定其他变量的值。例如看看以下的三个约束。

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 2 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ (如上)}$$

由此

$$x_1 + x_4 + x_5 \leq 1 \Rightarrow x_4 = 0, x_5 = 0$$

于是

$$-x_5 + x_6 \leq 0 \Rightarrow x_6 = 0$$

在某些情况下, 我们可以把一个或多个互斥的约束与另一个约束结合起来以固定某个变量的值, 如下所示。

$$\left. \begin{array}{l} 8x_1 - 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 \leq 2 \\ x_2 + x_3 \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 = 0$$

因为

$$8(1) - \max\{4, 5\}(1) + 3(0) > 2$$

还有别的固定变量的方法, 有些还考虑了优化, 不过我们不准备深入探讨这个话题。

固定变量能显著地缩小问题规模。毫不稀奇的是, 它能减少一半的变量, 免去进一步的考查。

消除冗余约束

通过以下方式能很容易地识别冗余约束。

如果 0-1 变量取最极端的值, 照样能满足约束, 那么此约束即是冗余的, 可以删除。对于“ \leq ”约束, 最极端取值为正系数变量等于 1, 其他变量等于 0 (对于“ \geq ”约束则反过来)。

示例如下:

$$3x_1 + 2x_2 \leq 6 \text{ 是冗余的, 因为 } 3(1) + 2(1) \leq 6$$

$$3x_1 - 2x_2 \leq 3 \text{ 是冗余的, 因为 } 3(1) - 2(0) \leq 3$$

$$3x_1 - 2x_2 \geq -3 \text{ 是冗余的, 因为 } 3(0) - 2(1) \geq -3$$

在大多数情况下, 那些被识别为冗余的约束在原模型中并不冗余, 只是因固定了若干变量的值后才如此。以上所给的固定变量的 11 个例子中, 除了最后一个, 其他都含有一个冗余约束。

强化约束^①

考查以下问题。

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 = 0 \text{ 或 } 1 \end{aligned}$$

该 0-1 整数规划只有以下三个可行解——(0,0), (1,0), (0,1), 最优解是 (1,0), 其 $Z=3$ 。该问题的线性松弛问题的可行域如图 11.14 所示。此线性松弛问题的最优解是 $(1, \frac{2}{3})$, $Z=4\frac{1}{3}$, 与该 0-1 整数规划问题的最优解并不很接近。分支定界法需做不少工作才能得到该 0-1 整数规划问题的最优解。

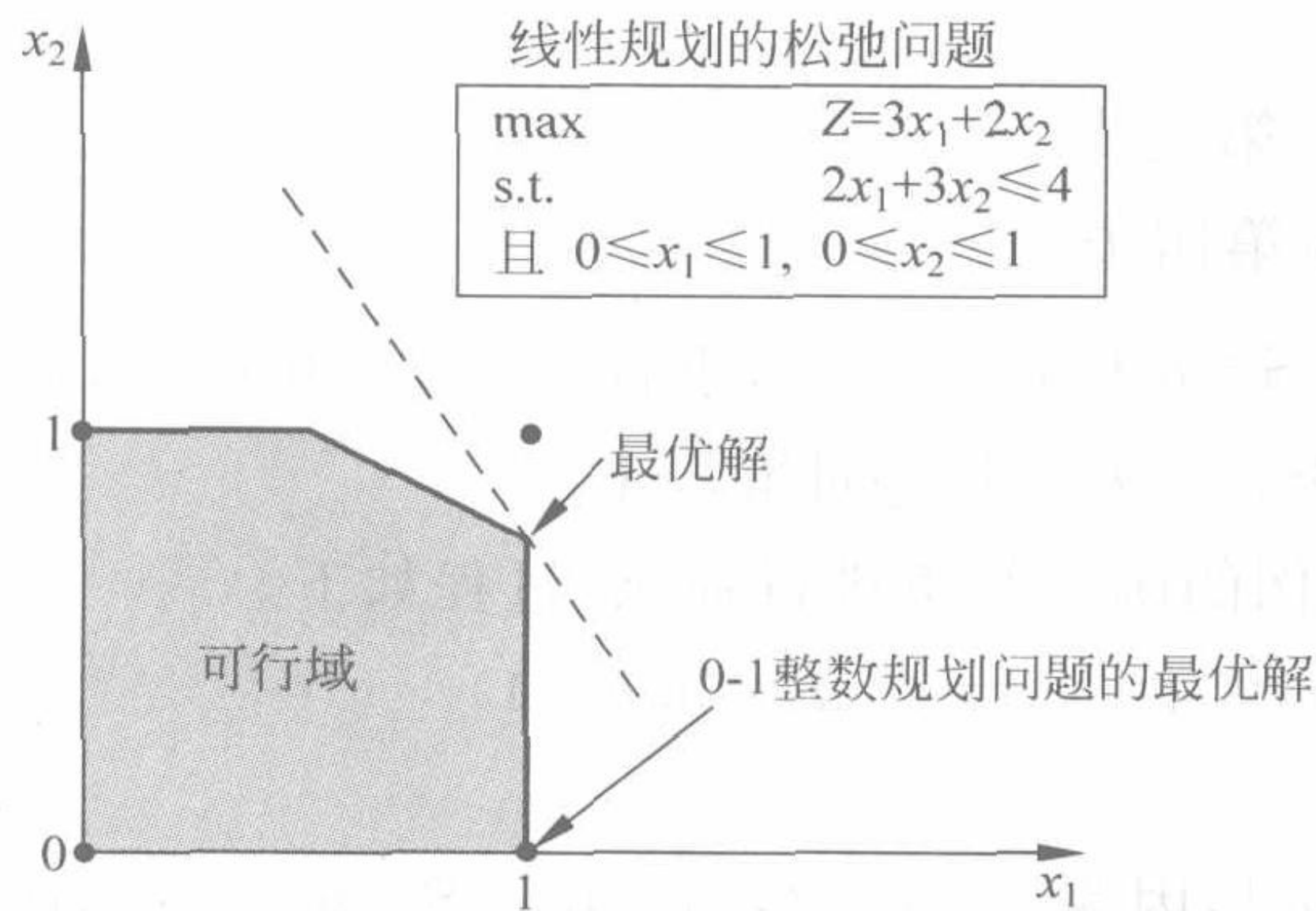


图 11.14 描述强化约束的 0-1 整数规划问题的线性松弛问题(包括可行域和最优解)

现在看看把函数约束 $2x_1 + 3x_2 \leq 4$ 换成 $x_1 + x_2 \leq 1$, 发生了什么变化。该 0-1 整数规划问题的可行解保持不变——(0,0), (1,0), (0,1), 所以最优解仍是 (1,0)。但是, 线性松弛问题的可行域却大大缩小了, 见图 11.15。实际上, 可行域缩小幅度之大以至于线性松弛问题的最优解也是 (1,0), 此时不需额外工作, 就找到了该 0-1 整数规划问题的最优解。

这个例子表明了以某种方式强化约束可缩小线性松弛问题的可行域, 而不减少 0-1 整数规划问题的可行解。对于这类含有两个变量的小问题, 可通过作图法简单求解。然而, 遵循强化约束而不减少 0-1 整数规划问题的可行解的应用原则, 以下的算法程序可应用于含有任意数量变量的任何“ \leq ”约束。

强化一个“ \leq ”约束的步骤

$$\text{约束为 } a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq b$$

1. 计算 $S = \text{所有大于 } 0 \text{ 的 } a_j \text{ 之和}$
2. 找出一个满足 $S < b + |a_j|$ 且非零的 a_j
 - (a) 如果没有, 停止; 此约束无法再被强化。

^① 通常也称为系数缩减。

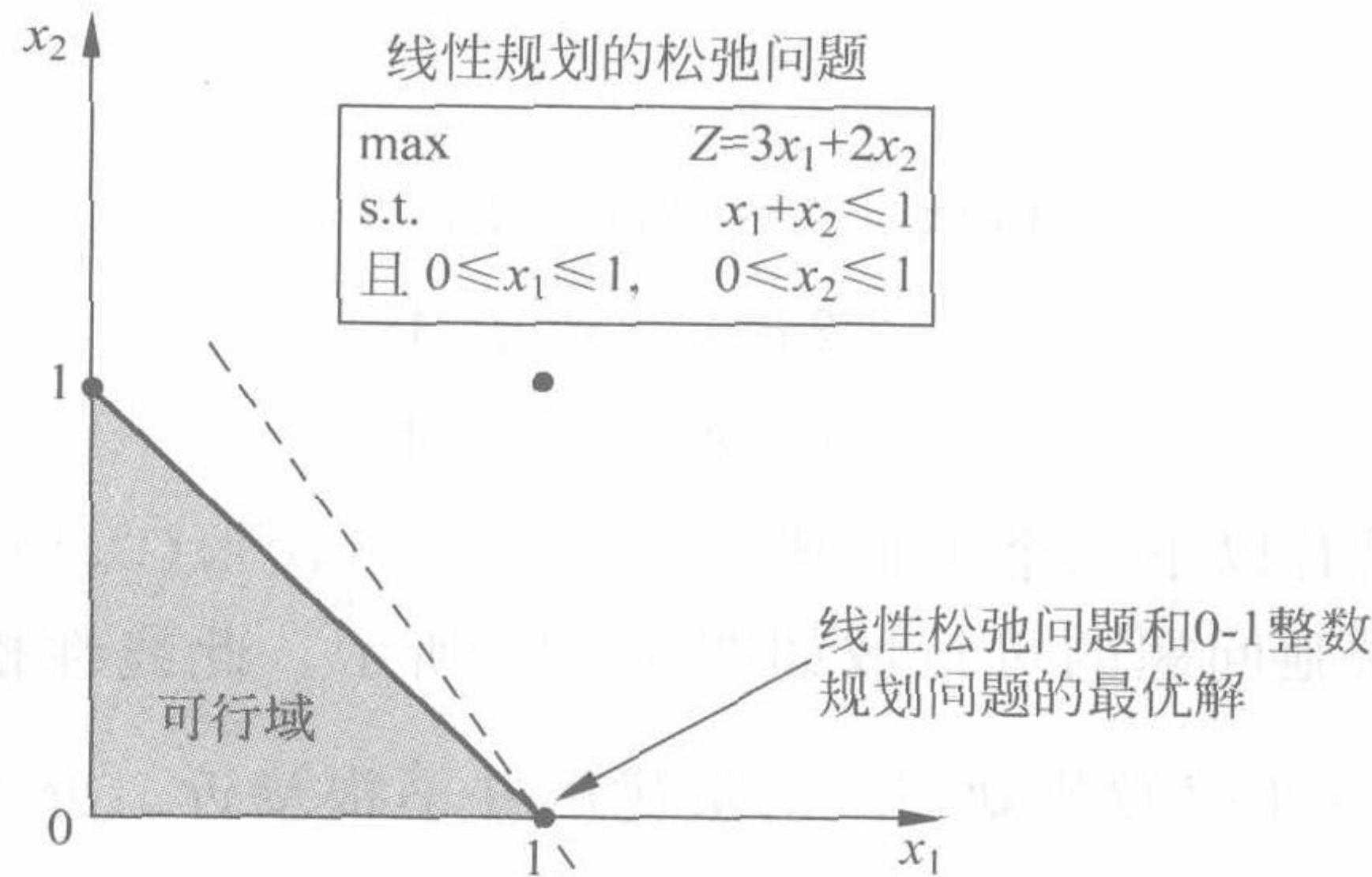


图 11.15 图 11.14 的例子中,强化约束后(从 $2x_1 + 3x_2 \leq 4$ 至 $x_1 + x_2 \leq 1$)的线性松弛问题

(b) 如果 $a_j > 0$, 转至第三步。

(c) 如果 $a_j < 0$, 转至第四步。

3. ($a_j > 0$) 计算 $\bar{a}_j = S - b$ 和 $\bar{b} = S - a_j$, 重置 $a_j = \bar{a}_j$ 和 $b = \bar{b}$, 返回第一步。

4. ($a_j < 0$) 增大 a_j 至 $a_j = b - S$, 返回第一步。

按照这些步骤, 对上例的函数约束进行强化, 过程如下。

函数约束为 $2x_1 + 3x_2 \leq 4$ ($a_1 = 2, a_2 = 3, b = 4$)

1. $S = 2 + 3 = 5$ 。

2. a_1 满足 $S < b + |a_1|$, 因为 $5 < 4 + 2$ 。 a_2 满足 $S < b + |a_2|$, 因为 $5 < 4 + 3$ 。 任意选取一个, 选 a_1 。

3. $\bar{a}_1 = 5 - 4 = 1, \bar{b} = 5 - 2 = 3$, 重置 $a_1 = 1, b = 3$ 。 新的更强的约束为

$$x_1 + 3x_2 \leq 3 \quad (a_1 = 1, a_2 = 3, b = 3)$$

1. $S = 1 + 3 = 4$ 。

2. a_2 满足 $S < b + |a_2|$, 因为 $4 < 3 + 3$ 。

3. $\bar{a}_2 = 4 - 3 = 1, \bar{b} = 4 - 3 = 1$, 重置 $a_2 = 1, b = 1$ 。 新的更强的约束为

$$x_1 + x_2 \leq 1 \quad (a_1 = 1, a_2 = 1, b = 1)$$

1. $S = 1 + 1 = 2$ 。

2. 不存在非零 a_j 满足 $S < b + |a_j|$, 所以停止; $x_1 + x_2 \leq 1$ 就是所要强化后的约束。

本例第一次执行第二步时, 如果换成选取 a_2 , 那么第一个更强的约束就变成 $2x_1 + x_2 \leq 2$, 再下一步更强的约束则是 $x_1 + x_2 \leq 1$ 。

下一个例子中, 左边的约束先被强化成右边第一个约束, 然后更进一步强化成为右边第二个。

$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 5 &\Rightarrow 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 3 \\ &\Rightarrow 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 3 \end{aligned}$$

(习题 11.8-5 要求你应用这些步骤, 以证实该结果。)

“ \geq ”约束可转化成“ \leq ”约束(两边同时乘以 -1), 然后直接应用这些步骤。

生成纯 0-1 整数规划问题的割平面

整数规划问题的割平面 (cutting plane) (或割) 是一个新的函数约束, 它可以缩小线性松弛问题的可行域, 而不减少整数规划问题的可行解。事实上, 你刚才已经看到了一种生成纯 0-1 整数规划问题的割平面的方法, 也就是说, 采用上述的强化约束的步骤。因此, $x_1 + x_2 \leq 1$ 就是图 11.14 的 0-1 整数规划问题的割平面, 它使得图 11.15 中的线性松弛问题的可行域缩小了。

除此之外, 还有许多生成割平面的方法, 这些方法都是用于加速采用分支定界法求得纯 0-1 整数规划问题的最优解的过程。我们只介绍其中的一种。

为了介绍这种方法, 我们以 11.1 节中的加州制造公司为例, 该例也在 11.6 节中被用于描述 0-1 整数规划问题的分支定界法。如图 11.5 所示, 此例的线性松弛问题的最优解是 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{5}{6}, 1, 0, 1\right)$, 其中一个函数约束是

$$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10$$

注意, 0-1 约束和此约束结合起来, 可得

$$x_1 + x_2 + x_4 \leq 2$$

这个新的约束就是一个割平面。它删减了线性松弛问题的部分可行域, 包括此前的最优解 $\left(\frac{5}{6}, 1, 0, 1\right)$, 但它并不删减任何可行的整数解。此割平面加入原模型, 将从两方面提升 11.6 节 (如图 11.9 所示) 中所述的 0-1 整数规划的分支定界法的性能。首先, 新的 (强化的) 线性松弛问题的最优解为 $\left(1, 1, \frac{1}{5}, 0\right)$, $Z = 15 \frac{1}{5}$, 则 All 节点、 $x_1 = 1$ 节点, 以及 $(x_1, x_2) = (1, 1)$ 节点的边界值变成 15, 而不是 16。其次, 将减少一次迭代, 因为 $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 0)$ 节点的线性松弛问题的最优解现在是 $(1, 1, 0, 0)$, 产生新的现有最佳可行解 $Z^* = 14$ 。因此, 在第三次迭代时 (如图 11.8 所示), 此节点将由于测试 3 而被剪枝, $(x_1, x_2) = (1, 0)$ 节点将由于测试 1 被剪枝, 从而表明此现有最佳可行解是原 0-1 整数规划问题的最优解。

以下是生成割平面的一般步骤。

1. 考查只含有非负系数的“ \geq ”函数约束。
2. 找出这样一组变量 (称为该约束的最小覆盖 (minimum cover)) :
 - (a) 如果组中的所有变量均取值为 1, 其他变量取值为 0, 则违反约束。
 - (b) 但是如果组中的任意一个变量取值从 1 变成 0, 则满足约束。
3. 设组中变量数为 N , 产生的割平面满足下式

$$\text{组中变量之和} \leq N - 1$$

应用这些步骤于约束 $6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10$, 我们发现这组变量 $\{x_1, x_2, x_4\}$ 是最小覆盖, 因为

- (a) $(1, 1, 0, 1)$ 违反约束。
- (b) 但是如果这三个变量任意一个取值从 1 变成 0, 则满足约束。

本例 $N = 3$, 所以割平面为 $x_1 + x_2 + x_4 \leq 2$ 。

可同样求得另一个最小覆盖 $\{x_1, x_3\}$, 因为 $(1, 0, 1, 0)$ 违反约束, 但 $(0, 0, 1, 0)$ 和 $(1, 0,$

$(0,0)$ 满足约束。因此, $x_1 + x_3 \leq 1$ 也是一个合乎要求的割平面。

分支-切割法以前面所述的方式生成许多割平面,然后巧妙地应用分支定界法。引进割平面在强化线性松弛问题方面是一个相当大的进步。在某些情况下,所求得的线性松弛问题的最优解 Z 值可接近到原问题的最优解 Z 值的 98%。

有意思的是,整数规划的第一种求解算法包括 Ralph Gomory 于 1958 年发表的算法,都是基于割平面的(它产生于另一种途径),但割平面法在实践中(除了某些特定问题)却无法令人满意。不过,这些算法并不只是依靠割平面。我们已经知道,合理地结合割平面和分支定界法(还有自动的问题预处理)可以提供强有力的工具以求解大规模 0-1 整数规划问题。这就是我们把这种方法命名为分支-切割法的原因。



11.9 同约束规划的结合

如今介绍整数规划的基本理念,都应介绍近年来令人兴奋的发展——同约束规划的结合,它很有可能极大地扩展我们建立及求解整数规划问题的能力(类似的方法也正被用于数学规划等相关领域,特别是组合优化,但我们只研究它在整数规划方面的主要应用)。

约束规划的原理

20 世纪 80 年代中期,计算机科学领域的研究人员把人工智能的理念渗入计算机编程语言的开发过程,从而提出了约束规划的概念。目的是开发一种灵活的计算机编程系统,该系统可以对变量和约束设定取值范围,还能搜寻得到可行解。每个变量都有一个可取的值域,如 $\{2,4,6,8,10\}$ 。不仅限于数学规划中的数学约束,我们还可以很灵活地表达这些约束。特别地,可以是以下的任何一种约束。

1. 数学约束,如 $x + y < z$ 。
2. 析取约束,如在正对其进行建模的问题中,各项任务的时期不能重叠。
3. 关联约束,如至少三项任务分配给某一台机器。
4. 显性约束,如尽管 x, y 的值域都为 $\{1,2,3,4,5\}$,但 (x, y) 必须是 $(1,1), (2,3)$ 或 $(4,5)$ 。
5. 一元约束,如 Z 是 5~10 之间的某个整数。
6. 逻辑约束,例如,如果 x 是 5,那么 y 位于 6~8 之间。

表达这些约束时,约束规划允许使用各种标准的逻辑函数,如 IF、AND、OR、NOT 等。Excel 含有许多这样的逻辑函数。LINGO 现已支持所有的标准逻辑函数,并且可以利用它的全局优化器找到全局最优解。

为了说明约束规划用以产生可行解的算法,假设某问题有四个变量—— x_1, x_2, x_3, x_4 ,它们的值域是

$$x_1 \in \{1,2\}, x_2 \in \{1,2\}, x_3 \in \{1,2,3\}, x_4 \in \{1,2,3,4,5\}$$

其中,符号“ \in ”表示左端变量属于右端集合。并假设约束是

- (1) 所有变量值各不相同。
- (2) $x_1 + x_3 = 4$ 。

显然,值 1 和值 2 应保留给 x_1 和 x_2 ,第一个约束意味着 $x_3 \in \{3\}$,跟着有 $x_4 \in \{4,5\}$

(缩小可能取值的过程被称为域缩减)。接着,由于 x_3 的值域已改变,约束传播,作用于第二个约束,得 $x_1 \in \{1\}$ 。这再次触发了第一个约束,所以

$$x_1 \in \{1\}, x_2 \in \{2\}, x_3 \in \{3\}, x_4 \in \{4, 5\}$$

就是此问题的唯一可行解。这种基于域缩减和约束传播之间的交互的可行性论证是约束规划的关键。

随着约束传播和域缩减的应用,就产生了一种用于找出全部可行解的搜寻方法。以上的例子中,除了 x_4 所有变量的域都已被减小到单个值,搜寻过程简单地用 $x_4=4$ 和 $x_4=5$ 来得出问题的全部可行解。但是,对于有很多约束和变量的问题来说,约束传播和域缩减通常无法把每个变量的域都减小到单个值。因此必须设计一种搜寻方法,该方法能对每个变量尝试赋予不同的值。赋值时,约束传播被触发,域缩减进一步发生。此过程形成一棵搜寻树,类似整数规划的分支定界树。

约束规划应用于复杂整数规划问题的整个过程包括以下三步。

1. 建立各种类型的约束(大部分不符合整数规划的格式),形成该问题的简洁模型。
2. 高效地找出满足所有约束的可行解。
3. 在这些可行解中搜寻最优解。

约束规划的强大体现在对前两步的执行能力而不是第三步,整数规划的主要能力则体现在第三步。因而,约束规划适宜处理高度约束的无目标函数的问题,它的唯一目标就是找到可行解。然而,它也可扩展到第三步。一种方法是枚举这些可行解,逐个计算目标函数值。不过,当可行解相当多的时候,此方法效率非常低。为克服此不足,常用的方法是添加一个约束,这个约束将目标函数值限定在与预期的最优解的 Z 值非常接近的某个值。比如,目的是最大化目标函数,预期其最优解的 Z 值大约是 10,可采取的方式是添加约束 $Z \geq 9$ 。如此一来,所需枚举的保留下来的可行解就非常接近最优解了。搜寻时,每次发现一个新的更好的解, Z 的边界值就被更进一步限定,则只需考虑那些至少跟当前最好的解一样好的可行解。

虽然可将这种方法应用于第三步,但较受人关注的做法是结合约束规划和整数规划,这样每一个都利用其所长——第一步和第二步采用约束规划,第三步采用整数规划。这就是以下将要说明的约束规划的潜能的一部分。

约束规划的潜能

20 世纪 90 年代,约束规划的特点包括其强大的处理约束的算法,成功地与许多通用性的和一些特殊用途的编程语言结合起来。这使得计算机科学越来越靠近计算机编程的圣杯(Holy Grail),也就是说,用户只需简单陈述问题,剩下的就交给计算机完成。

溢美之词不只在计算机科学界散播,运筹学研究人员也开始意识到约束规划与传统的整数规划方法(也与数学规划的其他领域)集成起来的巨大潜能。表达约束的方式越灵活,越能提高建立复杂问题模型的能力。非常简洁明了的模型将因它而出现。除此之外,通过减小需要考查的可行域的大小,并在此域内高效地找到可行解的方式,约束规划处理约束的算法有助于加快整数规划算法求最优解的过程。

约束规划和整数规划之间的差异很大,要把它们集成起来并不是件容易的事。整数规划无法辨识约束规划的大部分约束,这就要求设计出能把约束规划的语言转译成整数

规划的语言的计算机程序；反之亦然。这方面已有很大的进展。但毫无疑问，未来几年它仍将是运筹学研究最活跃的领域之一。

为了说明约束规划如何极大地简化整数规划的建模过程，现在我们引入约束规划中两种最重要的全局约束(global constraint)。全局约束指的是简洁地表达多变量之间可能的关系的全局模式。因此，一个全局约束通常可代替传统的整数规划的一大堆约束，并且令模型更具可读性。为阐明这些，我们采用了非常小的例子(这些小例子其实并无必要利用约束规划)来说明全局约束，我们也能很容易地将其推广到复杂的同类型约束的问题。

All-Different(所有变量取不同值)约束

all-different 约束简单地表明给定集合中的所有变量必须取不同值。假定有关变量为 x_1, x_2, \dots, x_n ，则约束可以很简洁地写为

$$\text{all-different}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

同时还需指定模型中每个变量的值域(为满足 all-different 约束，这些值域合起来必须至少包含 n 个不同值)。

为了说明这一约束，我们以 8.3 节的古典指派问题为例。这类问题以一对一的方式，指派 n 个人完成 n 项工作，目标是最小化工作成本。虽然指派问题很容易解决(见 8.4 节)，但它很精巧地显示了 all-different 约束如何极大地简化这类模型的建立。

采用 8.3 节的传统建模方法，决策变量是 0-1 变量。

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{由人员 } i \text{ 完成工作 } j \\ 0 & \text{否则} \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

暂且忽略目标函数，函数约束如下。

每个人 i 恰好被指派一项工作：

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

每项工作 j 恰好由一个人完成。

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

因此，共有 n^2 个变量和 $2n$ 个函数约束。

现在看看约束规划所建立的小得多的模型。此时，变量是

$$y_i = \text{指派给第 } i \text{ 人的工作}$$

n 项工作标记为 $1, 2, \dots, n$ ，所以每个 y_i 变量的值域为 $\{1, 2, \dots, n\}$ 。所有人都被指派不同的工作，对这些变量的这种限制由一个全局约束准确地描述出来。

$$\text{all-different}(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

因而，不需 n^2 个变量和 $2n$ 个函数约束，完整的约束规划(排除目标函数)只含有 n 个变量和一个约束(加上所有变量的一个值域)。

现在我们看看下一个全局约束，它可以把目标函数结合进入这样的小模型。

Element 约束

element 全局约束通常被用于计算关联到某个整数变量的成本或利润。特别地，假

设变量 y 的值域为 $\{1, 2, \dots, n\}$, 与成本相关的值分别是 c_1, c_2, \dots, c_n , 则约束

$$\text{element}(y, [c_1, c_2, \dots, c_n], z)$$

限定了变量 z 等于列表 $[c_1, c_2, \dots, c_n]$ 的第 y 个常量。换句话说, 即 $z = c_y$ 。现在变量 z 可被加入目标函数, 以反映与 y 相关联的成本。

仍然用指派问题来讲解 element 约束, 令

$$c_{ij} = \text{指派 } i \text{ 完成工作 } j \text{ 的成本} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

完整的约束规划模型(包括该问题的目标函数)如下

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = \sum_{i=1}^n z_i \\ \text{s. t.} \quad & \text{element}(y_i, [c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in}], z_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ & \text{all-different}(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ & y_i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

此完整模型含有 $2n$ 个变量和 $(n+1)$ 个约束(加上所有变量的一个值域), 仍然远小于 8.3 节所介绍的传统的整数规划模型。例如, 当 $n=100$ 时, 该模型有 200 个变量、101 个函数约束, 而传统的整数规划模型则有 10 000 个变量和 200 个函数约束。

附加个例子, 考虑 11.4 节中的例 2(不成比例问题)。在这个例子中, 五个电视时段将被分配给三种产品, 原决策变量是

$$x_j = \text{分配给产品 } j \text{ 的电视时段数} \quad (j = 1, 2, 3)$$

不过, 表 11.3 中, 对于每个 x_j , 它取不同值时所产生的利润并不与 x_j 成比例。11.4 节中利用辅助的 0-1 变量建立了两个可供选择的整数规划模型。两个模型都相当复杂。

采用 element 约束建立的约束规划模型简洁得多。比如, 表 11.3 中产品 1 的利润分别是 0、1、3 和 3(分别相对于 $x_1=0, 1, 2, 3$)。因此, 设利润为 z_1, z_1 由以下约束给出

$$\text{element}(x_1 + 1, [0, 1, 3, 3], z_1)$$

(第一部分是 $x_1 + 1$, 而不是 x_1 , 是因为 $x_1 + 1 = 1, 2, 3$ 或 4, 这样的值才能表明列表 $[0, 1, 3, 3]$ 中位置 1, 2, 3, 4 的选择) 以同样的方式接着处理另外两种产品, 完整的模型是

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = z_1 + z_2 + z_3 \\ \text{s. t.} \quad & \text{element}(x_1 + 1, [0, 1, 3, 3], z_1) \\ & \text{element}(x_2 + 1, [0, 0, 2, 3], z_2) \\ & \text{element}(x_3 + 1, [0, -1, 2, 4], z_3) \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ & x_j \in \{0, 1, 2, 3\} \quad (j = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

现在将此模型与 11.4 节中此问题的两个整数规划模型对比一下, 我们发现约束规划建立了一个非常简洁、清晰的模型。

all-different 和 element 约束仅是众多全局约束中的两个, 但它们却很好地阐释了约束规划建立复杂问题的简洁、可读性强的模型的能力。

当前的研究

有关集成约束规划和整数规划的研究正沿着多个方向展开。例如, 最直截了当的做

法是同时使用约束规划和整数规划,取长补短以求解问题。因此,每个相关的约束都被并入它所适合的模型,如果可行的话,被并入两个模型。约束规划算法和整数规划算法作用于各自的模型,信息来回传递以搜寻可行解(同时满足两个模型的约束的解)。

双模型的构想被优化编程语言(OPL)实现了,该语言已被结合进入 ILOG 的 OPL 开发室(ILOG 是一家提供 CPLEX 优化软件的公司)。OPL 开发室是一门建模语言,它可以调用约束规划算法(ILOG 求解器)和数学规划求解器(CPLEX),然后把信息从一个传递到另一个。

双模型只是很好的开始,目标是完全集成约束规划和整数规划,那样的话,我们就能利用单一的合成模型和单一的算法。这种无缝集成可使这两种技术互相补充。虽然完全达到这个目标仍是一项令人生畏的挑战,不过此研究一直在进行着。参考文献 6 描述了这个领域当今的研究情况。

即使在早期阶段,已经有很多数学规划同约束规划结合的成功应用,这些应用领域包括网络设计、车辆路线优化、人员值勤、成本函数为分段线性的经典的运输问题,库存管理、计算机图形学、软件工程、数据库、金融、工程技术和组合优化。另外,还提供了各种各样的调度应用,此类应用被认为是应用约束规划的富有成效的领域。例如,由于含有许多复杂的调度约束,约束规划正被用于美国足球联盟的常规赛日程安排。

这些应用仅仅发挥了集成约束规划和整数规划的很少的潜能。在完善两者集成方面,进步越大将产生越重要的令人激动的应用。



11.10 结论

由于某些或全部决策变量被严格地限定取值为整数,因此频繁出现整数规划问题。并且,许多应用都涉及可用二值(0-1)变量表示的是与否的决策(包括这些决策的组合关系)。这些因素使得整数规划成为最广泛应用的运筹学技术之一。

整数约束使得整数规划问题变得难以解决,所以目前的整数规划算法效率一般都远远不如单纯形法。但是过去几十年里,在求解某些(并非全部)有几万甚至几十万变量的大型整数规划问题的能力上已取得了巨大进展。这个进展归结为以下三个因素的组合:整数规划算法的极大改进、整数规划中反复应用的线性规划算法的显著改进、计算机运算速度的大大加快。但整数规划算法偶然在求解较小问题(甚至只有上百个整数变量)时也会失败。一个整数规划问题的不同特征和规模对是否容易求解有极大影响。整数变量的数目一定时,0-1 整数规划问题通常比含有一般整数变量的问题容易处理,但是加上连续变量(混合整数规划)后,并不显著增加计算时间。对于包含特殊结构可被特殊用途的算法加以利用的 0-1 整数规划问题,此类大问题(上千个 0-1 变量)通常也有可能求解。

整数规划算法的计算机代码很容易从数学规划软件包中获得。传统上,这些算法大多基于分支定界法及其变形。

更先进的整数规划算法采用分支-切割法。该算法包括自动的问题预处理、生成割平面,以及巧妙的分支定界法。该领域的研究继续进行着,结合这些技术的复杂的软件包

也在发展中。

整数规划方法论最新的发展是开始结合约束规划。看起来此方法可以极大地扩展我们建立和求解整数规划模型的能力。

近几年来,整数非线性规划的算法也被研究得相当多,该领域仍将非常活跃。

参考文献

1. Appa, G., L. Pitsoulis, and H. P. Williams (eds.): *Handbook on Modelling for Discrete Optimization*, Springer, New York, 2006.
2. Baptiste, P., C. LePape, and W. Nuijten: *Constraint-Based Scheduling: Applying Constraint Programming to Scheduling Problems*, Kluwer Academic Publishers (now Springer), Boston, 2001.
3. Barnhart, C., P. Belobaba, and A. R. Odoni: "Applications of Operations Research in the Air Transport Industry", *Transportation Science*, **37**(4): 368–391, 2003.
4. Bixby, R. E., Z. Gu, E. Rothberg, and R. Wunderling: "Mixed Integer Programming: A Progress Report", pp.309–326 in M. Grötschel (ed.), *The Sharpest Cut: The Impact of Manfred Padberg and His Work*, MPS/SIAM Series on Optimization.
5. Hillier, F. S., and M. S. Hillier: *Introduction to Management Science: A Modeling and Case Studies Approach with Spreadsheets*, 3rd ed., McGraw-Hill/Irwin, Burr Ridge, IL, 2008, chap. 7.
6. Hooker, J. N.: *Integrated Methods for Optimization*, Springer, New York, 2007.
7. Karlof, J. K.: *Integer Programming: Theory and Practice*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2006.
8. Li, D., and X. Sun: *Nonlinear Integer Programming*, Springer, New York, 2006.
9. Lübbecke, M. E., and J. Desrosiers: "Selected Topics in Column Generation", *Operations Research*, **53**(6): 1007–1023, November–December 2005.
10. Lustig, I., and J.F. Puget: "Program Does Not Equal Program: Constraint Programming and Its Relationship to Mathematical Programming", *Interfaces*, **31**(6): 29–53, November–December 2001.
11. Nemhauser, G. L.: "Need and Potential for Real-Time Mixed Integer Programming", *OR/MS Today*, **34**(1): 21–22, February 2007.
12. Nemhauser, G. L., and L. A. Wolsey: *Integer and Combinatorial Optimization*, Wiley, New York, 1988, reprinted in 1999.
13. Schriber, A.: *Theory of Linear and Integer Programming*, Wiley, New York, 1986.
14. Williams, H. P.: *Model Building in Mathematical Programming*, 4th ed., Wiley, New York, 1999.
15. Wolsey, L. A.: *Integer Programming*, Wiley, New York, 1998.
16. Wolsey, L. A.: "Strong Formulations for Mixed Integer Programs: Valid Inequalities and Extended Formulations", *Mathematical Programming Series B*, **97**(1–2): 423–447, 2003.

整数规划的一些得奖应用:

(下列所有论文可在本书网站 www.mhhe.com/hillier) 查询。

- A1. Abbink, E., M. Fischetti, L. Kroon, G. Timmer, and M. Vromans: "Reinventing Crew Scheduling at Netherlands Railways", *Interfaces*, **35**(5): 393–401, September–October 2005.
- A2. Armacost, A. P., C. Barnhart, K. A. Ware, and A. M. Wilson: "UPS Optimizes Its Air Network", *Interfaces*, **34**(1): 15–25, January–February 2004.
- A3. Bertsimas, D., C. Darnell, and R. Soucy: "Portfolio Construction Through Mixed-Integer Programming at Grantham, Mayo, Van Otterloo and Company", *Interfaces*, **29**(1): 49–66, January–February 1999.
- A4. Camm, J. D., T. E. Chorman, F. A. Dill, J. R. Evans, D. J. Sweeney, and G. W. Wegryn: "Blending OR/MS, Judgment, and GIS: Restructuring P&G's Supply Chain", *Interfaces*, **27**(1): 128–142, January–February 1997.
- A5. Denton, B. T., J. Forrest, and R. J. Milne: "IBM Solves a Mixed-Integer Program to Optimize Its Semiconductor Supply Chain", *Interfaces*, **36**(5): 386–399, September–October 2006.

- A6. Gendron, B.: "Scheduling Employees in Quebec's Liquor Stores with Integer Programming", *Interfaces*, **35**(5): 402–410, September–October 2005.
- A7. Gryffenberg, I., J. L. Lausberg, W. J. Smit, S. Uys, S. Botha, F. R. Hofmeyr, R. P. Nicolay, W. L. van der Merwe, and G. J. Wessells: "Guns or Butter: Decision Support for Determining the Size and Shape of the South African National Defense Force," *Interfaces*, **27**(1): 7–28, January–February 1997.
- A8. Martin, C., D. Jones, and P. Keskinocak: "Optimizing On-Demand Aircraft Schedules for Fractional Aircraft Operators," *Interfaces*, **33**(5): 22–35. September–October 2003.
- A9. Metty, T., R. Harlan, Q. Samelson, T. Moore, T. Morris, R. Sorenson, A. Sneur, O. Raskina, R. Schneur, J. Kanner, K. Potts, and J. Robbins: "Reinventing the Supplier Negotiation Process at Motorola," *Interfaces*, **35**(1), 7–23, January–February 2005.
- A10. Smith, B. C., R. Darrow, J. Elieson, D. Guenther, B. V. Rao, and F. Zouaoui: "Travelocity Becomes a Travel Retailer", *Interfaces*, **37**(1): 68–81, January–February 2007.
- A11. Spencer III, T., A. J. Brigandi, D. R. Dargon, and M. J. Sheehan: "AT&T's Telemarketing Site Selection System Offers Customer Support", *Interfaces*, **20**(1): 83–96, January–February 1990.
- A12. Subramanian, R., R. P. Scheff, Jr., J. D. Quillinan, D. S. Wiper, and R. E. Marsten: "Coldstart: Fleet Assignment at Delta Air Lines", *Interfaces*, **24**(1): 104–120, January–February 1994.
- A13. Tyagi, R., and S. Bollapragada: "SES Americom Maximizes Satellite Revenues by Optimally Configuring Transponders", *Interfaces*, **33**(5): 36–44, September–October 2003.
- A14. Yu, G., M. Argüello, G. Song, S. M. McCowan, and A. White: "A New Era for Crew Recovery at Continental Airlines", *Interfaces*, **33**(1): 5–22, January–February 2003.

习题

其中一些问题左边的符号有如下的意思。

D: 上面列出的相应范例也许会有用。

I: 我们建议你使用上面列出的相应交互的程序(打印输出将记录你的工作)。

C: 用带有可用软件的计算机帮助你(或者在你的导师的指示下)解决这些问题。

题号前面的星号表示至少部分答案已经在书的最后给出了。

11.1-1 重新考虑在 11.1 节中提到过的加利福尼亚制造公司的案例。圣地亚哥的市长联系了公司的总裁,并且试图劝服他在该市建立一个工厂或仓库。公司享受税收减免政策下,总裁的下属们估计在圣地亚哥修建一个工厂的净现值是 700 万美元,并且需要的资本是 400 万美元。修建一个仓库的净现值是 500 万美元,而需要的资本是 300 万美元(修建仓库的前提条件是工厂也必须修建在那里)。

现在公司总裁希望修改先前的运筹学研究将这些选择整合到总体问题中。在可用资本是 1 000 万美元的前提下,公司的目标是使总的净现值最大的投资的可行性组合。

(a) 为这个问题建立一个 BIP 模型。

(b) 将这个模型展示在 Excel 表格中。

C(c) 使用计算机解出这个模型。

11.1-2* Eve 和 Steven 这对年轻夫妇想把家里主要的零活(购物、做饭、洗碗、去洗衣店)进行分配,使他们花费在家务活上的时间最少并且每个人分配两个任务。他们完成这些任务的时间是不同的,他们各自完成这些任务的时间见下表。

	每周需要的时间/小时			
	购物	做饭	洗碗	洗衣
Eve	4.5	7.8	3.6	2.9
Steven	4.9	7.2	4.3	3.1

- (a) 为这个问题建立一个 BIP 模型。
 (b) 将这个模型展示在 Excel 表格中。
 (c) 使用计算机解出这个模型。

11.1-3 Peterson and Johnson 房地产开发公司在考虑五个可能开发的项目。下面的表格估计的是五个项目可以产生的长远利润(净现值)和实施每个项目需要的投资额。

	5 个开发项目的投入资金与预期利润/百万美元				
	1	2	3	4	5
预期利润	1	1.8	1.6	0.8	1.4
需要的资金	6	12	10	4	8

Dave Peterson 和 Ron Johnson 是这家公司的所有者,他们已经为这些项目筹集了 2 000 万美元的资金。Dave 和 Ron 现在想选择一些项目组合来做,使他们预计的长期利润最大化并且投资不超过 2 000 万美元。

- (a) 为这个问题制订一个 BIP 模型
 (b) 将这个模型展示在 Excel 表格中。
 (c) 使用计算机解出这个模型。

11.1-4 通用轮子公司的董事会正在考虑七个大型投资项目。每个项目只能投资一次。从预计的长期利润(净现值)和所需投资资金来看每个投资项目是不一样的,详见下表。

	6 个项目的投入资金与预期利润/百万美元					
	1	2	3	4	5	6
预期利润	15	12	16	18	9	11
需要的资金	38	33	39	45	23	27

进行这些投资可利用的总资金是 1 亿美元。投资机会 1 和投资机会 2 是互斥的,只能选择其一,投资机会 3 和投资机会 4 也是这样的。而且,只有前两个机会中的一个被选择,投资机会 3 和投资机会 4 才能被选择。投资机会 5、投资机会 6、投资机会 7 没有以上限制。目的是选择这些投资的组合,使预期的长期利润最大(净现值)。

- (a) 为这个问题制订一个 BIP 模型。
 (b) 使用计算机解出这个模型。

11.1-5 重新考虑习题 8.3-4,一个游泳队的教练需要把游泳队员分配到 200 码混合接力的各段赛程中。为这个问题制订一个 BIP 模型。识别这个模式中互斥的选择组。

11.1-6 Vincent Cardoza 是一家接受顾客预定的机械工厂的所有者和经理。星期三下午,他接到两名匆忙预定的顾客的电话。一个是拖车栓钩公司,它想订做一些重型拖

曳杆。另外一个微型汽车公司,它需要定制一些稳定杆。两个顾客都希望在这周末能有尽可能多的产品(两个工作日)。既然生产这两种产品使用两种相同的机器,这个下午 Vincent 需要决定并且告诉顾客接下来两天将要生产的每种产品的数量。

生产一个拖曳杆需要占用第一台机器 3.2 小时、第二台机器 2 小时。生产一个稳定杆需要第一台机器 2.4 小时、第二台机器 3 小时。在未来的两天内,第一台机器的可用时间是 16 小时、第二台机器是 15 小时。每生产一个拖曳杆可获利 130 美元,每生产一个稳定杆的利润是 150 美元。

为了使总利润最大化, Vincent 现在要决定这些产品的生产数量。

(a) 为这个问题建立一个 BIP 模型。

(b) 将这个模型展示在 Excel 表格中。

(c) 使用计算机解出这个模型。

11.1-7 重新考虑习题 8.2-21, 承包商 Susan Meyer 需要从两个深坑中拖运碎石到三个建筑工地去。

现在 Susan 需要租用卡车(还有司机)来帮她拖运。每辆卡车只能从一个坑到一个建筑地拖运碎石。除了在习题 8.2-21 中提到的运费和碎石的费用外,租用每辆卡车还有固定支出 150 美元。每辆卡车能够托运 5 吨,但是不要求载满。在每组深坑和建筑地的组合中,都要做两个决定:使用卡车的数量和托运碎石的重量。

(a) 为这个问题制订一个 BIP 模型。

(b) 使用计算机解出这个模型。

11.2-1 选择在 11.2 节中提到过的一个公司或政府机构对 BIP 模型的实际应用。阅读《界面》描写该应用的文章,写出两页关于应用和好处的概要。

11.2-2 选择三个在 11.2 节中提到过的一个公司或政府机构对 BIP 模型的实际应用。阅读《界面》描写该应用的文章,对每一篇文章,写出一页关于应用和好处的概要。

11.2-3 选择 11.2 节中提到的公司或政府部门对 BIP 的三项实际应用,先阅读在参考文献中刊登在《界面》上对这些应用的描述,然后对每项应用各用一页纸总结其应用情况和带来的效益。

11.3-1* Progressive 公司的研发部门已经开发了四种新产品线。管理部门必须做出决定,究竟生产这四种产品中的哪一种以及生产多少。因此,需要运筹研究来决定能获得最大利润的产品组合。

开始生产任何产品都需要大量支出,这在下表的第一行给出。管理层的目标是要找出最大化利润的产品组合(总的净现值收入减去启动费用)。

	产 品			
	1	2	3	4
启动费用/美元	50 000	40 000	70 000	60 000
边际收入/美元	70	60	90	80

用连续决策变量 x_1, x_2, x_3, x_4 分别代表产品 1、产品 2、产品 3、产品 4 的产量,管理层对这些变量作了如下的一些约束限制:

1. 投入生产的产品不超过两种。
2. 只有在产品 1 或者产品 2 被投入生产时,才能生产产品 3 或产品 4。
3. $5x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 \leq 6000$ 或 $4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 6000$ 。

(a) 对这个问题引入辅助 0-1 变量建立一个混合 BIP 模型。

C(b) 用计算机解这个模型。

11.3-2 假定数学模型满足线性规划,但是有约束条件 $|x_1 - x_2| = 0$ 或 3 或 6。说明怎样改写约束条件来满足 MIP 模型。

11.3-3 假定数学模型满足线性规划,但有下列约束条件:

1. 以下的两个不等式至少有一个成立。

$$3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \leq 12$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15$$

2. 下列不等式至少有两个成立。

$$2x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 \leq 30$$

$$-x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 \leq 40$$

$$3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 60$$

说明为了满足 MIP 模型,怎样改写约束条件。

11.3-4 Toys-R-4-U 公司为即将到来的圣诞节开发了两种新的玩具,这两种玩具可能包含在产品线中。开始生产产品 1 而建立的生产设备将花费 50 000 美元,而产品 2 是 80 000 美元。一旦支付启动费用,则每单位产品 1 将有 10 美元的利润,而产品 2 将有 15 美元的利润。

公司有两个工厂能够生产这些玩具。但是,基于利润最大化的考虑,为了避免双倍启动费用,仅使用一个工厂。由于管理的原因,如果两种玩具都要生产的话,一个工厂可以生产这两种玩具。

玩具 1 每小时在工厂 1 能生产 50 个,在工厂 2 能生产 40 个。玩具 2 每小时在工厂 1 能生产 40 个,在工厂 2 能生产 25 个。在圣诞节来临之前,工厂 1 和工厂 2 分别用 500 小时和 700 小时生产这些玩具。

在圣诞节后不知道是否还会继续生产这两种玩具。因此,问题是在圣诞节前决定对每一种产品生产多少来使总利润最大化。

(a) 为这个问题制订一个 MIP 模型。

C(b) 使用计算机解出这个模型。

11.3-5* 东北航空公司想要购买新的大、中、小型喷气式客机。每架飞机的购买价格是大型 6 700 万美元、中型 5 000 万美元、小型 3 500 万美元。董事会授权购买这些飞机的花费最多是 15 亿美元。不管购买哪种飞机,所有距离乘飞机旅行的人都相当多,从而这些飞机的承载能力都能得到充分利用。(减去投入资金后)预计年净利润,每架大型飞机将是 420 万美元,中型飞机是 300 万美元,小型飞机是 230 万美元。

预计对于 30 架新飞机将有足够多的飞行员可以聘用。如果只购买小型飞机,维

护设备能够处理 40 架新飞机。但是在使用维护设备方面,每架中型飞机等价于 $1\frac{1}{3}$ 架小型飞机,每架大型飞机等价于 $1\frac{2}{3}$ 架小型飞机。

这里给出的信息只是对问题的初步分析。更详细的分析将在后面讨论。但是使用前面的数据作为初步近似,管理层想知道各购买几架不同型号的飞机,以实现利润的最大化。

(a) 为这个问题建立一个 BIP 模型。

C(b) 使用计算机解出这个模型。

(c) 使用 0-1 变量,作为 BIP 问题重写(a)建立的 IP 模型。

C(d) 使用计算机解出(c)中的 BIP 模型。然后使用这个最优解为(a)中建立的 IP 模型确定最优解。

11.3-6 考虑 11.5 节讨论的两变量 IP 案例,见图 11.3。

(a) 使用 0-1 变量改写这个模型使之成为一个 BIP 模型。

C(b) 使用计算机解这个 BIP 问题。然后用这个最优解来确定原始 IP 模型的最优解。

11.3-7 Fly-Right Airplane 公司生产小型喷气式飞机,卖给那些供经理层使用的公司。为了满足这些经理的需要,该公司的客户有时订购客户自己设计的飞机。此时需要大量的启动费用来生产这些飞机。

Fly-Right 最近接到了三个客户的订单,它们都有最后交货期限。然而,因为公司的生产设备几乎完全被以前的订单所占用,所以不可能接受所有订单。因此,需要决定为每个客户生产飞机的数量(如果生产的话)。

相关数据在下表中给出。第一行给出了为每个客户开始生产所需的启动费用。一旦开始生产,从生产每架飞机获得的边际净收入(等于购买价格减去边际生产成本)在第二行显示。第三行给出了可用的生产能力的百分比。最后一行给出了每个顾客订单的最大数量(但是公司接受的会少一些)。

	客 户		
	1	2	3
启动费用/万美元	300	200	0
边际净利润/万美元	200	300	80
每架飞机所需生产能力/%	20	40	20
最大订货数量/架	3	2	5

Fly-Right Airplane 公司现在需要决定为每一位客户生产飞机的数量(如果生产的话),以使公司的总利润最大(总净收入减去启动费用)。

(a) 对这个问题,用整数变量和 0-1 变量建立一个模型。

C(b) 使用计算机解出这个模型。

11.4-1 重写考虑在习题 11.3-7 中介绍的 Fly-Right Airplane 公司的问题。通过对各种成本和收入进行更为复杂的分析,发现从为每个客户生产飞机获得的潜在利润不能简单地用启动费用和一个固定边际净收入来表达。利润由下表给出。

生产的飞机数/架	来自客户的利润/万美元		
	客户 1	客户 2	客户 3
0	0	0	0
1	-100	100	100
2	200	500	300
3	400		500
4			600
5			700

(a) 引入互斥的约束条件,为这个问题建立一个 BIP 模型。

(b) 使用计算机解出(a)模型,然后使用这个最优解来确定为每个客户生产的最优数量。

(c) 引入可能决策为这个模型建立另一个 BIP 模型。

(d) 为(c)中建立的模型重复(b)。

11.4-2 重新考虑 3.1 节提出的 Wyndor Glass 公司问题。基于利润最大化的选择,管理层现在决定应该生产两种产品中的一种。对这个新问题,引入辅助 0-1 变量来建立一个 MIP 模型。

11.4-3* 重新考虑习题 3.1-11, Omega 制造公司正在考虑把多余的生产能力分配给三个产品中的一个或更多(见书后部分习题答案中关于这个问题的附加信息)。管理层已经决定加入这个约束条件,三个产品中应生产的不超过两个。

(a) 引入辅助的 0-1 变量建立这个问题新版本的混合整数规划模型。

(b) 用计算机求解这个模型。

11.4-4 考虑以下整数非线性规划问题。

$$\max \quad Z = 4x_1^2 - x_1^3 + 10x_2^2 - x_2^4$$

$$\text{s. t.} \quad x_1 + x_3 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

且 x_1 和 x_2 是整数。

使用 6 个 0-1 变量(y_{1j} 和 y_{2j} , $j=1,2,3$),根据它们所代表的含义,这个问题可以作为一个纯 BIP 问题(目标函数是线性的),用两种不同的方式建模。

(a) 就这个问题建立一个 BIP 模型,0-1 变量含义如下:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{如果 } x_j = j \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

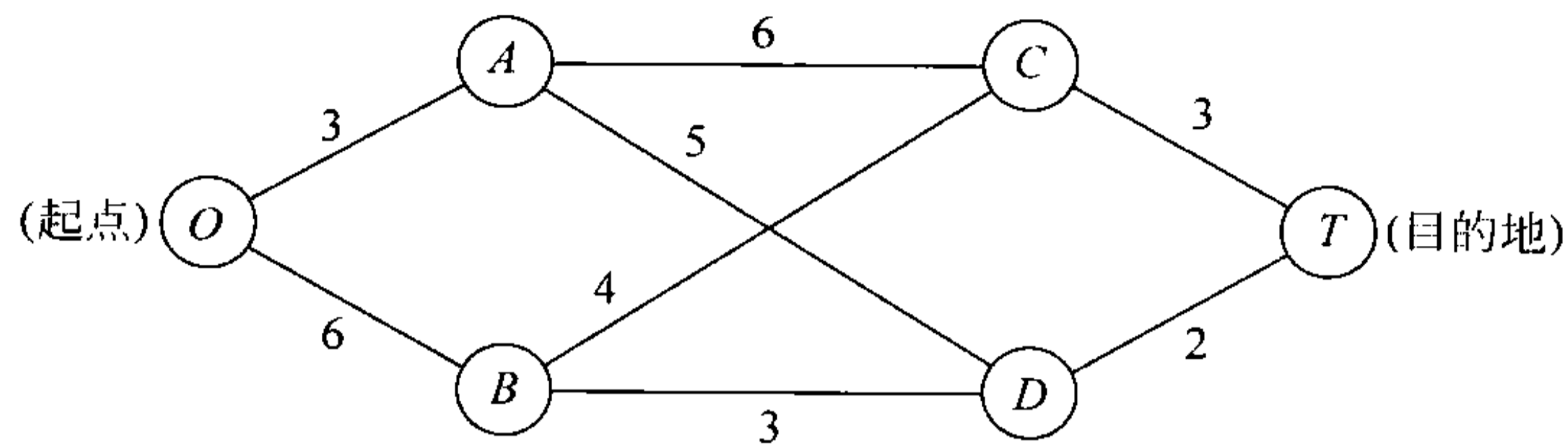
(b) 使用计算机求解(a)建立的模型,并且由此为原始问题(为 x_1, x_2)确定最优解。

(c) 为这个问题建立一个 BIP 模型,0-1 变量的含义如下:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{如果 } x_j \geq j \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

(d) 使用计算机求解(c)建立的模型,并且由此为原始问题(为 x_1, x_2)确定最优解。

11.4-5* 考虑下面这个特殊的最短路径问题(见 9.3 节),其中节点在每列中,并且一条路线就是沿着每列移动一次。



数字之间的连线表示距离,目标是找出从起点出目的地的最短路径。

这个问题同样可以用互斥的选择和可能决策来建立一个 BIP 模型。

(a) 建立这个模型。为互斥的选择和可能决策确定约束条件。

(b) 使用计算机解这个模型。

11.4-6 Speedy Delivery 公司在全美提供了一种大型包裹两天投递的服务。每天上午在每个收集中心,前一天晚上到达的包裹被装上卡车运送到各地。既然该行业的竞争是投递速度,根据包裹到达的目的地不同,它们被装进不同的卡车,使完成投递所需的平均时间最短。

今天上午,Blue River Valley 收集中心的调度员 Sharon Lofton 工作很忙碌。她的三个司机将在一个小时之内把包裹送到。有 9 个包裹需要投递,它们都相隔好几英里。像往常一样,Sharon Lofton 把目的地输入计算机。她使用特殊的计算机软件——决策支持系统 Dispatcher。Dispatcher 做的第一件事是使用这些目的地,为每辆卡车设计许多可行线路。这些线路在下表中给出(每列中的数字表示投递顺序),以及走每条线路的估计时间。

目的地	可行的线路									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	1				1				1	
B		2		1		2			2	2
C			3	3			3		3	
D	2					1		1		
E			2	2		3				
F		1			2					
G	3						1	2		3
H			1		3					1
I		3		4			2			
时间/小时	6	4	7	5	4	6	5	3	7	6

Dispatcher 是一个交互式系统,它能显示这些线路,供 Sharon 选择或修改(例如,计算机可能并不知道一次洪水已经使某条线路不能用了)。在 Sharon 选出可行线路及合理的估计时间后,Dispatcher 建立并解这个 BIP 模型。选出三条线路使总时间

最短,同时每个目的地只包含在一条线路中。今天上午 Sharon 同意了所有的线路。

(a) 建立这个 BIP 模型。

C(b) 使用计算机解这个模型。

11.4-7 越来越多的美国人在他们退休之后搬到更暖和的地方。为了利用这种趋势, Sunny Skier Unlimited 公司正在实施一项大型房地产开发项目。这个项目是开发一个全新的退休社区(称为 Pilgrim Haven),占地面积达几平方英里。决策之一是怎样在社区里安置两个消防站。在计划中, Pilgrim Haven 划分为 5 个地区,每个地区要安置的消防站不能多于一个。每个消防站要对其所在地区的所有火灾负责,也要对分配给这个消防站的其他地区发生的火灾负责。因此,决策包括:(1)需要建立消防站的社区;(2)把每个地区分配给每个消防站。目标是使火灾的平均响应时间最短。

下表给出了如果一个地区由坐落在给定地区(行)的给定消防站负责,那么在每个地区(列)内对火灾的平均响应时间。最下面一行给出了每天在每个地区,预计的火灾发生数量。

消防站坐落的地区	对地区内发生火灾的响应时间/分钟				
	1	2	3	4	5
1	5	12	30	20	15
2	20	4	15	10	25
3	15	20	6	15	12
4	25	15	25	4	10
5	10	25	15	12	5
火灾的平均频率	2次/天	1次/天	3次/天	1次/天	3次/天

对这个问题建立一个 BIP 模型。确定相应的互斥约束和可能约束条件。

11.4-8 重新考虑问题 11.4-7。Sunny Skier Unlimited 公司的管理层现已设置消防站主要应考虑成本。对地区 1 来说,设立 1 个消防站的成本是 300 000 美元,地区 2 是 350 000 美元,地区 3 是 600 000 美元,地区 4 是 450 000 美元,地区 5 是 700 000 美元。管理层的目标如下:

决定需要在哪些地区设置消防站,以使消防站的总成本最小,同时要保证每个地区都有一个较近的消防站,对该地区火灾的响应时间不超过 15 分钟(平均)。

与原始问题相比,注意消防站的总数量不再是固定的。而且,如果一个没有消防站的地区拥有不止一个响应时间在 15 分钟内的消防站,那么不再需要为这个地区指定消防站。

(a) 对于这个问题,用 5 个 0-1 变量建立一个完整的纯 BIP 模型。

(b) 这是一个设置覆盖问题吗?

C(c) 使用计算机解(a)建立的模型。

11.4-9 设想一个州可以派 R 个人去美国众议院。该州有 D 个郡($D > R$),州议会想把这些郡分配给不同的选区,每个选区派一个代表去国会。该州的总人口是 P 。州议

会想设立选区,每个选区的人数是 $p = P/R$ 。假设相关的立法委员会研究了这个问题,产生了 N 个候选选区的列表 ($N > R$)。每个候选选区包含附近的郡,总人数是 p_j ($j = 1, 2, \dots, N$), p_j 接近于 p 。定义 $c_j = |p_j - p|$ 。每个郡 i ($i = 1, 2, \dots, D$) 至少包括在一个候选选区中,更为典型的情况是,一个郡包括在一定数量的候选选区中(为了提供更多可行的方式来选择一组候选选区,每个郡恰好只包括一次)。定义

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{如果郡 } i \text{ 包括在候选选区 } j \text{ 中} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

给定 c_j 和 a_{ij} ,目标是从 N 个候选选区中选择 R 个,使每个郡都只包括在一个选区内, c_j 的最大值尽可能地小。

为这个问题建立一个 BIP 模型。

11.5-1 阅读 11.5 节应用案例概要描述并在其参考文献中详述的运筹学研究。简述整数规划在这项研究中是如何得到应用的,然后列出该项研究带来的各类财务与非财务效益。

11.5-2* 考虑下述 IP 问题。

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 5x_1 + x_2 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & 4x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

且 x_1, x_2 是整数。

(a) 用图形求解这个问题。

(b) 用图形求解这个 LP 松弛。把这个解变成最近整数解,并检查它是否可行。然后,通过以所有可能的方式(如,通过把非整数解变大变小)对 LP 松弛的解进行改进,列出所有改进解。对每个改进解,检查它的可行性。如果可行,则计算 Z 。说明是否所有这些改进可行解对这个问题都是最优的。

11.5-3 用 11.5-2 的说明解下述 IP 问题。

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 220x_1 + 80x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 5x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

且 x_1, x_2 是整数。

11.5-4 用问题 11.5-2 的说明解下述 BIP 问题。

$$\max \quad Z = 10x_1 + 25x_2$$

$$\text{s. t.} \quad 19x_1 - 6x_2 \leq 15$$

$$5x_1 + 15x_2 \leq 15$$

且 x_1, x_2 是 0-1 变量。

11.5-5 用问题 11.5-2. 的说明解下述 BIP 问题。

$$\max \quad Z = -5x_1 + 25x_2$$

$$\text{s. t.} \quad -3x_1 + 30x_2 \leq 27$$

$$3x_1 + x_2 \leq 4$$

且 x_1, x_2 是 0-1 变量。

11.5-6 判断下列陈述的正误, 参考本章的相关陈述, 证明你的答案。

(a) 线性规划问题一般比 IP 问题更容易求解。

(b) 对 IP 问题, 在确定计算难度方面, 一般整数变量的数量比函数约束的数量更重要。

(c) 为了用适当的程序求解 IP 问题, 可以用单纯形法求解这个 LP 松懈问题, 然后把每个非整数解变成最近整数。这个结果是可行的, 但不一定是这个 IP 问题的最优解。

D, I 11.6-1* 利用 11.6 节中 0-1 整数规划的分支定界算法, 求解以下问题。

$$\max \quad Z = 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 + 4x_5$$

$$\text{s. t.} \quad 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 4x_5 \leq 6$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 \leq 0$$

且 $x_j = 0$ 或 1 $(j=1, 2, \dots, 5)$

D, I 11.6-2 利用 11.6 节中 0-1 整数规划的分支定界算法, 求解以下问题。

$$\min \quad Z = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 9x_5$$

$$\text{s. t.} \quad 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 \geq 2$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 \geq 0$$

$$-x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 1$$

$x_j = 0$ 或 1 $(j=1, 2, \dots, 5)$

D, I 11.6-3 利用 11.6 节中 0-1 整数规划的分支定界算法, 求解以下问题。

$$\max \quad Z = 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 2x_4 - x_5$$

$$\text{s. t.} \quad x_1 + 2x_2 - 3x_4 - x_5 \leq 0$$

$$-15x_1 + 30x_2 - 35x_3 + 45x_4 + 45x_5 \geq 50$$

且 $x_j = 0$ 或 1 $(j=1, 2, \dots, 5)$

D, I 11.6-4 重新思考习题 11.3-6(a), 利用 11.6 节中 0-1 整数规划的分支定界算法, 求解该问题。

D, I 11.6-5 重新思考习题 11.4-8(a), 利用 11.6 节中 0-1 整数规划算法, 求解该问题。

11.6-6 对于任意一个纯整数规划问题(形式为求极大值)及其线性松弛问题, 思考以下

论断。判断每个论断的正误,并验证你的回答。

- (a) 线性松弛问题的可行域是整数规划问题可行域的一个子集。
 (b) 如果线性松弛问题的一个最优解是整数解,则两个问题的目标函数的最优值都一样。
 (c) 如果某个非整数解是线性松弛问题的可行解,则最接近的整数解(每个变量取最近的整数值)是整数规划问题的可行解。

11.6-7* 思考下面的指派问题,成本表如下。

		任 务				
		1	2	3	4	5
人员	1	39	65	69	66	57
	2	64	84	24	92	22
	3	49	50	61	31	45
	4	48	45	55	23	50
	5	59	34	30	34	18

- (a) 针对此类问题,设计一种分支定界算法,具体说明如何分支、定界和剪枝(提示:对当前子问题中还未指派任务的人员,删除其只能恰好完成一项任务的限制,构造松弛问题)。
 (b) 利用该算法求解此问题。

11.6-8 有五项工作,需在某台机器上完成。每项工作的启动时间取决于前一项在该机器上执行的工作,如下表所示。

		启动时间				
		工作				
		1	2	3	4	5
前一项工作	无	4	5	8	9	4
	1	—	7	12	10	9
	2	6	—	10	14	11
	3	10	11	—	12	10
	4	7	8	15	—	7
	5	12	9	8	16	—

目的是安排这些工作的顺序,使总的启动时间最小。

- (a) 针对此类定序问题,设计一种分支定界算法,具体说明如何分支、定界和剪枝。
 (b) 利用该算法求解此问题。

11.6-9* 思考以下的非线性 0-1 整数规划问题。

$$\max Z = 80x_1 + 60x_2 + 40x_3 + 20x_4 - (7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4)^2$$

其中, $x_j = 0$ 或 1 ($j = 1, 2, 3, 4$)

给定前 k 个变量 x_1, \dots, x_k 的值, $k=0, 1, 2$ 或 3 , 则 Z 的上界可由其相应的可行解通过下式得到。

$$\sum_{j=1}^k c_j x_j - \left(\sum_{j=1}^k d_j x_j \right)^2 + \sum_{j=k+1}^4 \max \left\{ 0, c_j - \left[\left(\sum_{i=1}^k d_i x_i + d_j \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^k d_i x_i \right)^2 \right] \right\}$$

其中 $c_1=80, c_2=60, c_3=40, c_4=20, d_1=7, d_2=5, d_3=3, d_4=2$ 。采用分支定界法, 利用此边界值求解这个问题。

11.6-10 思考 11.6 节结尾附近所述的拉格朗日松弛。

- (a) 如果 x 是某个混合整数规划问题的可行解, 那么 x 也必定是其相应的拉格朗日松弛问题的可行解。
- (b) 如果 x^* 是某个混合整数规划问题的最优解, 其目标函数值为 Z , 那么 $Z \leq Z_R^*$, 其中 Z_R^* 是相应的拉格朗日松弛问题的最优目标函数值。

11.7-1 阅读 11.7 节应用案例中概要描述并在其参考文献中详述的运筹学的研究。简述整数规划是如何应用于该项研究的, 然后列出该项研究带来的财务与非财务的效益。

11.7-2* 思考以下的整数规划问题。

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = -3x_1 + 5x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 5x_1 - 7x_2 \geq 3 \\ & x_j \leq 3 \\ & x_j \geq 0 \\ & x_j \text{ 为整数 } (j=1, 2) \end{aligned}$$

- (a) 采用图解法求解此问题。
- (b) 利用 11.7 节中的混合整数规划的分支定界算法, 人工求解该问题。对每个子问题, 采用图解法求解它的线性松弛问题。
- (c) 用 0-1 变量表示整数变量, 把该问题重新构造成为 0-1 整数规划问题。
- D, I(d) 利用 11.6 节中 0-1 整数规划的分支定界算法, 求解(c)中构造的问题。

11.7-3 按照习题 11.7-1 的条件, 求解下面的整数规划模型。

$$\begin{aligned} \min \quad & Z = 15x_1 + 10x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 15x_1 + 5x_2 \geq 30 \\ & 10x_1 + 10x_2 \geq 30 \\ \text{且} \quad & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \text{ 为整数} \end{aligned}$$

11.7-4 重新思考习题 11.5-2 的整数规划问题。

- (a) 利用 11.7 节中介绍的混合整数规划的分支定界算法, 人工求解该问题。对每个子问题, 采用图解法求解它的线性松弛问题。
- D, I(b) 利用计算机程序求解该问题, 检查你的答案。

D,I 11.7-5 思考在 11.5 节中讨论过的图 11.3 所示的整数规划示例。利用 11.7 节中介绍的混合整数规划的分支定界算法,求解该问题。

D,I 11.7-6 重新思考习题 11.3-5(a)。利用 11.7 节中介绍的混合整数规划的分支定界算法,求解该问题。

11.7-7 某个机械车间生产两种产品。生产 1 单位的第一种产品要求机器 1 运行 3 小时,机器 2 运行 2 小时。生产 1 单位的第二种产品要求机器 1 运行 2 小时,机器 2 运行 3 小时。每天机器 1 只能工作 8 小时,机器 2 只能工作 7 小时。每售出 1 单位的第一种产品,所获利润为 16,第二种产品为 10。每种产品每天的生产总量必须是 0.25 的整数倍。目标是确定每种产品的生产量,使利润最大化。

(a) 对该问题构造整数规划模型。

(b) 采用图解法求解此模型。

(c) 分析图形,应用 11.7 节中介绍的混合整数规划的分支定界算法,求解该模型。

D,I(d) 应用 IOR Tutorial 中的交互程序求解此模型。

C,(e) 利用计算机程序求解(b)、(c)、(d)中的模型,检查你的答案。

D,I 11.7-8 利用 11.7 节中介绍的混合整数规划的分支定界算法,求解下面的整数规划问题。

$$\max \quad Z = 20x_1 + 10x_2 + 25x_3 + 20x_4$$

$$\text{s. t.} \quad x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 12$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 20$$

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq 30$$

$$\text{且} \quad x_j \geq 0 \quad (j=1,2,3,4)$$

$$x_j \text{ 为整数} \quad (j=1,2,3)$$

D,I 11.7-9 利用 11.7 节中介绍的混合整数规划的分支定界算法,求解下面的整数规划问题。

$$\max \quad Z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5$$

$$\text{s. t.} \quad 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 3$$

$$-x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 \leq 2$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 \leq 1$$

$$\text{且} \quad x_j \geq 0 \quad (j=1,2,3,4,5)$$

$$x_j = 0 \text{ 或 } 1 \quad (j=1,2,3)$$

D,I 11.7-10 利用 11.7 节中介绍的混合整数规划的分支定界算法,求解下面的整数规划问题。

$$\min \quad Z = 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5$$

s. t.

$$\begin{aligned} x_2 - 5x_3 + x_4 + 2x_5 &\geq -2 \\ 5x_1 - x_2 &\quad + x_5 \geq 7 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 &\geq 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{且 } x_j &\geq 0 && (j=1,2,3,4,5) \\ x_j &\text{为整数} && (j=1,2,3) \end{aligned}$$

11.8-1* 下面的每个约束属于不同的纯 0-1 整数规划问题,利用这些约束尽可能多地固定变量的值。

(a) $4x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 2$

(b) $4x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 2$

(c) $4x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 \geq 7$

11.8-2 下面的每个约束属于不同的纯 0-1 整数规划问题,利用这些约束尽可能多地固定变量的值。

(a) $20x_1 - 7x_2 + 5x_3 \leq 10$

(b) $10x_1 - 7x_2 + 5x_3 \geq 10$

(c) $10x_1 - 7x_2 + 5x_3 \leq -1$

11.8-3 下面的每个约束属于同一个纯 0-1 整数规划问题,利用这些约束尽可能多地固定变量的值,并识别由于固定变量而变成冗余的约束。

$$3x_3 - x_5 + x_7 \leq 1$$

$$x_2 + x_4 + x_6 \leq 1$$

$$x_1 - 2x_5 + 2x_6 \geq 2$$

$$x_1 + x_2 - x_4 \leq 0$$

11.8-4 下面的每个约束属于不同的纯 0-1 整数规划问题,识别由于设置变量为 0-1 变量而成为冗余的约束,并说明其成为或不成为冗余的原因。

(a) $2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5$

(b) $3x_1 - 4x_2 + 5x_3 \leq 5$

(c) $x_1 + x_2 + x_3 \geq 2$

(d) $3x_1 - x_2 - 2x_3 \geq -4$

11.8-5 在 11.8 节的强化约束小节,我们指出约束 $4x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 5$ 可被强化到 $2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 3$,然后再强化到 $2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 3$ 。应用强化约束的步骤,证实该结果。

11.8-6 按照强化约束的步骤,强化下面的纯 0-1 整数规划问题的约束。

$$5x_1 - 10x_2 + 15x_3 \leq 15$$

11.8-7 按照强化约束的步骤,强化下面的纯 0-1 整数规划问题的约束。

$$x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 \geq 1$$

11.8-8 按照强化约束的步骤,强化下面的某个纯 0-1 整数规划问题的约束集。

$$(a) x_1 + 3x_2 - 4x_3 \leq 2$$

$$(b) 3x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 1$$

11.8-9 11.8 节中以某个纯 0-1 整数规划问题为例,其约束为 $2x_1 + 3x_2 \leq 4$,说明了强化约束的步骤。请你应用生成割平面的步骤,由此约束产生同样的约束 $x_1 + x_2 \leq 1$ 。

11.8-10 某个纯 0-1 整数规划问题,它的某个约束为 $x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 5$,找出该约束的所有最小覆盖,然后求出相应的割平面。

11.8-11 某个纯 0-1 整数规划问题,它的某个约束为 $25x_1 + 15x_2 + 20x_3 + 10x_4 \leq 35$,找出该约束的所有最小覆盖,然后求出相应的割平面。

11.8-12 对下面的纯 0-1 整数规划问题的约束,生成尽可能多的割平面。

$$3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 8x_4 \leq 10$$

11.8-13 对下面的纯 0-1 整数规划问题的约束,生成尽可能多的割平面。

$$5x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 6x_5 \leq 9$$

11.8-14 思考下面的 0-1 整数规划问题。

$$\max \quad Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 2x_6 + 2x_7 + x_8 + 3x_9$$

$$\text{s. t.} \quad 3x_2 + x_4 + x_5 \geq 3$$

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_2 + x_4 - x_5 - x_6 \leq -1$$

$$x_2 + 2x_6 + 3x_7 + x_8 + 2x_9 \geq 4$$

$$-x_3 + 2x_5 + x_6 + 2x_7 - 2x_8 + x_9 \leq 5$$

$$\text{且} \quad x_j = 0 \text{ 或 } 1 \quad (j=1, 2, \dots, 9)$$

采用自动的问题预处理(固定变量、删除冗余约束和强化约束)技术,使该问题的约束最强化,然后观察该强化后的问题,得出最优解。

11.9-1 思考下面的问题。

$$\max \quad Z = 10x_1 + 30x_2 + 40x_3 + 30x_4$$

$$\text{s. t.} \quad x_1 \in \{2, 3\}$$

$$x_2 \in \{2, 4\}$$

$$x_3 \in \{3, 4\}$$

$$x_4 \in \{1, 2, 3, 4\}$$

每个变量的值必须都不一样, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10$ 。

采用约束规划技术(域缩减、约束传播、搜寻步骤和枚举),找出所有可行解,然后找到一个最优解。说明你的运算步骤。

11.9-2 思考下面的问题。

$$\max \quad Z = 5x_1 - x_1^2 + 8x_2 - x_2^2 + 10x_3 - x_3^2 + 15x_4 - x_4^2 + 20x_5 - x_5^2$$

$$\begin{aligned} \text{s. t.} \quad & x_1 \in \{3, 6, 12\} \\ & x_2 \in \{3, 6\} \\ & x_3 \in \{3, 6, 9, 12\} \\ & x_4 \in \{6, 12\} \\ & x_5 \in \{9, 12, 15, 18\} \end{aligned}$$

每个变量的值必须都不一样, $x_1 + x_3 + x_4 \leq 25$ 。

采用约束规划技术(域缩减、约束传播、搜寻步骤和枚举), 找出所有可行解, 然后找到一个最优解。说明你的运算步骤。

11.9-3 思考下面的问题。

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 100x_1 - 3x_1^2 + 400x_2 - 5x_2^2 + 200x_3 - 4x_3^2 + 100x_4 - 2x_4^2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 \in \{25, 30\} \\ & x_2 \in \{20, 25, 30, 35, 40, 45\} \\ & x_3 \in \{20, 25, 30\} \\ & x_4 \in \{20, 25\} \end{aligned}$$

每个变量的值必须都不一样

$$\begin{aligned} & x_2 + x_3 \leq 60 \\ & x_1 + x_3 \leq 50 \end{aligned}$$

采用约束规划技术(域缩减、约束传播、搜寻步骤和枚举), 找出所有可行解, 然后找到一个最优解。说明你的运算步骤。

11.9-4 思考 8.3 节中的人才市场的例子。表 8.25 把它看成一个指派问题。利用全局约束, 为该指派问题建立一个简洁的约束规划模型。

11.9-5 思考习题 8.3-4 提出的混合接力中如何安排游泳选手的问题。书后的答案把它当成指派问题来建模。利用全局约束, 为该指派问题建立一个简洁的约束规划模型。

11.9-6 思考习题 10.3-3。该问题是决定给这四门期末考试, 每门多少天的学习时间。为该问题建立一个简洁的约束规划模型。

11.9-7 习题 10.3-2 讨论了一个拥有三家连锁零售商店的店主如何在每个商店分配草莓的问题。为该问题建立一个简洁的约束规划模型。

11.9-8 约束规划的特点之一是变量可作为目标函数中的各项下标。例如, 思考下面的货郎问题。货郎需走过 n 个城市(城市 $1, 2, \dots, n$), 每个城市恰好走一次, 起点是城市 1(他的家乡), 走遍整个旅程, 最后返回城市 1。令 c_{ij} 表示城市 i 与城市 j 之间的距离, $i, j = 1, 2, \dots, n (i \neq j)$ 。目的是确定一条路线, 使得整个旅程的总长度最短(在第 13 章的介绍中, 货郎问题被认为是著名的古典运筹学问题, 它可以应用于许多与货郎毫无关系的场合)。

令决策变量 $x_j (j = 1, 2, \dots, n, n+1)$ 代表货郎走过的第 j 个城市, 其中 $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1$ 。采用约束规划, 目标函数可表示为

$$\min Z = \sum_{j=1}^n c_{x_j} x_{j+1}$$

采用该目标函数,为该问题建立一个完整的约束规划模型。

- 11.10-1 从本章末参考文献下端部分,选择整数规划得奖应用之一。先阅读这篇文章,然后用两页纸概述其应用及带来的财务与非财务效益。
- 11.10-2 从本章末参考文献下端部分,选择整数规划得奖应用的三篇。先阅读每一篇,然后各用一页纸分别概述其应用及其带来的财务与非财务的效益。



案例 能力的担忧

本特里·汉弥尔顿(Bentley Hamilton)把《纽约时报》的商务版报纸扔到会议室的会议桌上,看着他的同事们在有加厚软垫的椅子上坐立不安。

汉弥尔顿先生想要做一个决定。

他扔掉了《纽约时报》刊登华尔街每日新闻的封面页,看着他的同事们张大了原本呆滞的双眼。

汉弥尔顿先生是想做一个决定了。

然后他扔掉了报纸堆上面《金融时报》的第一页,看着同事们抹去额头的汗珠。

汉弥尔顿先生希望他的想法能够让他的同事们牢记。

“我刚才已经向你们建议过含有当今顶尖商务事件的三份具有领导性的金融报纸。”汉弥尔顿先生的语气很紧张、愤怒,“我亲爱的同事们,我们的公司正在跌入地狱!还需要我向你们读头版头条消息吗?来看《纽约时报》:52个周以来,CommuniCorp 股票跌落到最低;来看看《华尔街日报》:仅仅在一年中,CommuniCorp 的传呼机市场份额就下降了25%。哦,还有我最喜欢的《金融时报》:CommuniCorp 股票下降是因为内部通信的混乱。我们的公司是怎么落到如此可怕的境地的?”

汉弥尔顿先生通过投影仪展示了一条一直倾斜上升的曲线。“这就是过去12个月我们公司生产力的图表。通过这个图表你们能够看到,我们公司的呼叫制造设备在过去12个月中持续增长。很明显,生产力不是产生问题的原因。”

汉弥尔顿先生通过投影仪展示第二条一直倾斜上升的曲线。“这是过去12个月错失的或是迟交订单的图表。”汉弥尔顿先生听见他同事中有喘息的声音。“从这张图表中你们可以看见,过去12个月我们错失的或是迟交的订单一直甚至是显著地增长。我想这个趋势可以很好地解释为什么我们一直在丢失市场份额和导致我们的股票跌落到过去最低的水平。我们已经丢失了零售商,这些零售商依赖我们及时交货来满足顾客的需求。”

“当我们的生产水平能够满足所有的订单时,为什么我们会错失如此多的订单?”汉弥尔顿先生问,“我要问问几个部门这个问题。”

“我们对市场的反应机制很不敏感!”汉弥尔顿先生用难以置信的口吻说道:“市场营销部门和生产部门不沟通,因此,生产部门不知道该生产怎样的产品来满足已签好订单的

要求。生产部门想按计划进行生产,因此他们生产产品不会考虑是否已经有订单。产成品被送到仓库后,营销部门却不知道仓库里面这批产品的数量和型号。他们尽力和仓库主管部门进行沟通,来确定清单产品是否满足订单要求,但他们却很少能得到满意的答复。”

汉弥尔顿顿了顿,直视着他的员工说:“女士们、先生们,看来我们要很严肃地面对一个内部沟通的问题了。我想马上解决这个问题。我打算组建一个网络,公司所有员工都可以通过 E-mail 提出中肯的意见来保证员工之间相互沟通。因为这个内部网络将反映我们系统内部沟通的很大变化,我期待员工的意见和系统中的一些弊病显现出来。因此我决定分阶段安装公司内部网络。”

汉弥尔顿先生把下列时间点和要求表格传给了他的同事。

第一个月	第二个月	第三个月	第四个月	第五个月
企业内部网培训				
内部销售网络的安装				
生产网络的内部安装				
仓库网络的内部安装				
营销网络的内部安装				
部门	员工数量			
销售	60			
生产	200			
仓库	30			
营销	75			

汉弥尔顿先生继续解释这个要求和时间点的表格。“第一个月,我不想把这个网络引入任何部门;我只是想把这个消息告诉大家,并且收到大家对这个网络的一些意见。第二个月我会把这个网络应用在销售部门,因为这个部门能收到来自所有顾客的批评性意见。第三个月我会把生产部门加入这个网络中。第四个月,我想在所有仓库中安装这个网络,在第五个也就是最后一个月,我会把营销部门加入这个网络中。通过各部门的内部网络,员工的意见会在最后的时间点内形成一个表格。”

汉弥尔顿先生转向公司信息管理部门经理艾米莉·约翰说:“在企业内部网的安装计划方面我需要你的帮助。尤其是公司需要购买内部网络的服务器。员工需要连接到公司的服务器来把信息下载到他们自己的计算机。”

汉弥尔顿先生把以下的这个表格递给了艾米莉。这个表格详细地描述了能买到的服务器的型号,以及每个服务器能支持的员工的数量和每个服务器的价格。

服务器类型	服务器能支持的员工数/人	服务器的花费/美元
标准型的英特尔奔腾 PC	最高能支持 30	2 500
高级的英特尔奔腾 PC	最高能支持 80	5 000
SGI 工作组	最高能支持 200	10 000
Sun 工作组	最高能支持 2 000	25 000

“艾米莉,我需要你确定购买哪种服务器和什么时候购买服务器花费最少,并且确保公司有足够的服务能力来满足内部网络能在规定时间内完成安装。”汉弥尔顿先生说,“例如,你可以在第一个月买一台大的服务器来满足公司所有员工,或者买几台小的服务器满足所有员工,或者每个月买一台小服务器满足新进入公司内部网的部门。”

“会有很多因素使你比较难做出决定。”汉弥尔顿先生继续说,“有两个服务器厂商愿意对 CommuniCorp 提供折扣。SGI 愿意在前两个月内提供每台服务器 10% 的折扣,但必须在第一个月或第二个月购买。SUN 愿意在前两个月内提供所有服务器 25% 的折扣。而且你第一个月购买资金是有限制的。CommuniCorp 已经把预算的大部分分配给未来的两个月,因此你总共有 9 500 美元可用来在第一个月或第二个月购买服务器。最后,生产部门要求至少拥有三台比较强大的服务器中的一台。你能在这周末把决定交给我吗?”

(a) 艾米莉决定评估一下每个月基本要购买的服务器的数量和类型。每个月艾米莉要根据定制要求和整数规划(IP)模式决定买哪种服务器花费最少并且能满足新用户的要求。她要在每个月决定购买多少并且是哪种类型的服务器。计划总共花费是多少?

(b) 艾米莉意识到假如在最初几个月购买一台比较大的服务器,就会节省一部分资金,并能满足所有最后几个月加入进来的用户的要求。因此她决定评估一下整个计划期间购买服务器的类型和数量。定制的 IP 模式决定了她每个月购买的满足花费最小并且满足新加入用户的要求。每个月她要买多少种、什么类型的服务器? 这项计划的总花费额是多少?

(c) 为什么用第一种方法产生的答案与第二种方法产生的答案会不同?

(d) 在艾米莉制订的预算中还有其他花费吗? 如果有,那是什么呢?

(e) CommuniCorp 的各个部门对于这个内部网络会有哪些更长远的考虑呢?

决策分析

前面各章主要探讨结果具有相当程度的确定性的可选决策。决策环境使得建立有效的数学模型(线性规划、整数规划、非线性规划等)成为可能,模型的目标函数给定了任一决策组合的估计结果。虽然这些结果通常不能被完全确定地预计,但是至少能够足够精确地判断使用这些模型(伴随敏感性分析等)是否可行。

然而,决策通常必须在充满不确定性的环境下做出。下面举几个例子:

1. 制造商将新产品推向市场。潜在顾客是什么反应?应该生产多少?在决定全面推销之前产品是否应该在小范围内进行试销?成功地推广这种产品需要多少广告?

2. 金融公司投资于证券。哪些市场部门和个人证券更有前景?经济走向如何?利率如何?这些因素怎样影响投资决策?

3. 政府承包人投标新合同。工程项目的实际成本如何?哪些公司可能投标?它们的投标价可能是多少?

4. 农业企业为下一季度选择庄稼和牲畜的养殖组合。天气条件如何?价格走势如何?成本是多少?

5. 石油公司决定是否在某特定地点开采石油。出油的可能性有多大?储量多少?需要钻探多深?需要在开采前进行进一步的地质勘探吗?

这些是面临很大不确定性的决策问题,需要决策分析来解决。当结果不确定时,决策分析提供了有理性决策的框架和方法。

博弈论和决策分析使用的方法具有某些相似性,然而也存在不同,它们被设计用于不同的应用。我们将在 15.2 节具体介绍二者的异同。

通常,使用决策分析时需要解决的一个问题是,立即制订所需的决策还是首先进行一些测试(以一定的代价)减少决策结果的不确定性。例如,测试可能是在决定是否进行大规模生产和营销产品前,对新产品进行实地测试以检验客户的反应。这个测试指的是进行试验。因此,决策分析将决策分为有试验和无试验两种情况。

15.1 节介绍一个贯穿整章用于解释目的的原型实例。15.2 节和 15.3 节分别提出不

进行试验和进行试验决策的基本原则。接下来介绍决策树,这是一个在需要制订一系列决策时用于描述和分析决策过程的有用工具。15.5节讨论了怎样使用电子表格对决策树进行敏感性分析。15.6节介绍了效用理论,提供了对决策可能结果的校准方法反映了这些结果对决策者的真正价值。最后,本章末尾讨论了决策分析的实际应用并且总结了多种对组织非常有益的应用。



15.1 原形范例

Goferbroke 公司拥有一块可能有石油的地产。一位地质学家顾问向管理层报告她相信有 $1/4$ 的可能性有油。

由于这个前景,另一家石油公司提出用 90 000 美元购买此土地。然而,Goferbroke 公司正在考虑保留此土地自己开采石油。开采的成本是 100 000 美元。如果发现石油,期望收入是 800 000 美元,因此公司的期望利润是 700 000 美元(减去开采成本之后)。而如果没有石油,将有 100 000 美元的损失(开采成本)。

表 15.1 总结了以上数据。15.2 节给出了基于这些数据制订是否开采或者出售决策的方法(我们称其为 Goferbroke 公司第一问题)。

然而,在决定出售还是开采之前,另一个选择是进行详细的地震勘测以获得发现石油概率的更好估计(这一更具体的决策过程将被称为 Goferbroke 公司完整问题)。15.3 节讨论了试验的决策制订情况,届时将提供所需的其他数据。

公司的运营资金并不多,因此,100 000 美元的损失将是相当严重的。在 15.6 节,我们将说明怎样对各种可能结果的影响评价进行精练。

表 15.1 Goferbroke 公司的预期收益

方 案	土地状态	收益/美元	
		有石油	无石油
开采石油		700 000	-100 000
出售土地		90 000	90 000
状态可能性		$1/4$	$3/4$



15.2 不进行试验的决策制定

在解决 Goferbroke 公司第一问题之前,我们将制订一个一般决策框架。

概括来讲,决策者必须从可能的决策方案集合中选择一个方案(alternative)。集合包括怎样处理问题的所考虑的所有可行方案。

方案的选择一定面临不确定性,因为结果将受到随机因素影响而这些因素在决策者的掌控之外。这些随机因素决定了决策方案执行时的情形。每一种可能情形都被称为可能的自然状态(state of nature)。

应用案例

随着 Conoco 公司和 Phillips 石油公司于 2002 年的合并, ConocoPhillips 成为美国第三大综合能源公司, 拥有的资产达到 1 100 亿美元, 雇员有 3.8 万名。与该行业的其他公司一样, ConocoPhillips 公司的管理者必须制订决策, 将有限的资本投入几个有风险的石油勘探项目。这些决策对公司的收益有巨大的影响。

早在 20 世纪 90 年代, Phillips 石油公司在应用运筹学方法支持决策方面就是一个行业领先者, 该公司开发了一套名为 DISCOVERY 的决策分析软件包。应用界面允许地质学家或工程师对一个项目的不确定性进行建模, 接着软件解释输入变量并构建一个决策树指出所有的决策节点(包括产生地震信息的概率)和干预节点。该软件的主要特点是应用了指数型的效用函数(将在 15.6 节介绍)以考虑管理者对于投资风险的偏好。一套直觉性的问题被用来测度风险偏好以便为效用函数提供一个风险承受参数的大概估计值。

管理者应用该软件能够做到以下工作:(1)应用整个公司一致性的风险承受政策评价石油勘探项目;(2)根据总体偏好对项目进行排序;(3)识别公司参与这些项目的恰当程度;(4)保证预算。

资料来源: M. R. Walls, G. T. Morahan, and J. S. Dyer: "Decision Analysis of Exploration Opportunities in the Onshore US at Phillips Petroleum company," *Interfaces*, 25(6): 39-56, Nov. - Dec. 1995. (以下网址提供本文的链接: www.mhhe.com/hillier.)

对于决策方案和自然状态的每种组合, 决策者都知道最终收益将如何。收益 (payoff) 是结果对决策者价值的定量测度。例如, 收益通常被表示为净现金收益(利润), 尽管其他测度也可能被使用(如 15.6 节提到的)。如果当自然状态被给定时, 结果的影响不能被完全确定, 那么收益将变成一个后果度量的期望值(统计意义上)。收益表 (payoff table) 通常被用于提供行动与自然状态每种组合的收益。

如果你先前学习了博弈论, 我们将指出决策分析与二人零和博弈之间有趣的相似性。决策者和自然被看成博弈的双方。方案和可能的自然状态被看成各方的可用策略, 其中策略的每种组合产生参与者 1(决策者)的某些收益。从这个观点看, 决策分析的框架可被总结如下:

1. 决策者需要从决策方案集中选择一个方案。
2. 自然将选择一个可能的自然状态。
3. 决策方案和自然状态的每种组合将产生一个收益, 作为收益表中的一个元素。
4. 收益表被决策者用于根据合适的准则找出最优解。

很快我们将提出三种可能的准则, 其中第一个(极大化极小收益准则)来自博弈论。

然而, 与二人零和博弈的类比忽视了一个重要方面。在博弈论中双方都被假设是理性的, 选择策略提高他们自己的福利。这个描述仍然符合决策者, 但是不符合自然。相比之下, 自然现在是被动的参与者, 以某种随机的方式选择它的策略(自然状态)。这点不同意味着怎样选择最优策略(方案)的博弈论准则在当前的情境下将对很多决策者不具有吸引力。

一个额外要素需要被添加到决策分析框架中。决策者一般具有一些应该被考虑的与自然可能状态相对可能性的信息。这些信息通常能够被转化成概率分布, 自然状态是

随机变量,这个分布被看成先验分布(prior distribution)。先验分布通常是主观的,它们依赖于个人的经验或者直觉。由先验分布提供的各个自然状态的概率称为先验概率(prior probabilities)。

此框架下原型实例的建模

如表 15.1 所示,Goferbroke 公司有两个要考虑的可能决策方案:开采石油或者出售土地。如表 15.1 的列标题所示,可能的自然状态是土地有石油和没有石油。由于顾问地质学家已经估计有 $1/4$ 的机会会有石油($3/4$ 的机会没有石油),两个自然状态的先验概率分别为 0.25 和 0.75。因此,以千美元为单位的收益,收益表可以直接从表 15.1 中获得,如表 15.2 所示。

表 15.2 用于 Goferbroke 公司问题决策分析建模的收益表

方 案	自然状态	
	有石油	无石油
1. 开采石油/千美元	700	-100
2. 出售土地/千美元	90	90
先验概率	0.25	0.75

接下来我们将根据下面介绍的三个准则中的每一个使用收益表找出最优方案。

最大最小收益准则

如果决策者的问题被看做与自然的博弈,那么博弈论将采用最小最大准则选择决策方案。从参与者 1(决策者)的观点来看,这个准则被命名为最大最小收益准则是适当的,概括如下。

最大最小收益准则(maximin payoff criterion): 对于每一个可能的决策方案,找出所有可能自然状态的最小收益,然后找出所有最小收益中最大的一个。选择最小收益最大的方案。

表 15.3 给出了这个准则在原型实例中的应用。因此,由于出售的最小收益(90)比开采(-100)大,将选择前面的方案(出售土地)。

这个准则的原理在于它提供了将获收益的最好保证。不管例子中自然的真实状态是什么,出售土地获得的收益不能少于 90,从而提供了最好的保证。因此,这个准则采用悲观主义的观点,不管哪个方案被选择,对应于该方案的最坏自然状态都可能发生,因此我们应该选择在最坏自然状态下产生最好收益的方案。

表 15.3 应用最大最小准则于 Goferbroke 公司第一问题

方 案	自然状态		最小
	有石油	无石油	
1. 开采石油	700	-100	-100
2. 出售土地	90	90	90 ←最大化最小值
先验概率	0.25	0.75	

表 15.4 应用最大似然值准则于 Goferbroke 公司第一问题

方 案	自然状态		
	有石油	无石油	
1. 开采石油	700	-100	-100
2. 出售土地	90	90	90 ←最大
先验概率	0.25	0.75	

↑
最大

当面对一个理性的、有恶意的对手时,这个原理是十分有效的。然而,这个准则并不被经常用于与自然博弈,因为它是一种极端保守的准则。事实上,它假设自然是一个有意识的对手,想要对决策者尽可能地造成最大的伤害。自然不是一个有恶意的对手,决策者不需要只集中在每个方案最差的可能收益。特别是当方案的最差可能收益来自相对不太可能的自然状态时。

因此,通常只有非常谨慎的决策者才会对这个准则感兴趣。

最大似然值准则

下面的准则集中于自然最可能的状态,概括如下。

最大似然值准则(maximum likelihood criterion): 识别最可能的自然状态(具有最大先验概率的状态)。对于这一自然状态,找出具有最大收益的决策方案。选择这个决策方案。

应用这个准则到例子中,如表 15.4 所示无石油状态具有最大的先验概率。在这一列,出售方案有最大的收益,因此选择出售土地。

这个准则的吸引力在于最重要的自然状态是最可能的状态,因此被选择的方案是对于这个特别重要的自然状态最好的方案。基于假设这个自然状态将会发生的决策和假设其他任何自然状态相比趋向于给有利的结果更好的机会。而且,除了确定最可能的状态外,这个准则不依赖于各个自然状态概率的不可靠主观估计。

这个准则的主要缺点是它完全忽略了很多相关信息。除了最可能的自然状态以外,没有状态被考虑。对于具有很多可能自然状态的问题,最可能自然状态的概率可能非常小。因此,集中于这个自然状态可能是非常没有保证的。即使在这个例子里,无石油状态的先验概率是 0.75,这个准则忽略了如果公司开采并发现石油的话相当有吸引力的收益 700。事实上,这个准则不允许在一个低概率的大收益上赌博,不管这个赌博的吸引力有多大。

贝叶斯决策准则^①

我们的第三个通常被选择的决策准则是贝叶斯决策准则,描述如下。

^① 这个名称的起源是该准则可能由 Reverend Thomas Bayes 建立。他可能是 18 世纪的一位英国大臣、哲学家和数学家(同样的思想植根于经济学领域)。这个决策准则有时候被称为期望货币价值准则(EMV),虽然对于那些不使用货币价值作为收益度量的情况有点儿用词不当(见 15.6 节)。

贝叶斯决策准则(Bayes' Decision Rule): 使用各个自然状态概率的可得到的最好估计(当前的先验概率), 计算每个可能决策方案收益的期望值。选择具有最大期望收益的决策方案。

对于原型实例, 这些期望收益从表 15.2 直接计算如下:

$$E[\text{收益(开采)}] = 0.25(700) + 0.75(-100) = 100$$

$$E[\text{收益(出售)}] = 0.25(90) + 0.75(90) = 90$$

由于 100 大于 90, 选择的方案是开采石油。

注意, 这个选择与前两个准则下出售方案的选择有所不同。

贝叶斯决策准则的最大优势在于它结合了所有可用的信息, 包括所有的收益和各个自然状态概率的最好可得估计。

有些人认为这些概率估计必然在很大程度上是主观的, 因此是不可靠的, 不能被信任。没有精确的方法预测未来, 包括将来的自然状态, 即使以概率的方式。这一观点有一些合理性。在每一种情况下, 概率估计的合理性应该被评估。

然而, 在许多情况下, 过去的经验和当前的证据使得能够建立合理的概率估计。使用这些信息和忽略它们相比应该为合理决策提供更好的依据。而且, 经常进行试验能够改进这些估计, 正如下一节介绍的一样。因此, 本章剩余的部分将只使用贝叶斯决策准则。

为了评估先验概率可能不准确性的影响, 进行下面介绍的敏感性分析通常是有帮助的。

贝叶斯决策的敏感性分析

敏感性分析通常被用于各种运筹学应用, 研究当数学模型中包含的一些数字不正确时的影响。在这个例子中, 数学模型见表 15.2。该表中最不可靠的数字是先验概率。尽管类似的方法可用于分析表中的收益, 我们将集中用敏感性分析来进行这方面的研究。

两个先验概率的和必须等于 1, 因此这些概率中一个概率的数量增加必然伴随另一个概率以相同的数量减少; 反之亦然。Goferbroke 公司的管理层觉得这块土地有石油的概率可能介于 15%~35%。换句话说, 有石油的先验概率在 0.15 到 0.35 这个范围之间, 因此相应的土地无石油的先验概率范围是 0.85~0.65。

令

p = 有石油的先验概率

任何概率 p 下采油的期望收益是:

$$E[\text{收益(开采)}] = 700p - 100(1 - p) = 800p - 100$$

图 15.1 中的斜线表示对于 p 的期望收益图。由于对于任何 p , 出售土地的收益都是 90, 图 15.1 中的水平线给出了对于 p 的 $E[\text{收益(出售)}]$ 。

图 15.1 中的四个点表示两个决策方案在概率 $p=0.15$ 和 $p=0.35$ 时的期望收益。当 $p=0.5$ 时, 决策更偏向于出售土地(期望收益 90 对开采 20)。而当 $p=0.35$ 时, 决策更偏向于开采石油(期望收益 180 对出售 90)。因此, 决策对 p 十分敏感。敏感性分析已经表明, 如果可能的话建立一个更精确的 p 值估计是十分重要的。

图 15.1 中两条直线相交的点是交叉点, 随着先验概率的增长, 在该点, 决策从一个方

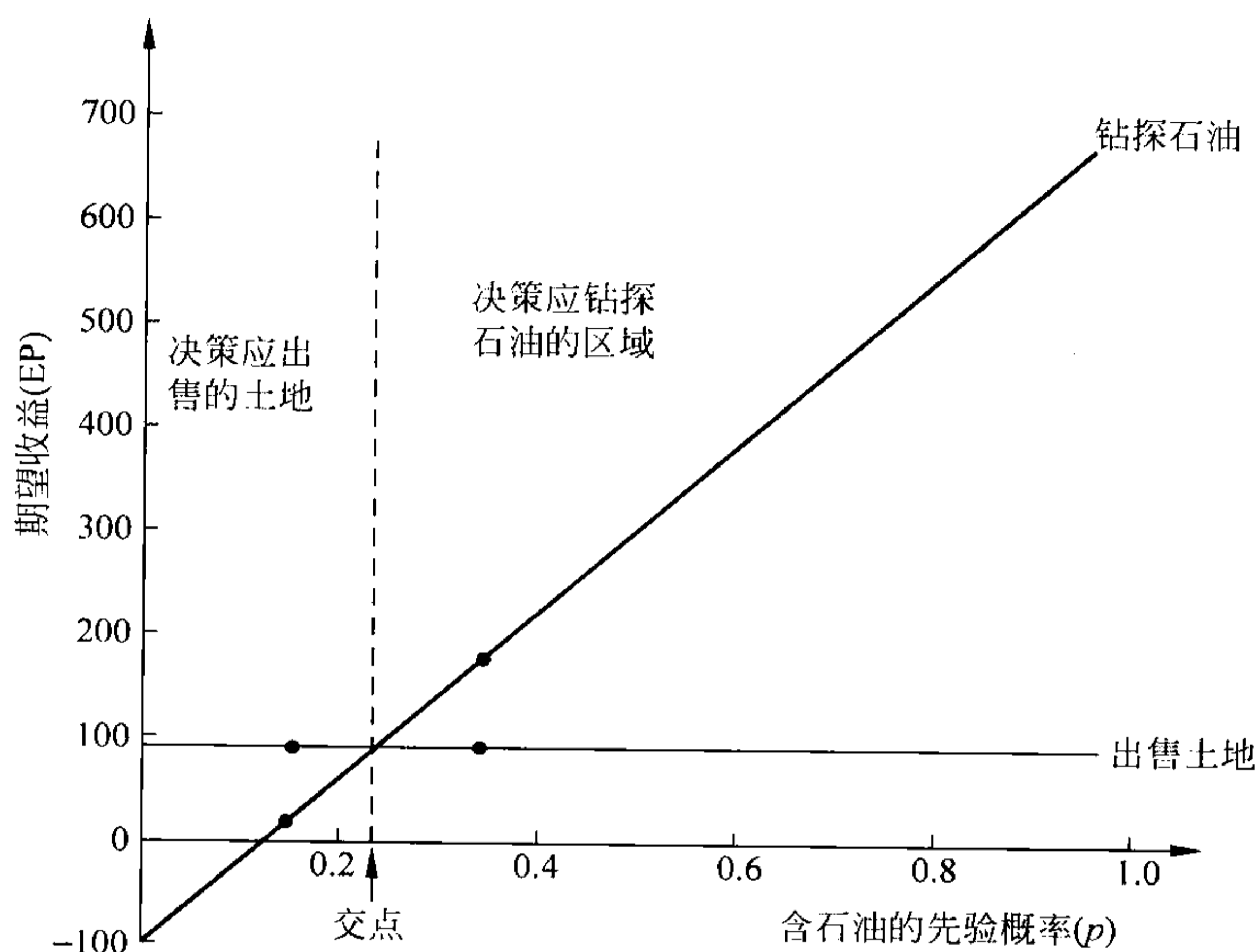


图 15.1 显示了 Goferbroke 公司问题中先验概率第一次变化时每种决策的期望收益如何变化

案(出售土地)转向另一个方案(开采石油)。为了找到这一点,我们令

$$E[\text{收益(开采)}] = E[\text{收益(出售)}]$$

$$800p - 100 = 90$$

$$p = \frac{190}{800} = 0.2375$$

结论: 如果 $p < 0.2375$, 应该出售土地。

如果 $p > 0.2375$, 应该开采石油。

因此, 当尽量估计 p 的真实值时, 关键问题是看它比 0.2375 大还是小。

对于多于两个决策方案的其他问题, 能够进行同种类型的分析。主要的差别在于对应于图 15.1 中的图形现在将多于两条直线(一条代表一个方案)。然而, 对应于先验概率特定值最上面的直线仍然表明哪个方案应该被选择。由于直线多于两条, 将有多于一个的交叉点, 决策从一个方案转向另一个方案。

对于多于两个可能自然状态的问题, 最直接的方法是按照上面介绍的方法一次仅对两个状态进行敏感性分析。这也包括研究保持其他状态先验概率固定的情况下, 当一个状态的先验概率增加另一个状态的先验概率以同样的数量减少时将会发生什么。这个过程能够被重复应用于其他状态对的组合。

技术人员有时借助软件进行这种类型的敏感性分析, 包括产生图形。例如, Excel 的插件 SensIt 能够用于带有概率模型的敏感性分析, 如当应用贝叶斯规则时。15.5 节将介绍和说明 SensIt 的应用。

因为 Goferbroke 公司的决策严重依赖于有石油的真实概率, 应该仔细考虑进行地震勘测来更为接近地估计这个概率。在接下来的两节中我们将探讨这个问题。



15.3 进行试验时的决策制定

通常,额外的测试(试验)可以用来提高由先验概率提供的各个自然状态概率的初步估计。这些被改进的估计称为后验概率(posterior probabilities)。

我们首先修改一下 Goferbroke 公司的问题以加入试验,然后说明怎样得到后验概率,最后讨论怎样决定是否值得进行试验。

继续原型实例

正如 15.1 节末尾提到的,制订决策前的一个可用选择是进行详细的地震勘测以获得有石油概率的更好估计。总成本是 30 000 美元。

应用案例

加拿大不列颠哥伦比亚省的工人赔偿委员会(WCB)负责本省工人和员工的职业健康和安、康复及赔偿。WCB 向超过 165 000 个雇主——在不列颠哥伦比亚省他们雇用了大约 180 万人——提供服务。该委员会每年要花费大约 10 亿美元用于赔偿和康复。

控制 WCB 成本的一个关键因素是识别那些原本是短期残疾索赔但有可能转变为长期残疾索赔的案例,除非有一个强有力的早期索赔管理干预机制以提供必要的医疗和康复。该问题是如何正确识别这些高风险的索赔以便减少索赔赔偿和索赔管理干扰的期望成本。

WCB 组织了一个运筹团队应用决策分析来研究该问题。对于每种不同类型的残疾索赔,根据受伤的严重程度,使用一个基于残疾特点、工人性别和年龄的决策树来评价这种类型的残疾应该被划分为低风险(不需要干涉)还是高风险(需要干涉)。对于每种类型,每次计算用来解释短期残疾索赔时间的临界数量的终止点,该值能够触发索赔管理的干涉,因此可以最小化索赔支付和干涉的期望成本。该方法的核心是评估给定短期残疾索赔支付时间后请求变成长期残疾索赔的后验概率。

WCB 应用带有决策树的决策分析现在每年大概节约 400 万美元,同时使一些受伤员工重新回到工作岗位。

资料来源: E. Urbanovich, E. E. Young, M. L. Puterman, and S. O. Fattedad: "Early Detection of High-Risk Claims at the Workers' Compensation Board of British Columbia," *Interfaces*, 33(4): 15-26, July-Aug. 2003. (以下网址提供本文的链接: www.mhhe.com/hillier.)

地震勘测获得的震动声波表明该地质结构是否有利于储存石油。我们把勘测的可能发现分为下面两类。

USS: 震动显示不利,不可能有石油。

FSS: 震动显示有利,可能有石油。

基于过去的经验,如果有石油,那么不利震动声波的概率是

$P(\text{USS} | \text{有油}) = 0.4$, 因此 $P(\text{FSS} | \text{有油}) = 1 - 0.4 = 0.6$

类似地, 如果没有石油(也就是真正的自然状态是无油), 那么不利震动声波的概率被估计为

$P(\text{USS} | \text{无油}) = 0.8$, 因此 $P(\text{FSS} | \text{无油}) = 1 - 0.8 = 0.2$

很快我们将使用这些数据找出给定震动声波时各自状态的后验概率。

后验概率

从概率来讲, 我们令

n = 自然状态的可能数目;

$P(\text{State} = \text{state } i)$ = 自然状态的真实状态是 i 的先验概率, $i = 1, 2, \dots, n$;

Finding = 试验结果(一个随机变量);

Finding j = 一个可能的结果值;

$P(\text{State} = \text{state } i | \text{Finding} = \text{finding } j)$ = 给定结果值为 j , 自然的真实状态是状态 i 时的后验概率, $i = 1, 2, \dots, n$ 。

当前的问题表述如下:

给定 $P(\text{自然真实状态为 } i)$ 和 $P(\text{结果值为 } j | \text{自然真实状态为 } i)$ 时, $i = 1, 2, \dots, n$, $P(\text{真实状态为 } i | \text{结果值为 } j)$ 等于多少?

这个问题通过利用下面的概率论标准公式来回答:

$$P(\text{真实状态为 } i | \text{结果值为 } j) = \frac{P(\text{真实状态为 } i, \text{结果值为 } j)}{P(\text{结果值为 } j)}$$

$$P(\text{结果值为 } j) = \sum_{k=1}^n P(\text{自然状态为 } k, \text{结果值为 } j)$$

$$P(\text{真实状态为 } i, \text{结果值为 } j)$$

$$= P(\text{结果值为 } j | \text{真实状态为 } i) P(\text{真实状态为 } i)$$

因此, 对于每一个 $i = 1, 2, \dots, n$, 相应后验概率的期望公式是

$$\begin{aligned} & P(\text{真实状态为 } i | \text{结果值为 } j) \\ &= \frac{P(\text{结果值为 } j | \text{真实状态为 } i) P(\text{真实状态为 } i)}{\sum_{k=1}^n P(\text{结果值为 } j | \text{自然状态为 } k) P(\text{自然状态为 } k)} \end{aligned}$$

(这个公式通常被称为贝叶斯定理, 因为它由 Thomas Bayes 创立, 这位 18 世纪的数学家还发展建立了贝叶斯决策准则。)

现在让我们返回原型实例并应用这个公式。如果地震勘测的结果是不利的震动声波(USS), 那么后验概率是

$$P(\text{状态为有油} | \text{结果} = \text{USS}) = \frac{0.4(0.25)}{0.4(0.25) + 0.8(0.75)} = \frac{1}{7}$$

$$P(\text{状态为无油} | \text{结果} = \text{USS}) = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$$

类似地, 如果地震勘测的结果是有利的震动声波(FSS), 那么后验概率是

$$P(\text{状态为有油} | \text{结果} = \text{FSS}) = \frac{0.6(0.25)}{0.6(0.25) + 0.2(0.75)} = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{状态为无油} \mid \text{结果} = \text{FSS}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

图 15.2 的概率树图 (probability tree diagram) 给出了直观地表示这些计算的好方式。第一列的先验概率和第二列的条件概率是问题的部分输入数据。第一列的每一个概率乘以第二列的概率得到第三列的相应联合概率。每一个联合概率然后变成第四列相应的后验概率计算的分子。对于相同结果累加联合概率 (见图底部) 提供这个结果每个后验概率的分母。

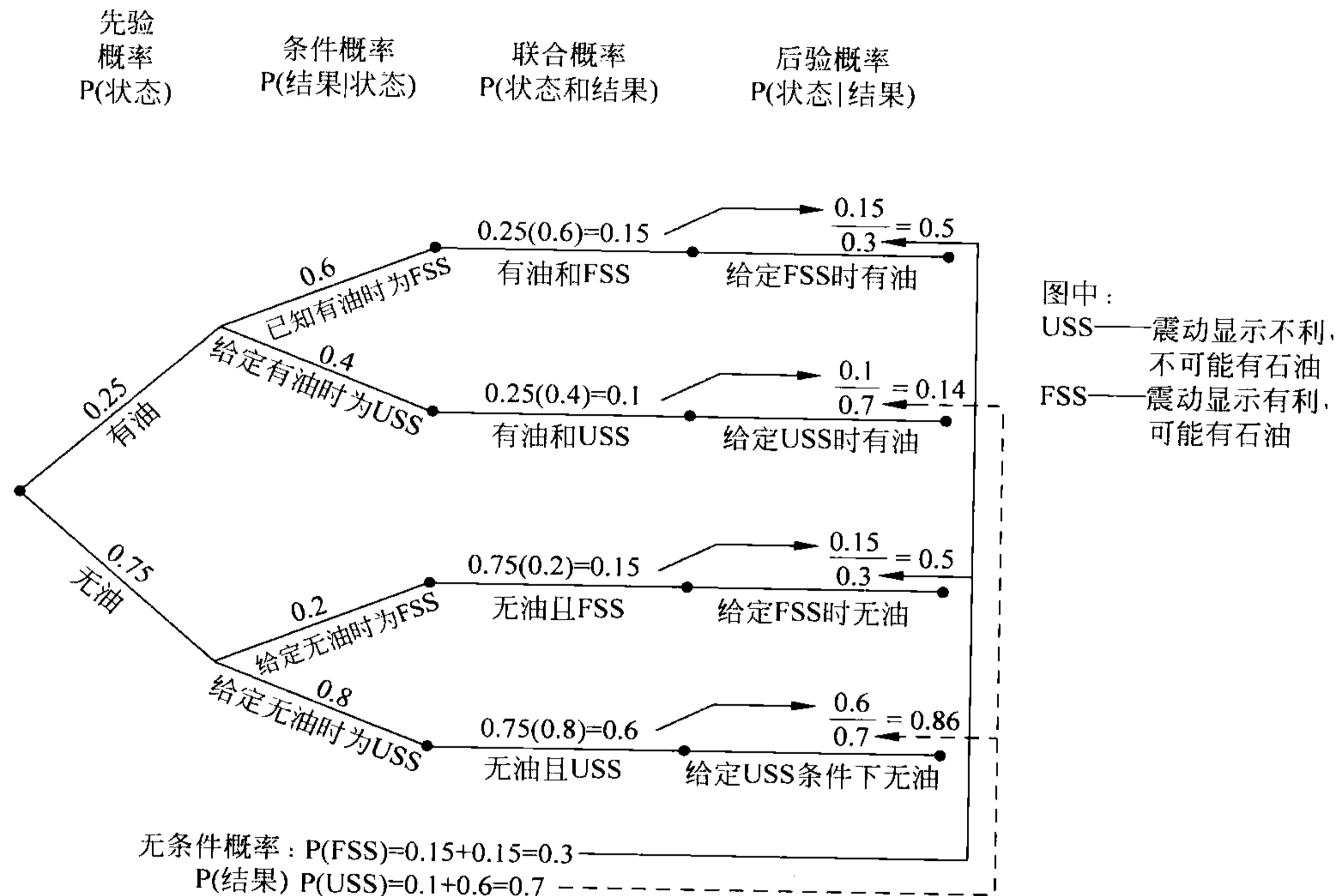


图 15.2 Goferbroke 公司问题的概率树模型显示所有的在计算自然状态的后验概率之前的概率, 自然状态的后验概率基于地震勘测的发现

运筹学课程软件也包括一个 Excel 模板, 可用于计算这些后验概率, 如图 15.3 所示。完成这些计算以后, 贝叶斯决策准则如前面那样被应用, 现在用后验概率代替先验概率。再次通过使用表 15.2 中的收益 (以千美元为单位) 并减去试验成本, 我们得到下面的结果。

如果结果是不利震动声波 (USS) 的期望收益:

$$E[\text{收益}(\text{开采} \mid \text{结果} = \text{USS})] = \frac{1}{7}(700) + \frac{6}{7}(-100) - 30 = -15.7$$

$$E[\text{收益}(\text{出售} \mid \text{结果} = \text{USS})] = \frac{1}{7}(90) + \frac{6}{7}(90) - 30 = 60$$

如果结果是有利震动声波 (FSS) 的期望收益:

$$E[\text{收益}(\text{开采} \mid \text{结果} = \text{FSS})] = \frac{1}{2}(700) + \frac{1}{2}(-100) - 30 = 270$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	用于计算后验概率的模板							
2								
3		数据:		P(找到 状态)				
4		自然	先验	找到				
5		状态	概率	FSS	USS			
6		有油	0.25	0.6	0.4			
7		无油	0.75	0.2	0.8			
8								
9								
10								
11								
12		后验		P(状态 找到)				
13		概率:		自然状态				
14		找到	P(找到)	有油	无油			
15		FSS	0.3	0.5	0.5			
16		USS	0.7	0.142 86	0.857 14			
17								
18								
19								

	B	C	D
12	后验		P(状态 找到)
13	概率:		自然状态
14	找到	P(找到)	=B6
15	=D5	=生产总和(C6:C10,D6:D10)	=C6*D6/生产总和(C6:C10,D6:D10)
16	=E5	=生产总和(C6:C10,E6:E10)	=C6*E6/生产总和(C6:C10,E6:E10)
17	=F5	=生产总和(C6:C10,F6:F10)	=C6*F6/生产总和(C6:C10,F6:F10)
18	=G5	=生产总和(C6:C10,G6:G10)	=C6*G6/生产总和(C6:C10,G6:G10)
19	=H5	=生产总和(C6:C10,H6:H10)	=C6*H6/生产总和(C6:C10,H6:H10)

图 15.3 运筹学课程软件中的这个后验概率模板使得后验概率的计算效率更高，正如此处的 Goferbroke 公司问题的例子

$$E[\text{收益}(\text{出售} | \text{结果} = \text{FSS})] = \frac{1}{2}(90) + \frac{1}{2}(90) - 30 = 60$$

由于目标是最大化期望收益，这些结果产生了如表 15.5 所示的最优策略。

来自地震勘测的结果	最优方案	未减去勘测成本的期望收益	减去勘测成本的期望收益
USS	出售土地	90	60
FSS	开采石油	300	270

然而这个分析不能回答是否值得花 30 000 美元进行试验(地震勘测)。或许放弃这个主要花费并使用无试验时的最优解(开采石油，期望收益为 100 000 美元)可能更好。下面我们将说明这个问题。

试验的价值

在进行任何试验之前，我们应该决定它的潜在价值。在此我们提出两种估计它的潜在价值的互补方法。

第一个方法(不现实地)假设试验将消除自然真实状态是什么的所有不确定性，并且这个方法对期望收益产生的改进进行了非常迅速的计算(忽略试验成本)。这个量称为完美信息的期望价值，提供了试验潜在价值的上限。因此，如果试验成本超过上限，那么这

个试验肯定应该被放弃。

然而,如果这个上限超过试验成本,那么第二个(较慢的)方法接下来应该被使用,这个方法计算了进行试验产生的期望收益的实际改进(忽略试验的成本)。用这个改进与成本相比较,来确定是否应该进行试验。

完美信息的期望价值

假设试验能够确定地识别自然的真实状态,因此提供了“完美”信息。无论哪个自然状态被识别,你自然地选择该状态具有最大收益的行动。由于我们预先不知道自然的哪个状态将被识别,因此具有完美信息期望收益的计算(忽略试验成本)需要利用自然状态的先验概率加权每个自然状态的最大收益。

Goferbroke 公司完整问题的计算如表 15.6 的底部所示,完美信息的期望值是 242.5。

表 15.6 Goferbroke 公司完整问题具有完美信息的期望收益

方 案	自 然 状 态	
	有石油	无石油
1. 开采石油	700	-100
2. 出售土地	90	90
最大收益	700	90
先验概率	0.25	0.75
具有完美信息的期望收益 = $0.25(700) + 0.75(90) = 242.5$		

因此,如果 Goferbroke 公司在选择行动之前了解到土地是否蕴藏石油,那么现在的期望收益(获得信息之前)是 242 500 美元(不包括产生信息的试验成本)。

为了评估是否应该进行试验,我们现在使用这个量来计算完美信息的期望价值。完美信息的期望价值 EVPI,计算如下:

$$EVPI = \text{完美信息的期望收益} - \text{无试验的期望收益}^{\text{①}}$$

由于试验不能提供完美信息, EVPI 提供了试验期望价值的上限。

对于同样的例子,由 15.2 节我们发现无试验的期望收益(在贝叶斯决策准则下)是 100。因此

$$EVPI = 242.5 - 100 = 142.5$$

由于 142.5 远大于 30——试验的成本(地震勘测),所以进行地震勘测是值得的。

为了进一步确定,我们现在介绍评估试验潜在收益的第二个方法。

试验的期望价值

除了只获得由于进行试验收益期望增长的上限(不包括试验成本),我们现在将做更多的工作来直接计算这个期望增长。这个量被称为试验的期望价值(有时称为样本信息的期望值)。

计算这个量需要首先计算试验的期望收益(不包括试验成本)。获得后一个量需要做前面介绍的全部工作以确定所有后验概率、进行试验的最优策略,以及与试验的每个可能

① 完美信息价值是一个随机变量等于完美信息的收益减去无试验的收益。EVPI 是这个随机变量的期望值。

结果相应的期望收益(不包括试验成本)。然后需要用相应结果的概率加权每个期望收益,也就是

$$\text{有试验的期望收益} = \sum_j P(\text{结果为 } j) E[\text{收益} \mid \text{结果为 } j]$$

其中,对 j 的所有可能值加总。

对于原型实例,我们已经做了所有的工作去获得这个等式右边的项。对于地震勘测的两个可能结果,不利的(USS)和有利的(FSS),相应的 $P(\text{结果为 } j)$ 值在图 15.2 中概率树的底部计算。

$$P(\text{USS}) = 0.7, \quad P(\text{FSS}) = 0.3$$

对于有试验的最优策略,每个试验结果的相应期望收益(不包括地震勘测的成本)在表 15.5 的第三列获得。

$$E(\text{收益} \mid \text{结果} = \text{USS}) = 90$$

$$E(\text{收益} \mid \text{结果} = \text{FSS}) = 300$$

使用这些数值,

$$\text{有试验的期望收益} = 0.7(90) + 0.3(300) = 153。$$

现在我们准备计算试验的期望价值。

试验的期望价值 EVE, 计算如下

$$\text{EVE} = \text{有试验的期望收益} - \text{无试验的期望收益}$$

因此, EVE 确定了试验的潜在价值。

对于 Goferbroke 公司

$$\text{EVE} = 153 - 100 = 53$$

由于这个值超过了 30——进行详细地震勘测的成本(千美元为单位),应该进行这个试验。



15.4 决策树

决策树提供了可视化表示问题的有用方法,并且组织了前两小节介绍的计算工作。当必须制订一系列决策时,决策树尤其有用。

建立决策树

原型实例包括下列两个决策的序列:

1. 在行动选择之前,地震勘测应该进行吗?

应用案例

威斯丁豪斯(Westinghouse)科学和技术中心是威斯丁豪斯电气公司新技术的主要研发机构。对于中心的管理者来说,由于研发项目有着巨大的不确定性并且时间较长,因此对研发项目进行评价以决定应该启动哪项研发项目,应该继续支持哪项研发项目是一项具有挑战性的工作。从最初的研发提议到研究技术潜能,一项新技术的实际开发时间可

能需要几年甚至是几十年时间。

由于中心减少成本并且快速推出高影响技术的压力不断增加,中心主管资助了一项运筹学项目以提高项目的评价。该运筹团队开发了一种决策树方法来分析每个研发提议,同时考虑主要决策点的顺序。第一个决策点是是否在第一年对一个提出的新计划进行资助。如果达到早期目标,第二个决策点是未来一段时间是否继续资助该项目。这种做法可能需要重复多次。如果实现了后期目标,下一个决策点是是否要推出该技术,因为创新仍然要满足战略性的商业目标。如果能够满足战略目标,最终的决策是是否立刻商业化或者延迟推出,或者完全忽视该技术。拥有不断推进决策节点和干预事件节点的决策树能够为描述和分析这种研发项目提供一种非常好的方法。

资料来源: R. K. Perdue, W. J. McAllister, P. V. King, and B. G. Berkey: "Valuation of R and D Projects Using Options Pricing and Decision Analysis Models," *Interfaces*, 29(6): 57-74, Nov. - Dec. 1999. (以下网址提供本文的链接: www.mhhe.com/hillier.)

2. 应该选择什么行动(开采石油或者出售土地)?

相应的决策树(添加数值和进行计算前)如图 15.4 所示。

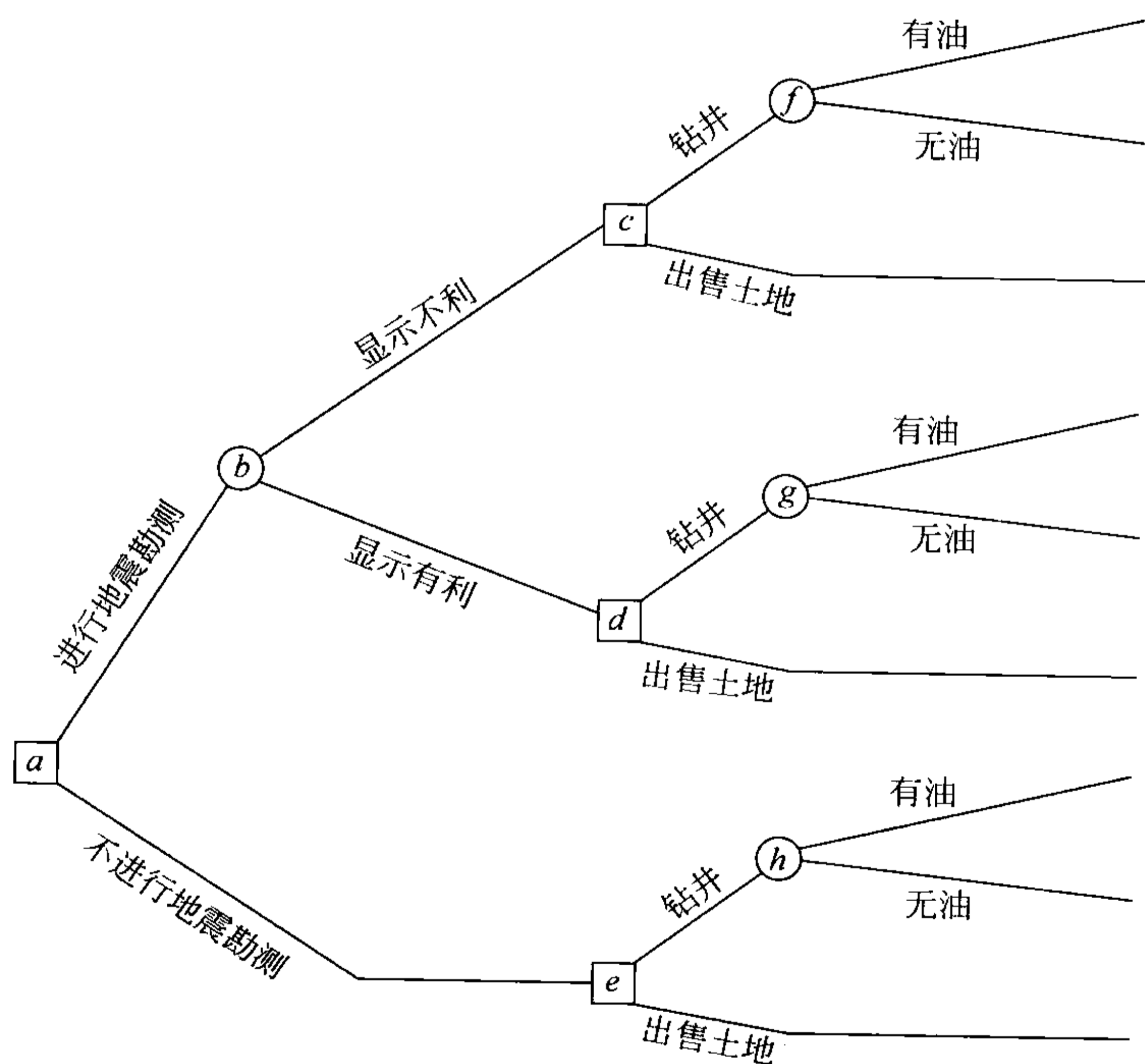


图 15.4 Goferbroke 公司问题的决策树(在包含任何数字之前)

在决策树中,连接点被称为节点(nodes)(或者分叉点),线被称为分支(branches)。

用正方形表示的决策点(decision node)表示过程中在该点需要制订决策。用圆圈表示的事件点(event node)(机会点)表示在该点随机事件发生。

因此,在图 15.4 中,第一个决策用决策点 a 表示。节点 b 是一个事件点,表示地震勘

测结果的随机事件。从事件点 b 发出的两个分支表示勘测的两个可能结果。接下来是具有两种可能选择的第二个决策(节点 c, d, e)。如果决策是开采石油,我们来到另一个事件点(节点 f, g, h),它的两个分支对应两个可能的自然状态。

注意从节点 a 到任何最终分支的路径(除了底部的一个)由制订的决策以及决策者控制之外的随机事件两者决定。这是采用决策分析解决问题的特征。

接下来构建决策树将数值插入决策树中,如图 15.5 所示。分支上下不在括号内的数是分支上产生的现金流(千美元单位)。对于从节点 a 到终端分支的每一条路径,这些相同的数值被相加以获得分支右边的黑体字表示的总收益。最后的数值集合是随机事件的概率。特别地,由于每个分支从表示可能随机事件的事件点发出,因此从该节点发生的事件概率已经被插入分支的括号内。在事件点 h ,概率是自然状态的先验概率,因为在这种情况下没有进行地震勘测获得更多的信息。然而,事件点 f 和点 g 推导出进行地震勘测的决策(然后开采)。因此,给定地震勘测的结果,这些事件点的概率是自然状态的后验概率,如图 15.2 和图 15.3 所示。最后,从事件点 b 发出两个分支,这些数值是进行地震勘测获得结果[有利(FSS)和不利的(USS)]的概率,如图 15.2 中的概率树下面,或者图 15.3 中的单元 C15 : C16 所示。

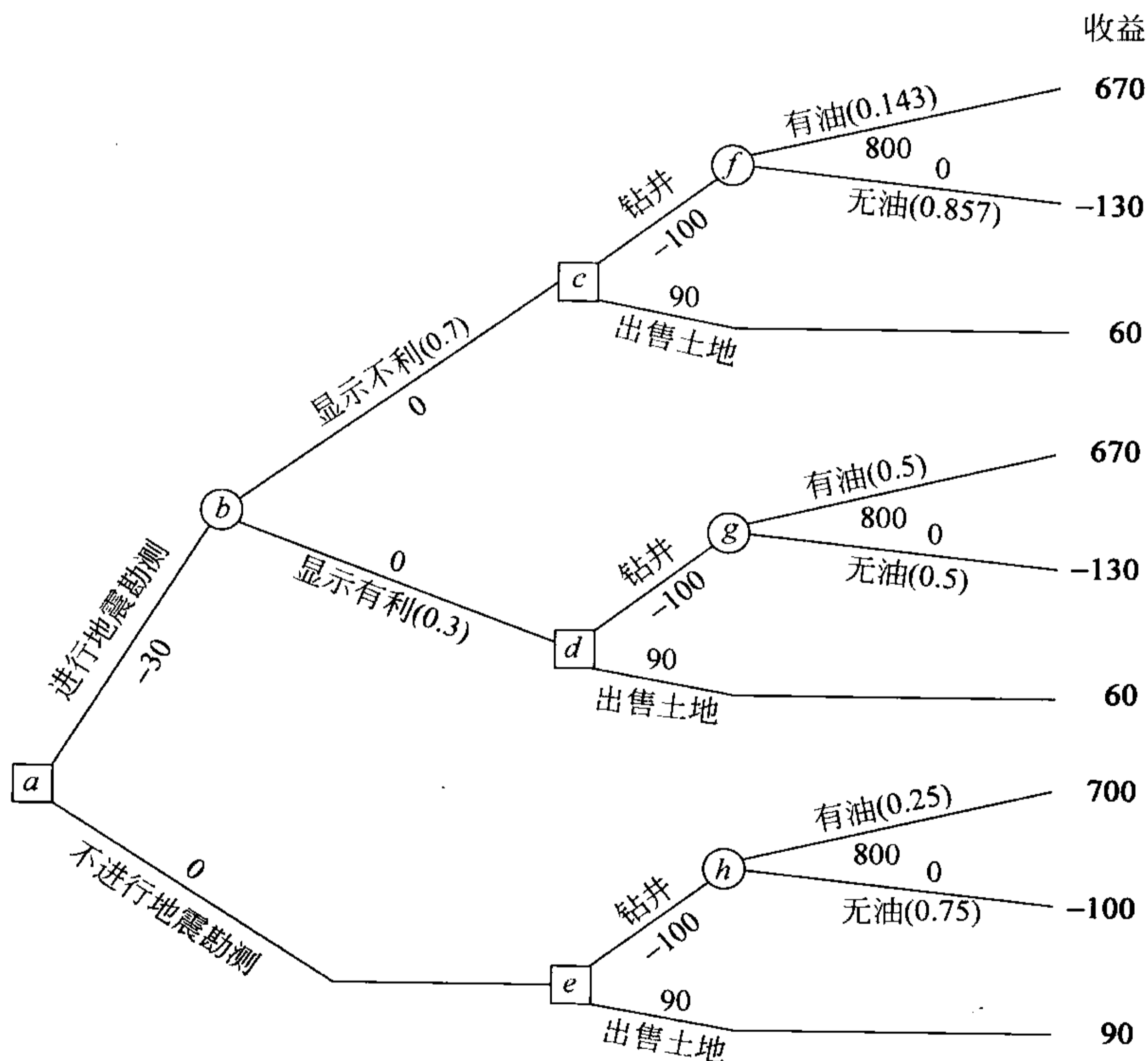


图 15.5 在增加了随机事件概率和收益之后图 15.4 的概率树

进行分析

已经建立决策树(包括它的数据),我们现在准备通过使用下面的过程分析这个问题。

1. 从决策树的右边开始,一次向左移动一步。对于每一步,根据节点是事件点还是决策点执行步骤 2 或者步骤 3。

2. 对于每个事件点,通过将每个分支的期望收益(分支右边的黑体字)与分支概率相乘得到节点的期望收益,然后把它们加总。对邻接事件点的每个决策点记录这个期望收益,并且指定这个量也是指向这个节点分支的期望收益。

3. 对于每个决策点,比较每个分支的期望收益,然后选择有最大期望收益分支的方案。在每一种情况下,通过在被拒绝的分支上添加一个双破折线来记录在决策树上的选择。

开始这个过程,考虑最右一列的节点,即事件点 f 、事件点 g 、事件点 h 。使用步骤 2,它们的期望收益(EP)计算如下:

$$\text{对于节点 } f, EP = 1/7(670) + 6/7(-130) = -15.7$$

$$\text{对于节点 } g, EP = 1/2(670) + 1/2(-130) = 270$$

$$\text{对于节点 } h, EP = 1/4(700) + 3/4(-100) = 100$$

这些期望收益被放置在这些节点的上面,如图 15.6 所示。

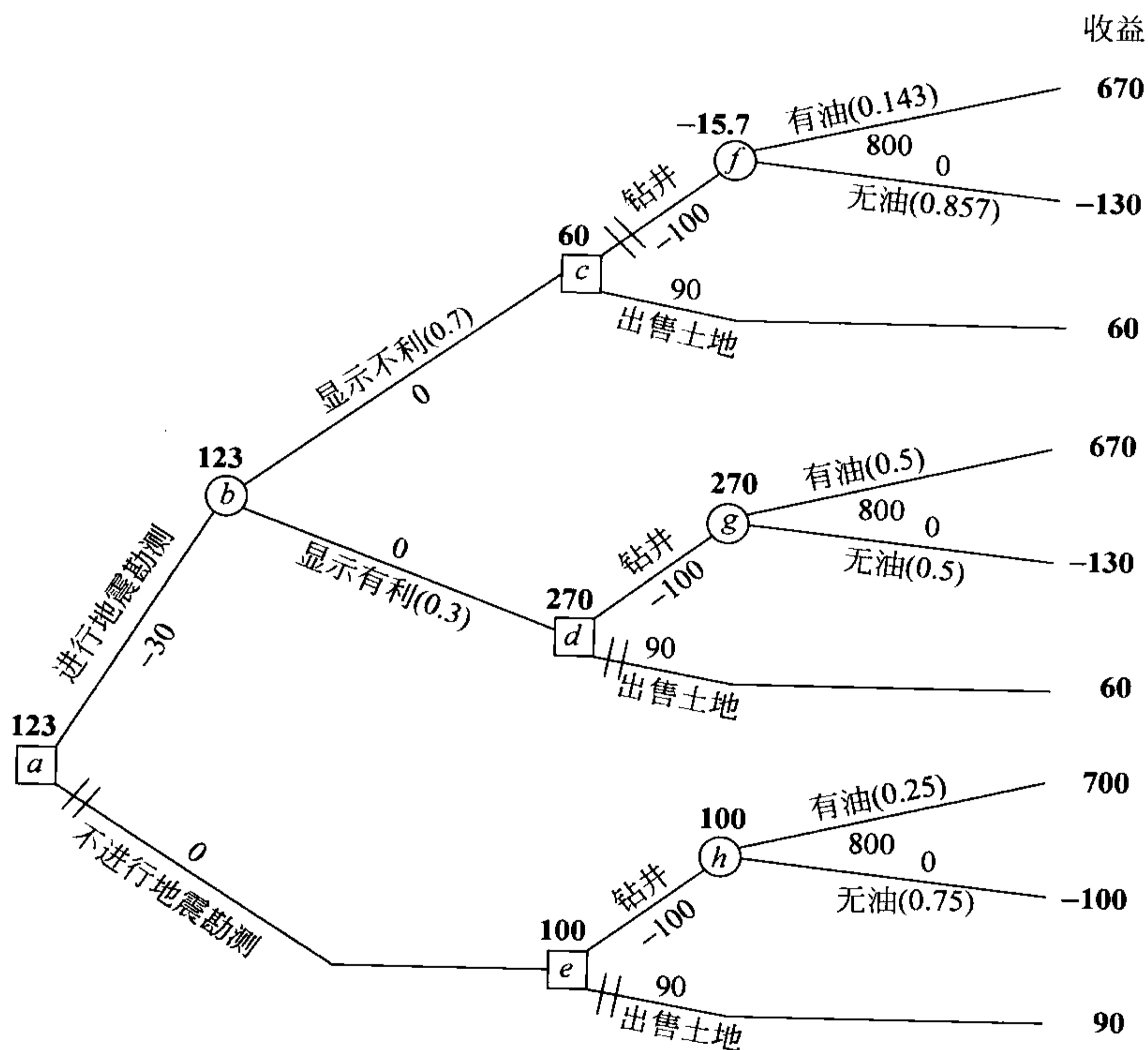


图 15.6 使用现金收益的时候,分析 Goferbroke 公司问题的最终决策树

接下来,我们向左移动一列,到决策点 c 、决策点 d 、决策点 e 。指向事件点的每个分支的期望收益,以黑体字记录在事件点的上方。因此,步骤 3 应用如下。

节点 c : 开采方案的 $EP = -15.7$

出售方案的 $EP = 60$

$60 > -15.7$, 因此选择出售方案。

节点 d : 开采方案的 $EP = 270$

出售方案的 $EP = 60$

$270 > 60$, 因此选择开采方案。

节点 e : 开采方案的 $EP = 100$

出售方案的 $EP = 90$

$100 > 90$, 因此选择开采方案。

对每个被选方案的期望收益现在以黑体字记录在决策点的上方,如图 15.6 所示。被选方案也通过在每个被拒绝的分支上标记双破折线来表示。

接下来,再向左移动,来到节点 b 。由于这是一个事件点,需要应用过程的步骤 2。它的每一个分支的期望收益都被记录在下面决策点的上方。因此,期望收益

$$\text{对于节点 } b, EP = 0.7(60) + 0.3(270) = 123$$

如图 15.6 所示记录在这个节点的上方。

最后,我们向左移动到节点 a ,这是一个决策点。应用步骤 3,产生

节点 a : 进行地震勘测有 $EP = 123$

不进行地震勘测有 $EP = 100$

$123 > 100$, 因此选择做地震勘测。

期望收益 123 被记录在节点上方,一个双破折线标记在被拒绝的分支上,如图 15.6 所示。

出于分析的目的,过程从右向左进行。然而,以这种方式完成的决策树,决策者能够从左向右观察决策树查看真实的事件进程。双破折线已经划掉了不期望的路径。因此,给定在右边显示的最终结果的收益,贝叶斯决策准则仅沿着开放路径从左向右达到最大可能的期望收益。

根据贝叶斯决策准则,在图 15.6 中沿着从左向右的开放路径产生了下面的最优策略。

最优策略:

进行地震勘测

如果结果是不利的,出售土地

如果结果是有利的,开采石油

期望收益(包括地震勘测成本)是 123(123 000 美元)。

(唯一的)最优解自然与前面章节不用决策树获得的结果一样(有必要参考表 15.5 给出的有试验的最优策略和 15.3 节末尾的结论试验)。

对于任何决策树,对从机会点发出的分支计算概率之后,后向归纳过程(backward induction procedure)总是产生最优策略。



15.5 使用电子表格对决策树进行敏感性分析

一些有用的电子数据表软件可用于在电子数据表上建立和分析决策树。一种流行的 Excel 插件是 TreePlan, 由 Michael Middleton 教授开发。运筹学课程软件中包括 TreePlan 的学术版本, 包括 Middleton 教授的共享软件 SensIt (如果你想使用这个软件包, 请注册和付费)。正如在 15.2 节中提到的, SensIt 是被设计用于敏感性分析的。

在学习 SensIt 之前, 我们将介绍怎样使用 TreePlan 创建一个决策树。为了简化讨论, 在考虑全部问题之前, 我们将从解释建立 Goferbroke 公司第一问题的一个小决策树开始(不考虑进行地震勘测)。

使用 TreePlan 建立 Goferbroke 公司第一问题的决策树

考虑先前表 15.2 总结的 Goferbroke 公司第一问题, 使用 TreePlan 建立相应的决策树(已经在 Excel 中安装了插件), 从 Tools 菜单中选择 Decision Tree 项并点击 New Tree。这样将建立一个如图 15.7 所示的具有一个决策点和两个分支的缺省决策树, 也恰恰得到了当前问题所需的第一个节点。然而, 即使需要其他改进, 在 TreePlan 中调整节点也很容易。只要选择包含节点的单元(图 15.7 中的 B5)并从 Tools 菜单中选择 Decision Tree, 将弹出一个对话框, 允许你改变节点的类型(如从决策点转为事件点)或者添加更多分支。

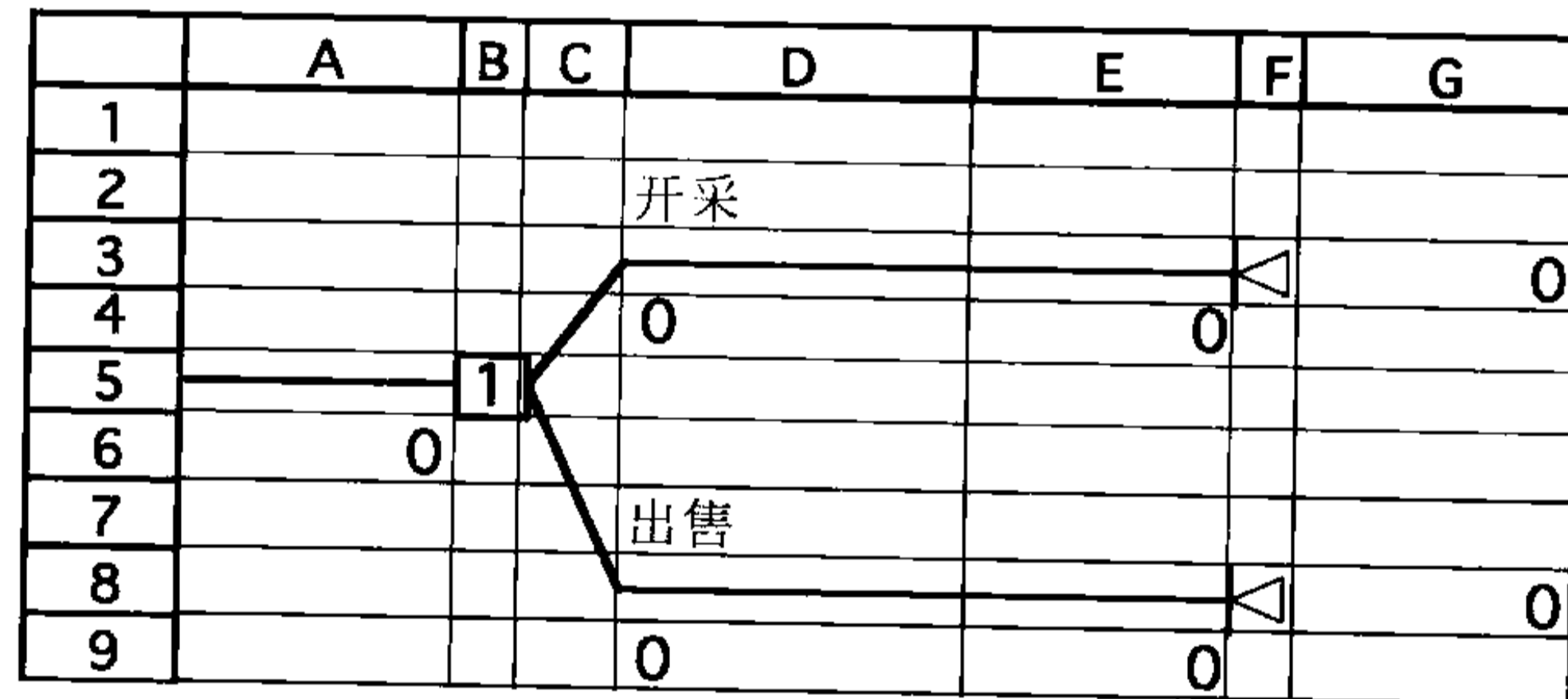


图 15.7 用 TreePlan 建立的默认决策树, 通过从工具菜单中选择决策树、点击新树, 然后输入“开采”和“出售”标签来对应于两个决策方案

TreePlan 插件可以简单地通过点击运筹学课程软件中的 TreePlan 文件或者使用运筹学中的安装工具安装。

缺省时, 决策的标签(图 15.7 中的 D2 和 D7 单元)为“Decision1”(决策 1)、“Decision2”(决策 2)等。这些标签可以通过点击并输入新的标签加以改变。在图 15.7 中, 这些标签已经被分别修改成“Drill”(开采)、“Sell”(出售)。

如果决策是开采, 下一个事件是研究是否在这块土地蕴藏石油。为了创建一个事件点, 点击开采分支末端包含终止节点的单元, 恰在垂直线的右端(图 15.7 中的单元 F3), 并从 Tools 菜单中选择 Decision Tree。这将弹出如图 15.8 所示的 TreePlan... Terminal 对话框。选择左边的“Change to event node”选项, 选择右边的两个分支选项, 然后点击“OK”。具有节点和分支的决策树的结果见图 15.9, 分别用“Oil”(有油)和“Dry”(无油)

替代缺省标签“Event1”(事件 1)和“Event2”(事件 2)。

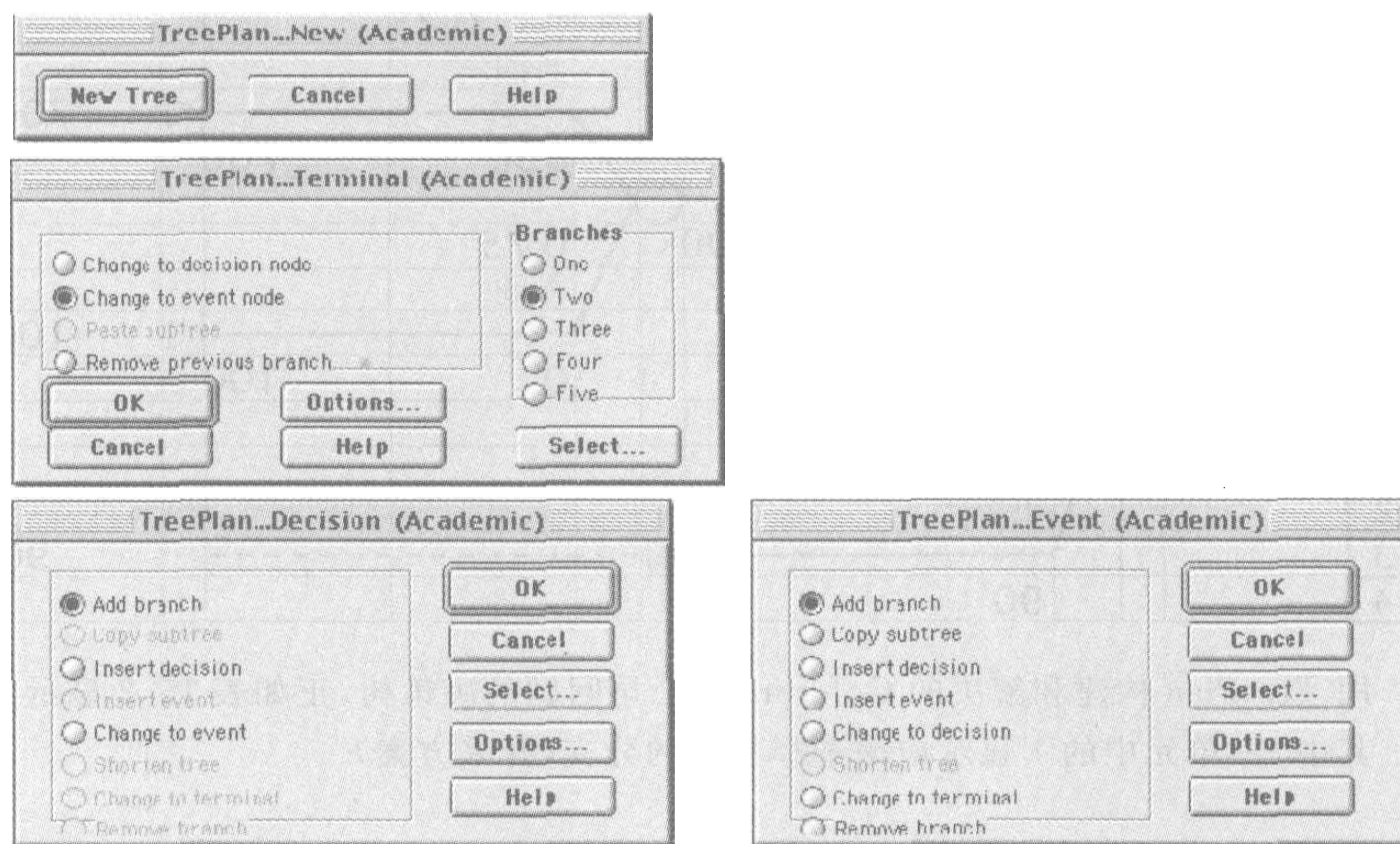


图 15.8 用 TreePlan 构建决策树时的对话框

任何时候,你都可以点击任何已经存在的决策点(正方形)和事件点(圆圈),并从 Tools 菜单选择 Decision Tree,弹出相应的对话框——“TreePlan... Decision”或者“TreePlan... Event”——对该节点进行如图 15.8 所示的修改。

起初,每个分支将显示缺省值为 0 的净现金流(出现在分支标签下的数值:图 19.5 中的 D6、D14、H4 和 H9)。从事件点引出的两个分支将显示缺省值为 0.5 的先验概率(概率恰好在相应的标签上:图 15.9 中的 H1 和 H6)。因此,接下来,你应该点击这些缺省值并用正确的数值替代它们,即

- D6 = -100(开采成本 100 000 美元);
- D14 = 90(出售土地利润 90 000 美元);
- H1 = 0.25(有石油的先验概率 0.25);
- H4 = 800(发现石油后的净收入 800 000 美元);
- H6 = 0.75(无石油的先验概率 0.75);
- H9 = 0(发现无石油的净收益 0)。

正如图中所示。

在构建决策树的每一个阶段,TreePlan 自动对当前的决策树使用贝叶斯决策准则求解最优解。每个决策点内的数值表明哪一个分支应该被选择(假设从节点发出的分支从上到下连续编号)。因此,对于图 15.9 中的最终决策树,单元 9 中的编号 1 说明应该选择第一个分支(采油方案)。在每一个能够达到的终止节点两侧的数值是节点的收益。单元 A10 和 E6 中的编号 100 是这个过程中这些阶段的期望收益。

我们认为你将发现使用 TreePlan 在计算机上执行这个过程是十分直观的。如果你对 TreePlan 花费足够多的时间,你将发现在这个简短的介绍中没有提到的很多有用特征。

Goferbroke 公司完整问题的决策树

现在考虑 Goferbroke 公司的完整问题,其中制订的第一个决策是是否进行地震勘

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1								0.25			
2								有油			
3											
4				开采				800	700		700
5											
6				-100	100			0.75			
7								无油			
8											
9		1						0	-100		-100
10	100										
11											
12				出售							
13											
14				90	90						90

图 15.9 用 TreePlan 构建和解决的 Goferbroke 公司问题的决策树,正如表 15.2 显示的那样,其中 B9 单元中的 1 显示应该选择顶层的分支(开采方案)

测。继续上面的介绍,TreePlan 将被用于建立和求解如图 15.10 所示的决策树。尽管形式有一些不同,注意这个决策树完全等价于图 15.6 中的决策树。除了直接在电子数据表上建立决策树的便利以外,TreePlan 还提供了自动求解决策树的关键优势。不像图 15.6 那样依赖于手工计算,一旦决策树被建立,TreePlan 立即计算决策树每一个阶段的所有期望收益,并在节点附近表示出来。TreePlan 在每一个决策点的内部放一个数,表示所选择的分支(假设从节点发出的分支从上到下连续编号),而不是使用双破折线。

用电子数据表进行敏感性分析

15.2 节的末尾解释了怎样对一个小问题(Goferbroke 公司第一问题)进行敏感性分析,其中仅需要制订单个决策(开采还是出售)。在这种情况下,分析是简单直接的,因为每一个决策方案的期望收益都能够被表示成所考虑的模型参数的简单函数(有石油的先验概率)。相比之下,需要制订一系列决策(如 Goferbroke 公司的完整问题)时,更应该包含敏感性分析。此时,有必要对较多相当不确定的模型参数(各种成本、收入和概率)进行敏感性分析。而且,对应于模型参数的任何特定值找出最大期望收益需要求解决策树。因此,使用类似 TreePlan 这样的电子数据表软件自动求解决策树是非常有益的。增加专门设计用于敏感性分析的软件,例如 SensIt,以提供进一步的视角。

从已经包含决策树的电子数据表开始,下一步是扩展和组织电子数据表进行敏感性分析。我们下面通过使用图 15.10 中通过 TreePlan 建立的决策树的电子数据表开始,用 Goferbroke 公司问题来解释这一点。

如图 15.11 右侧所示,从将数据和结果整理到新区域开始是有帮助的。决策树中所有的数据单元现在需要参考整理的数据单元(V4:V11 单元),如图的底部 P6 和 P11 单元表示的公式所说明的那样。类似的,决策树右边总结的结果通过使用图 15.11 底部的 U19、V15、V26 和 W19:W20 单元的公式,参考决策树的输出单元(单元 B29、F41、J26 中的决策点以及单元 A30 的期望收益)。

决策树的概率数据是复杂的,因为当任何先验概率发生变化时,需要更新后验概率。

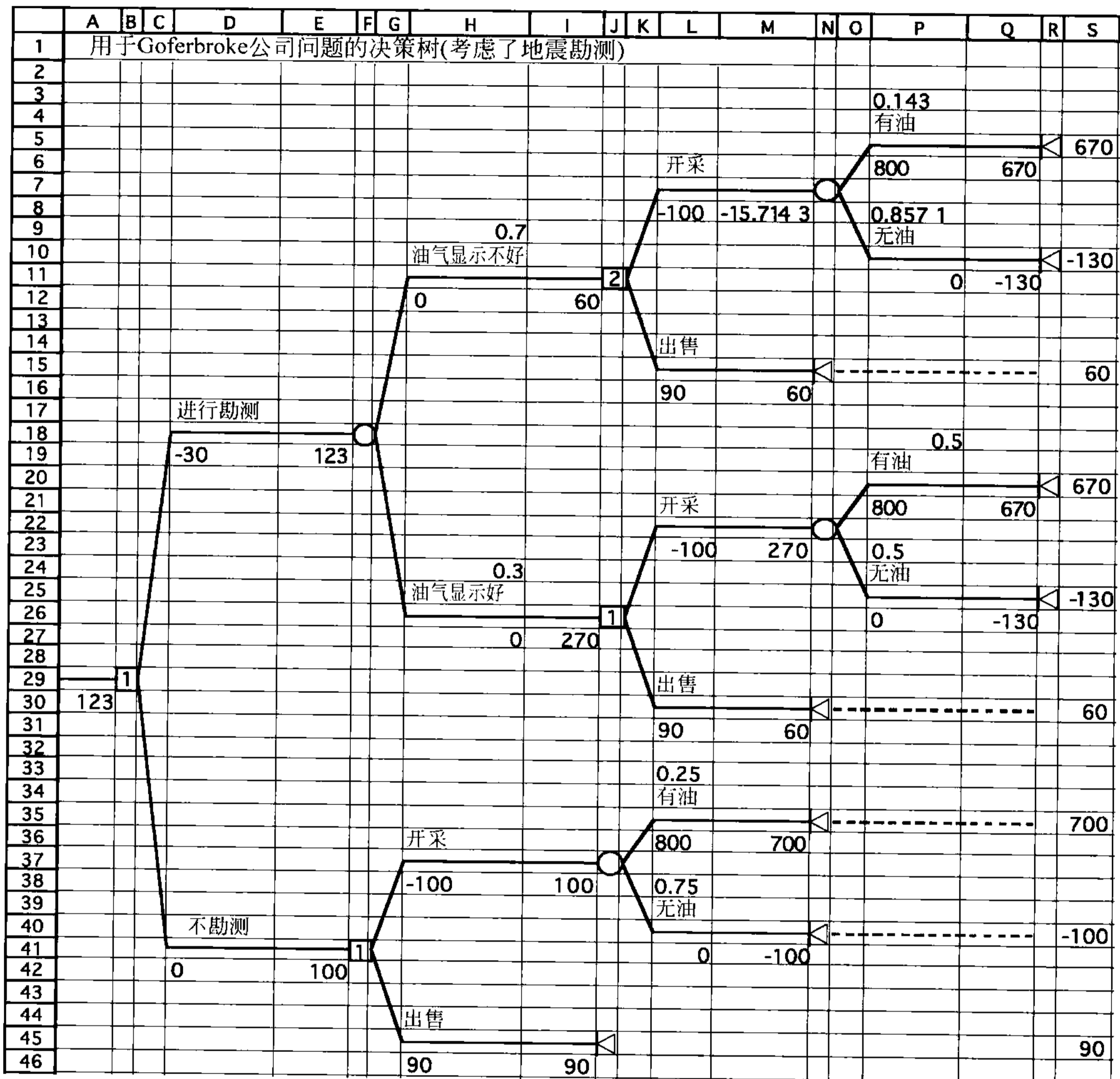
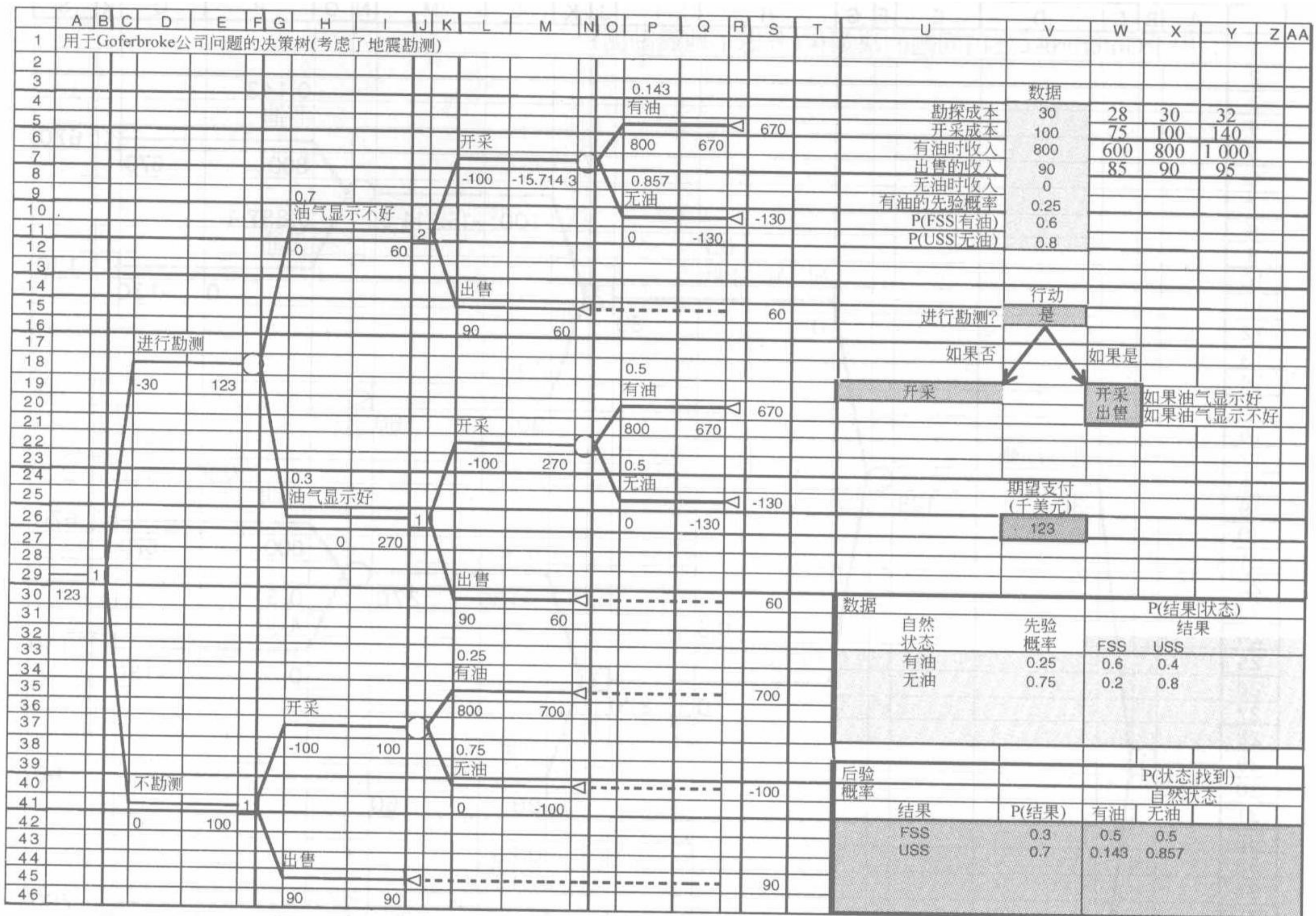


图 15.10 用 TreePlan 对 Goferbroke 公司的完整问题构建决策树并求解,其中考虑了应否进行地震勘测

幸运的是,计算后验概率的模板(如图 15.3 所示)可用来进行这些计算。与模板相关的部分(B3 : H19)已经被拷贝(使用 Edit 菜单的 Copy 和 Paste 命令)到图 15.11 的电子数据表中(出现在 U30 : AA46)。模板数据参考了数据单元 PriorProbabilityOfOil(V9)、ProbFSSGivenOil(V10)和 ProbUSSGivenDry(V11)的概率数据,正像图 15.11 底部的单元 V33 : X34 所显示的公式。模板基于这些数据自动计算了每一个结果的概率和后验概率(单元 V42 : X43)。当需要的时候,决策树参考这些计算得到的概率,正如图 15.11 底部单元 P3 : P11 的公式。

整理数据和结果提供了两个好处。首先,它确保每部分数据仅在唯一的位置。每次决策树需要该数据时,参考单个数据单元。这大大地简化了敏感性分析。为了改变一个数据,你只需要在一个位置做出修改,不必搜寻整个决策树找到它出现的所有位置——做出修改。整理数据和结果的第二个好处是使每一个人都能很好地理解模型。不需要为了查看在模型中使用了什么数据以及建议的行动计划和期望收益是什么去理解 TreePlan 或者是学习怎样读决策树。



列中名称	单元格
开采成本	V5
勘测成本	V4
有油的先验概率	V9
给定FSS时无油的概率	X42
给定USS时无油的概率	X43
FSS的概率	V42
给定有油时的FSS概率	V10
给定FSS时有油的概率	W42
给定USS时有油的概率	W43
USS的概率	V43
给定无油时的USS概率	V11
无油时收入	V8
有油时收入	V6
出售的收入	V7

U	V	W	X
14	行动		
15	进行勘测?	=假如(B29=1,"是","否")	
16			
17	如为否	如为是	
18			
19	=假如(F41=1,"勘探","出售")	=假如(J26=1,"开采","出售")	如果油气显示好
20		=假如(J11=1,"开采","出售")	如果油气显示不好

P	
3	=给定USS时有油的概率
4	有油
5	
6	=有油时收入
7	
8	=给定USS时无油的概率
9	无油
10	
11	=无油时收入

V	
23	期望
24	收益
25	(千美元)
26	=A30
27	

U	V	W	X
30	数据:		
31	自然	先验	P(找到状态)
32	状态	概率	找到
33	有油	=有油的先验概率	FSS
34	无油	=1-有油的先验概率	USS
35		=给定有油时FSS的概率	=1-给定有油时FSS的概率
		=1-给定无油时USS的概率	=给定无油时USS的概率

图 15.11 为 Goferbroke 公司的完整问题的灵敏度分析做准备,其结果和数据被整理放在决策树右边的电子数据表中

尽管需要花费一些时间和努力来整理数据和结果,包括所有必要的前后参照,但是对于进行敏感性分析这一步骤是相当必要的。在决策树中,多个数据被用于几个位置。例如,如果 Goferbroke 公司发现石油的收入出现在单元 P6、P21、L36 中,对该数据进行敏感性分析现在只需要在一个位置(单元 V6)而不是在三个位置(单元 P6、P21、L36)修改数据。整理的好处甚至比概率数据还重要。改变任何先验概率都可能引起所有的后验概

率发生变化。通过后验概率的模板,你可以在一个位置改变先验概率,所有其他概率都能够适当地被计算和更新。

在对图 15.11 中的成本数据、收入数据、概率数据做出调整后,电子数据表很好地概括了通过后验概率模板和决策树得到的新结果。因此,以反复试验的方式利用方案数据进行实验是进行敏感性分析的有用方法。

然而,使用另一个方法进行更为系统的敏感性分析是令人期望的。此时,SensIt 变得非常有帮助。它提供了系统地创建信息敏感性分析图形的简单方法,显示出改变各个相关数据单元中的数字产生的影响。SenseIt 被设计得与 TreePlan 相集成(尽管它也可以不使用 TreePlan 来进行其他类型的敏感性分析)。

使用 SensIt 创建三种类型的敏感性分析图

安装 SensIt 添加一个灵敏度分析菜单项于 Add-Ins 表(对 Excel 2007)或 Tools 菜单(对 Excel 的较早版本)。这个菜单项有一个子菜单给出两种不同类型的灵敏度分析选择:(1)绘制一个单一输出(如期望收益)对单一输入(如有油的先验概率)的图形;(2)产生一个同时比较多个输入对单一输出的图形。下面将依次描述这两类灵敏度分析。

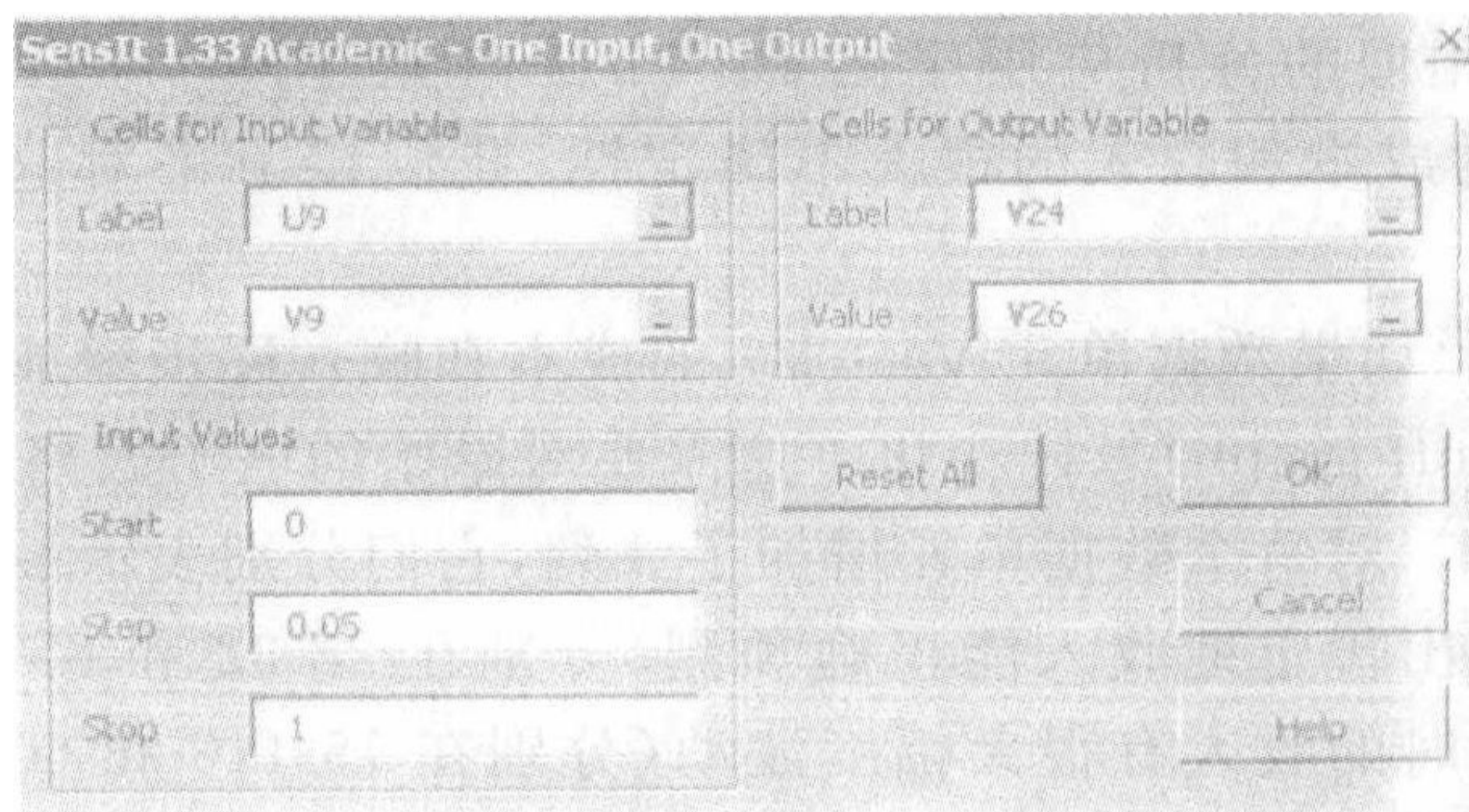


图 15.12 用 SensIt 绘制单个输入对单个输出图形的对话框

选择绘制单个输出对单个输入的选项导入如图 15.12 所示的对话框。对话框上半部分的数据单元标记变化的数据(单元格 V9 中为有油的先验概率)和感兴趣的输入单元(单元 V26 中的期望收益)。作为选择,标记 Label 的单元同样是专用的(分别是 V9 和 V24)。这些标记被用于标志所绘图形的轴线。对话框的下半部分用于标记单个数据值单元(有油的先验概率)的变化范围。本例中所有值介于 0 到 1 之间(区间为 0.05),单击 OK,得到如图 15.13 的图形。该图反映了有油的先验概率同期望收益的关系。这个结果源于运用了给定概率时的最优策略。

该图表明当先验概率比 0.15 稍大时,期望收益开始增加;当先验概率接近 0.3 时,期望收益开始更迅速地增加。这表明最优策略大约在这些先验概率值附近变化。为了验证这一点,图 15.11 中的电子数据表被用于查看当概率值在这些值附近缓慢变化时结果如何变化。这种实验性分析得出了最优策略如何依赖于概率的如下结论。

最优策略:

令 p = 有石油的先验概率。

SensIt 1.33 学术版

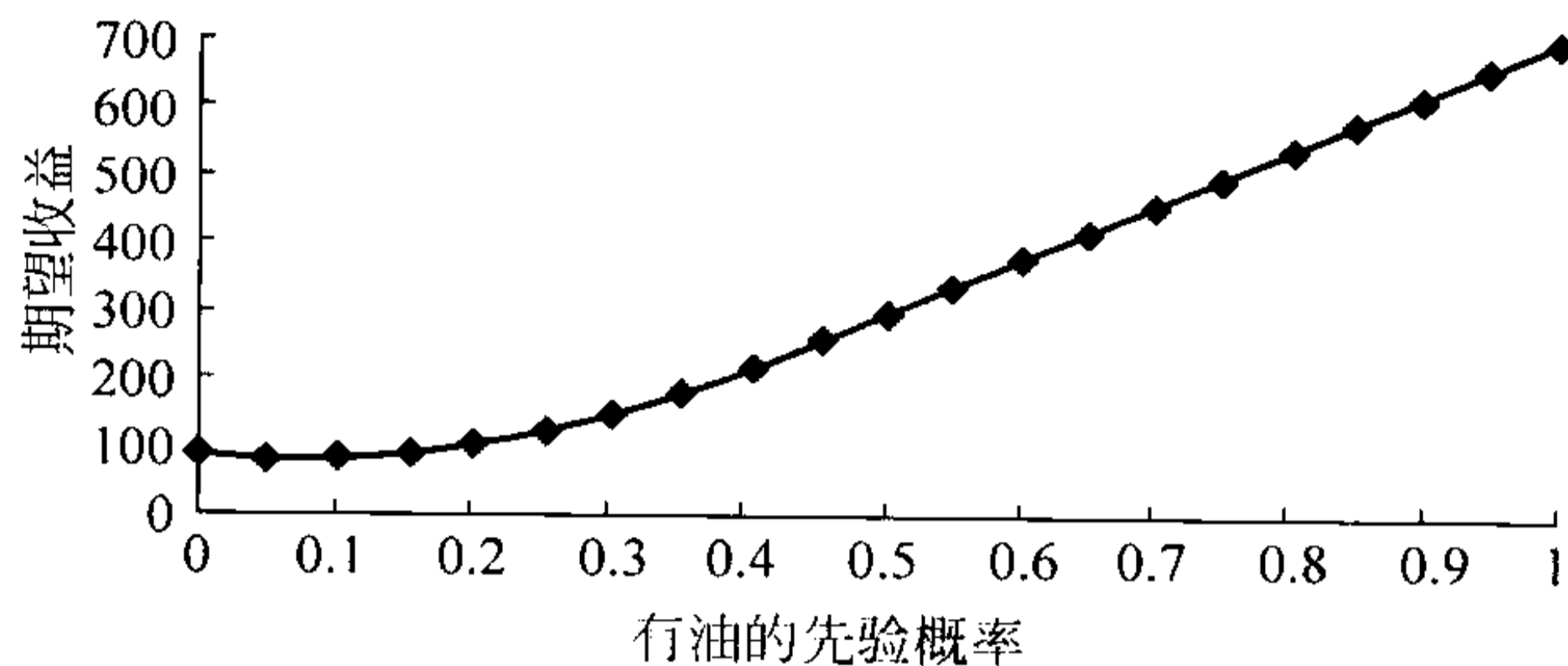


图 15.13 由 SensIt 生成的 Goferbroke 公司的完整问题图,显示了期望收益(使用贝叶斯决策规则时)是如何依赖于先验概率的

如果 $p \leq 0.168$, 那么出售土地(不进行地震勘测)。

如果 $0.169 \leq p \leq 0.308$, 那么进行地震勘测, 如果是有利的就进行开采, 否则出售。

如果 $p \geq 0.309$, 那么开采石油(不进行地震勘测)。

迄今为止, 敏感性分析致力于研究如果发现石油的真实概率不同于最初的先验概率 0.25 产生的影响。相似的分析应用于图 15.11 中单元 V10 : V11 的概率。然而由于数据单元 V4 : V7 的成本和收入的很大不确定性, 我们接下来对这些数据进行敏感性分析。

假设我们想研究, 如果数据单元 V4 : V7 的成本和收入逐步增加或者减少, 期望收益 (spider expected payoff graph) 怎样变化。这需要对原始的电子表格 (见图 15.11) 作一些补充, 如图 15.14 所示, 对每个数据单元增加了 3 列, 它们分别表示最低值、基础值和最高值。假定勘探成本和出售土地收入能正确预测 (分别在 28-32 和 85-95 的较小范围内变动), 钻井成本和有油时的收入有很大幅度波动 (分别在 75-140 和 600-1 000 的大范围内变动)。

因为我们希望调查当单元格 V4 : V7 中任何一项成本或收入变化时期望收益是如何变化的。现在我们有四项输入 (成本和收入) 以及一项输出 (期望收益)。所以扩展电子表格如图 15.14 后, 下一步是将 SensIt 的对话框引入 “多项输入, 单项输出” 对话框 (在 Excel 2007 中称为 Add-Ins 表上的灵敏度分析菜单或在 Excel 较早版本的工具菜单中选择相应项目), 见图 15.15。该图用于记载哪一个数据单元将要变化, 哪一个输出单元将被检验, 并记载数据单元范围 (低、基础、高) 的单元地址。Step Percent 框用于记载每个输入值的步长 (作为基础值的百分比), 期望支付将重新计算直到输入到达最低或最高值, 对话框的最下面的右端给出了 3 个图的选择, 展示了这些输入中任意一个的不同值的选择对输出的影响。假如 “单因素蛛结图” 方案已被选择 (见图 15.16), 单击 OK 产生如图 15.16 所示的蛛结图。

	U	V	W	X	Y
3		Data	Low	Base	High
4	Cost of Survey	30	28	30	32
5	Cost of Drilling	100	75	100	140
6	Revenue if Oil	800	600	800	1 000
7	Revenue if Sell	90	85	90	95
8	Revenue if Dry	0			
9	Prior Probability of Oil	0.25			
10	P(FSS Oil)	0.6			
11	P(USS Dry)	0.8			

图 15.14 图 15.11 中的电子表格的扩展, 用 SensIt 同时研究改变若干个输入之一对单一输出的影响

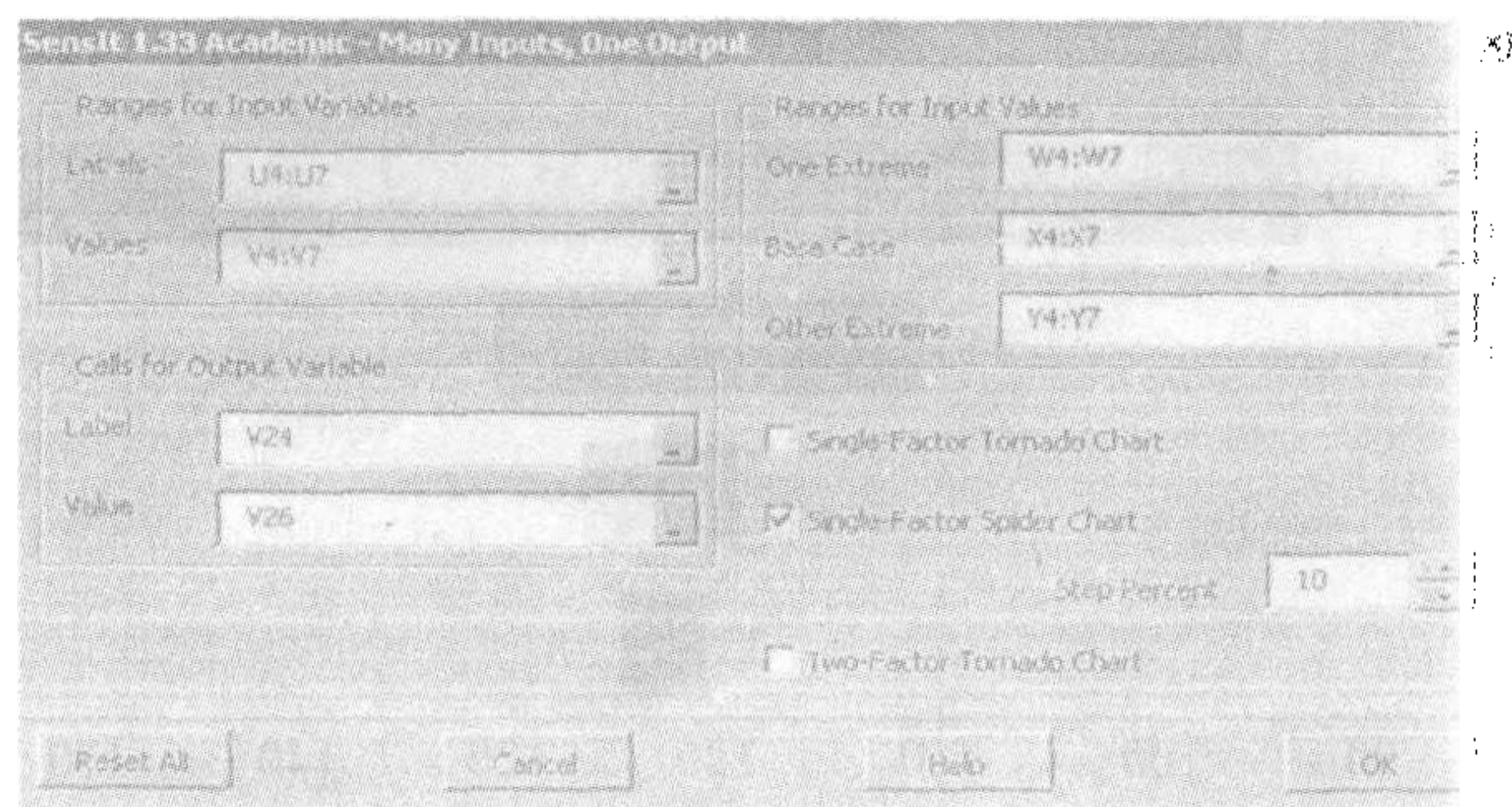


图 15.15 用 SensIt 同时研究多项输入中任一项变化对单项输出影响的对话框

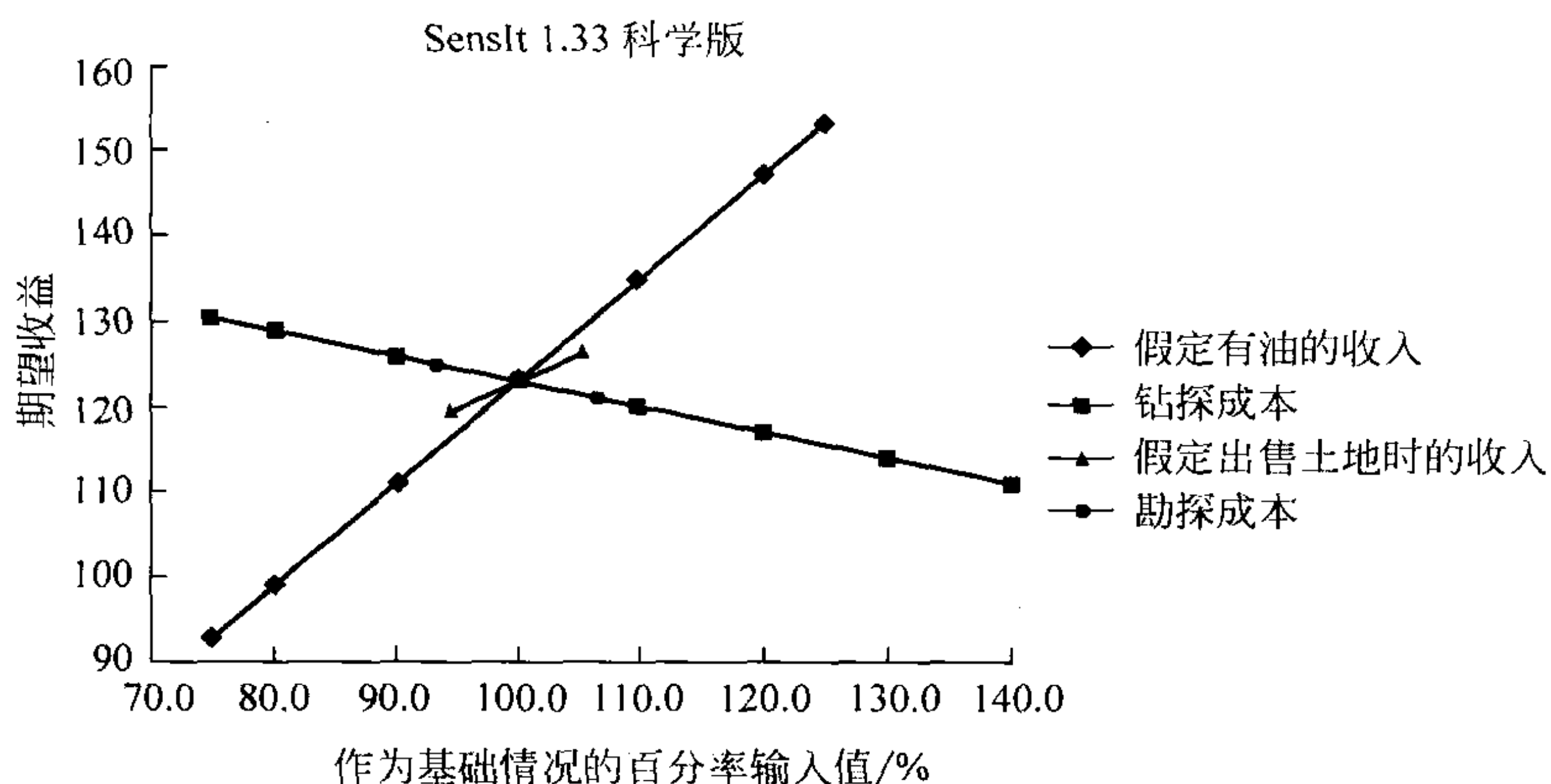


图 15.16 对 Goferbroke 公司的完整问题由 SensIt 产生的蛛结图,显示在使用贝叶斯决策规则时期望收益如何随成本或收入中任一项预测值的变化而变化

蛛结图中每条线画出了期望收益。作为选择的一个数据单元(V4:V7)的原始值发生改变,乘以图下端指示的百分比(勘探成本线位于钻探成本线上,但比后者短得多,因为它的左端仅延伸到 93%,右端仅延伸到 106.7%)。有油的收入线其陡峭度为最大,这反映出假如找到石油时期望收益对有油时收入的估计特别敏感。所以对使估计值精确化的补充工作应给予极大关注。

现假定图 15.15 中被“单因素的条状图(tornado chart)”方案选择代替,单击 OK 然后产生如图 15.17 所示的条状图。图中每一个横条表明了作为相应成本或收入的期望收益的变化范围。其范围的变化值数字见每个横条的两端。图中每个横条的宽度度量期望收益相对于横条的成本或收入变化的敏感性。图中再次看到,假如有油将较之其他成本或收入更敏感。

图 15.16 的蛛结图和图 15.17 的条状图实际上提供了互补的相同信息。哪一个更能清楚传达这个信息很大程度上取决于个人的爱好。

本书并不讨论图 15.15 中第三种方案的选择(双因素条状图)。对 SensIt(以及 TreePlan)的进一步信息和完整的文件见本书网站的用户指南。

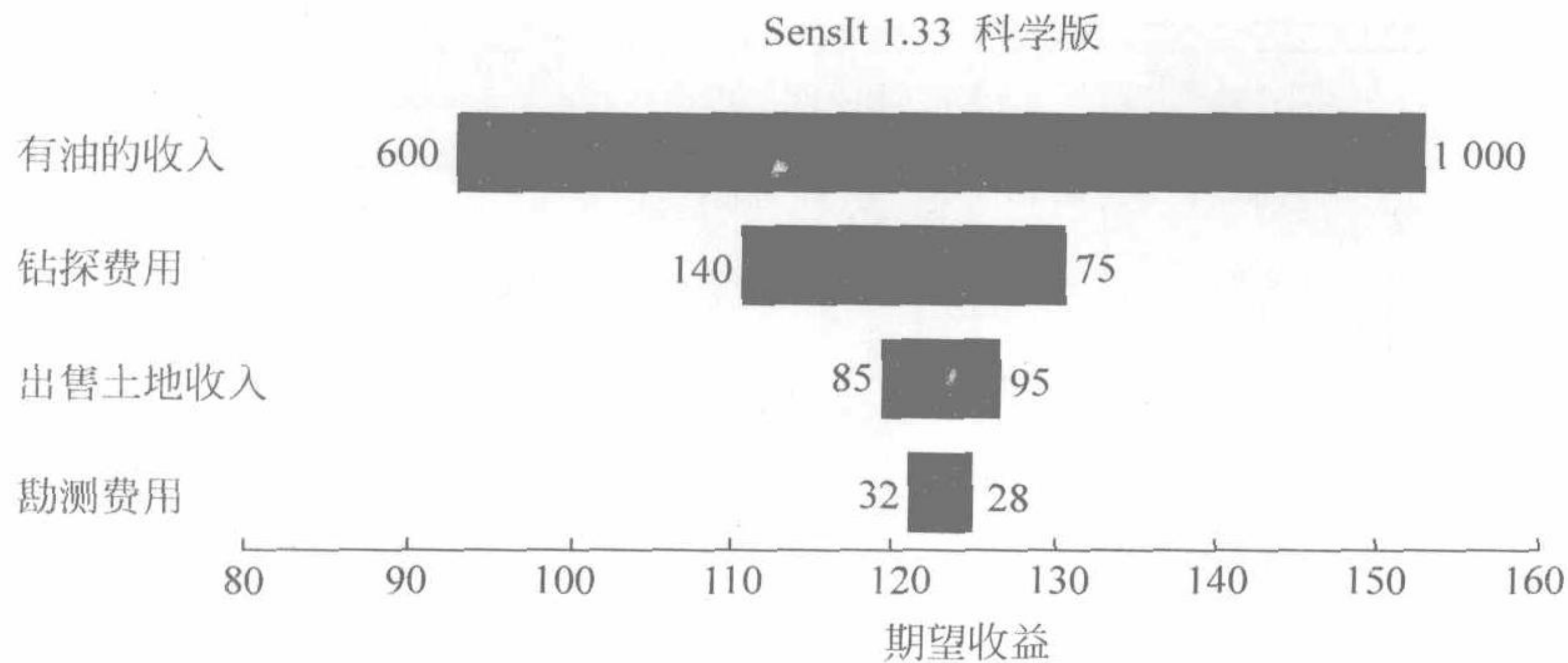


图 15.17 条状图选项产生的 Goferbroke 公司的完整问题条状图,显示期望收益(使用贝叶斯决策规则)将在成本或收益的任何可能值的范围内变化



15.6 效用理论

迄今,在应用贝叶斯决策准则时,我们假设在现金项上的期望收益是采取行动的结果的适当度量。然而在许多情况下这个假设是不适当的。

例如,一个人被提供如下的选择:(1)50%的机会赢取 100 000 美元或一无所获;(2)100%确定的获得 40 000 美元。许多人会选择(2),尽管(1)的期望收益是 50 000 美元。如果失去投资和破产的风险很大,一个公司可能不愿意投资一大笔钱在一个新产品上,尽管期望收益很大。人们可能购买保险,尽管从期望收益的角度看这个投资并不诱人。

这些例子使贝叶斯准则失效了吗?幸运的是,答案是否定的,因为有一种方法可以把现金值转化成反映决策者偏好的适合的度量,这个度量被称为现金的效用函数。

现金的效用函数

图 15.18 给出了现金 M 的一个典型的效用函数 $U(M)$ 。它表明有这个效用函数的人,将把 30 000 美元看成 10 000 美元的两倍,把 100 000 美元看成 30 000 美元的两倍。这反映了这样一个事实:此人的最高偏好需求在第一个 10 000 美元获得满足。随着金钱数量的增加有递减的函数斜率,被称作**现金递减的边际效用**(decreasing marginal utility for money)。这样的人被称为**回避风险**(risk-averse)的人。

然而,并不是所有的人都有现金的递减的边际效用。一些人是**风险追求者**(risk seekers)而不是风险回避者,他们一生追求最大的收益。随着金钱数量的增加,他们的效用函数的斜率也增加。因此有**现金的递增的边际效用**(increasing marginal utility for money)。

介于中间的情况是**风险中性**(risk-neutral)的人,他们以票面价值评价金钱。这种人的现金的效用函数,只与现金的数量简单地成比例。尽管当涉及少量现金的时候,一些人似乎是风险中性的,当现金数量较大时真正的风险中性是不常见的。

表现为这些类型的混合也是可能的。例如,一个人对少量的现金可能是风险中性的,对于中等数量的现金可能是风险追求的,对于大量的现金可能是风险回避的。另外一个

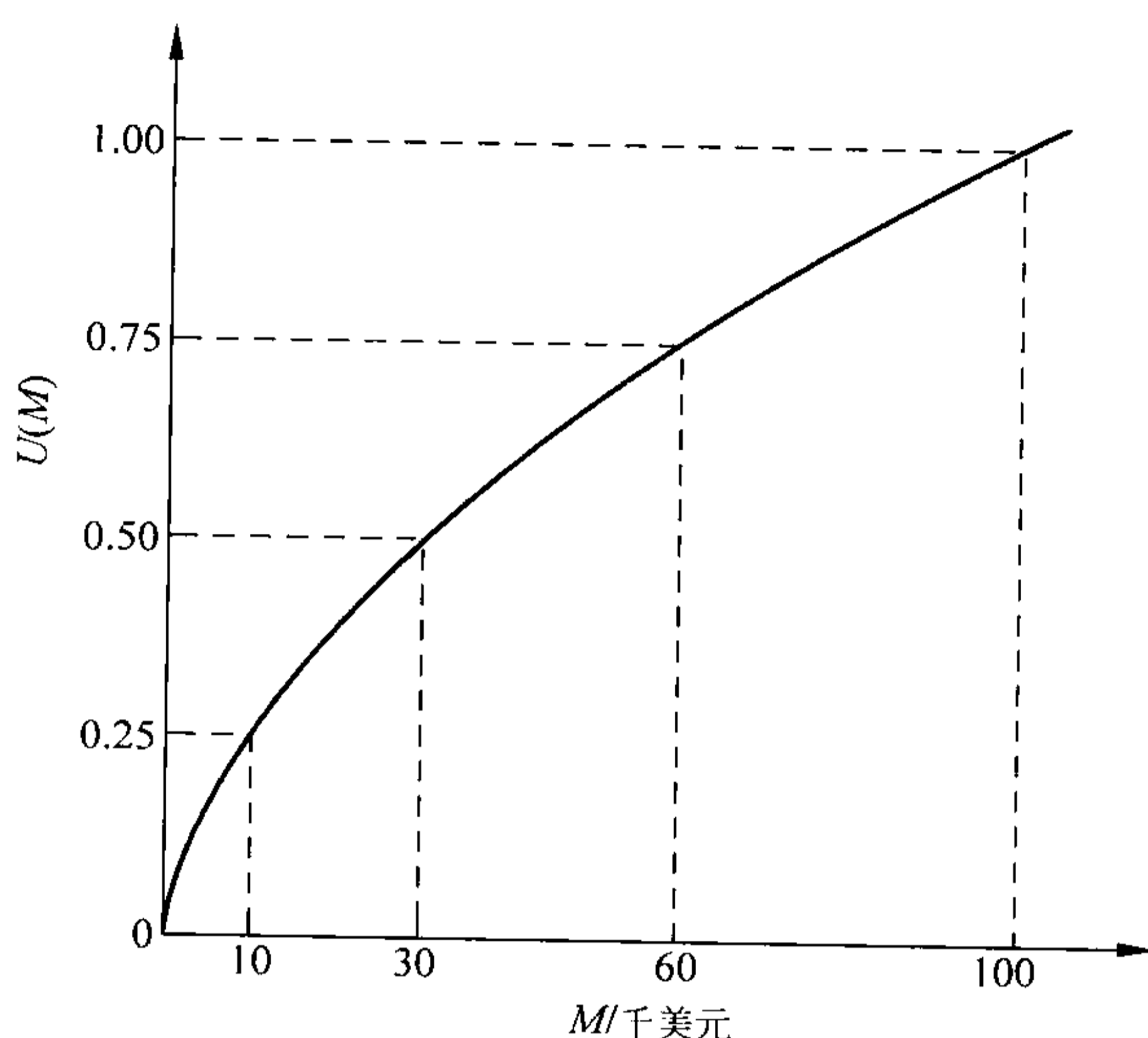


图 15.18 现金的典型的效用函数,其中 $U(M)$ 代表获得 M 数量现金的效用

人的风险态度可能依赖于环境随着时间变化。

一个人在进行个人理财和为组织做出决策时,风险态度可能是不同的。一个商业企业的管理者在制订管理决策应对风险时,需要考虑公司的环境和管理高层的群体价值观。^①

不同的人有不同的现金的效用函数,这个事实对不确定情况下的决策制订有重要的影响。

现金的效用函数被包含进一个问题的决策分析方法中以后,效用函数被建立以满足所涉及的决策制订者偏好和数值(决策制订者可以是一个人也可以是一群人)。

效用函数的尺度同大小无关。换句话说,图 15.18 中在点线上的值可以为 0.25, 0.5, 0.75, 1 也可以为 10 000, 20 000, 30 000, 40 000。所在的效用值可以乘以任何正的常数均不影响哪一个行动方案具有最大的期望效用。它同样可以对效用值添加任何常数(正的或负的)也不影响哪一个行动方案具有最大的期望效用。

由于上述理由,我们具有对两个 M 值任意确定 $U(M)$ 的自由,只要较大的现金值具有较大的效用值。特别方便的是(但并不是必要的),对最小现金值 M 令 $U(M)=0$,对最大现金值 M 令 $U(M)=1$,如图 15.18 所示。通过让最坏结果的效用值为 0,最好结果的效用值为 1,然后确定其他结果的效用值,就很容易看到各个结果由坏到好在标尺上的排列。

建立适合决策者的效用函数的关键在于下面的效用函数的基本属性。

基本属性: 在效用函数理论的假设条件下,决策制订者的现金的效用函数有这一属性:如果两个方案有相同的期望效用,决策制订者认为两个行动方案是相同的。

为了解释这一点,假设决策制订者有如图 15.19 所示的效用函数。进一步的假设是提供给决策者下面的可能条件。

^① 关于 322 个管理者的效用函数的形状及这个形状对组织行为的影响见 J. M. E Pennings and A. Smidts, "The Shape of Utility Functions and Organizational Behavior", *Management Science*, 49: 1251-1263, 2003.

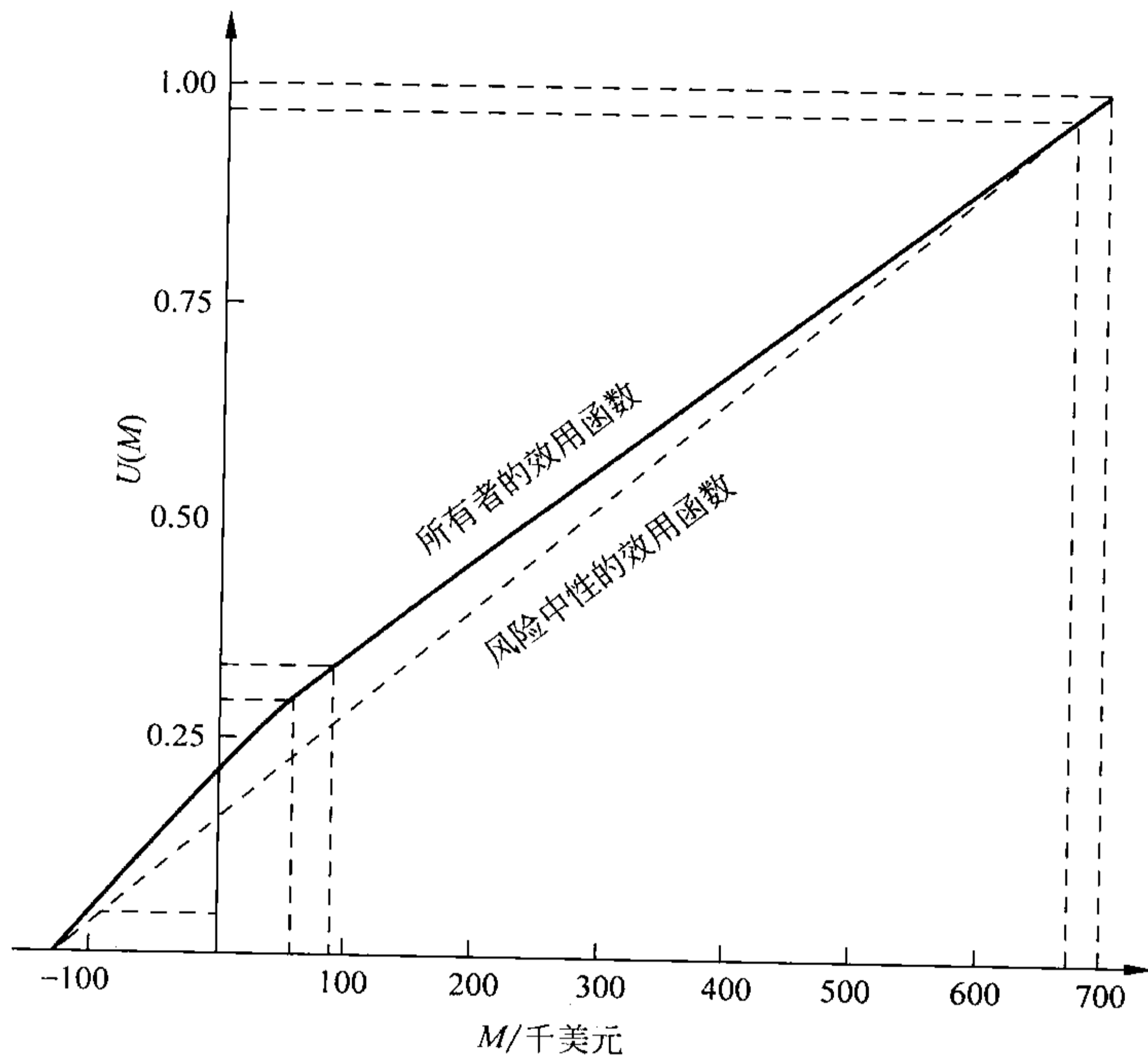


图 15.19 Goferbroke 公司所有者现金的效用函数

提案：一个可能性是以概率 p 获得 100 000 美元(效用=1)或者以 $1-p$ 的概率一无所获(效用=0)。

这样

对于这个提案, $E(\text{utility})$ (效用) = p

因此,对于下面三个方案中的每一个,决策制订者认为第一个和第二个是没有区别的:

1. 以 $p=0.25$ 的概率获得 [$E(\text{utility})=0.25$] 方案或者确定地获得 10 000 美元(效用=0.25)的提案;
2. 以 $p=0.5$ 的概率获得 [$E(\text{utility})=0.5$] 方案或者确定地获得 30 000 美元(效用=0.5)的提案;
3. 以 $p=0.75$ 的概率获得 [$E(\text{utility})=0.75$] 方案或者确定地获得 60 000 美元(效用=0.75)的提案。

这个例子也首先解释了决策制订者的效用函数的构建方法。决策制订者将被提供同样的假设提案:或者以概率 p 获得较大数量的现金(例如 100 000 美元)或者一无所获。对于较小数量的现金(如 10 000 美元、30 000 美元、60 000 美元),决策制订者将被要求来选择 p 的数值,此 p 值将使决策者认为在提案和确定获得一定数量的金钱之间没有不同。较小数量现金的效用是较大数量现金效用的 p 倍。这个过程被称为确定效用的等价抽奖法,可概述如下。

等价抽奖法

1. 确定最大潜在收益 $M = \text{Maximum}$, 指定某个效用值, 如 $U(\text{Maximum}) = 1$ 。

2. 确定最小潜在收益 $M = \text{Minimum}$, 指定某个小于第 1 步中的效用值, 如 $U(\text{Minimum}) = 0$ 。

3. 确定其他潜在收益 M , 决策者提供下面两个假设选择:

A1: 以概率 p 获得最大的收益, 以概率 $(1-p)$ 获得最小的收益;

A2: 肯定得到 M 的收益。

对决策者提问: 什么样的 p 值会使其感到上述两种选择无差别, 于是 M 的效用值为

$$U(M) = pU(\text{Maximum}) + (1-p)U(\text{Minimum})$$

或简写为

$$U(M) = p, \quad \text{当} \quad U(\text{Minimum}) = 0, \quad U(\text{Maximum}) = 1$$

现在将决策分析中效用函数的基本作用概括如下。

当决策者的现金的效用函数用于测量不同的可能现金结果的相对价值时, 贝叶斯决策准则通过相应效用取代了现金收益。因此, 最优行动(一系列行动)是最大化期望收益的行动。

在这里只讨论现金的效用函数。然而, 我们应该提到, 当行动方案的一些或者全部影响不是现金的时候, 有时候也可以建立收益函数(例如, 医生的决策方案的结果涉及患者将来的健康问题)。然而, 在这些情况下, 将价值判断融入决策过程是很重要的。这是不容易的, 因为它需要做出对无形结果的相对期望的价值判断。因此, 在这些情况下, 将价值判断融入决策过程是很重要的。

对 Goferbroke 公司完整问题应用效用理论

在 15.1 节的结尾我们提到 Goferbroke 公司没有太多的运营资金, 100 000 美元的损失是十分严重的。公司的(主要的)所有者已经负债保持公司继续运营。最坏的情况是提供 30 000 美元用于地质勘察, 然后当开采无石油的时候, 依旧损失 100 000 美元。这种情况不会使公司破产, 但是确定地将使公司财务达到不稳定的状态。

然而, 丰富的石油是一个令人激动的前景, 由于最终将挣 700 000 美元, 将使公司有一个相对固定的财务基础。

为了在 15.1 节和 15.3 节的问题中应用所有者(决策者)的现金的效用函数, 必须识别所有可能现金收益的效用。使用千美元作为单位, 这些可能的收益和相应的效用在表 15.7 中给出。现在我们研究怎样获得这些效用。

表 15.7 Goferbroke 公司完整问题的效用

现金收益/千美元	效 用
-130	0
-100	0.05
60	0.30
90	0.333
670	0.97
700	1

作为建立效用函数的出发点,因为我们可以对 M 的两个极端值任意确定 $U(M)$ 值(一般对较大现金确定较大效用值)。所以很方便地确定 $U(-130)=0$, 和 $U(700)=1$, 再用等价抽奖法确定其他现金收益的效用值。如 $M=90$, 通过对决策者(Goferbroke 公司的所有者)提出下列问题: 假定你只有两种选择, 以千美元为单位, 选择 1 为以概率 p 得到收益 700 和以概率 $(1-p)$ 得到收益 -130 (即损失 130); 选择 2 为肯定得到收益 90。若决策者选择为 $p=\frac{1}{3}$, 即 $U(90)=0.333$ 。接下来, 等价抽奖法被应用于 $M=-100$, 这时决策者的无差异点是 $p=\frac{1}{20}$, 所以 $U(-100)=0.05$ 。

据此通过 $U(-130)$, $U(-100)$, $U(90)$ 和 $U(700)$ 画一条光滑曲线得到决策者的效用函数, 见图 15.19。这条曲线上对 $M=60$ 和 $M=670$ 的值提供了相应的效用值 $U(60)=0.30$ 和 $U(670)=0.97$ 。这些值补全了表 15.7 右端的列。这条曲线的形状表明 Goferbroke 公司的所有者是略微的风险回避。作为比较, 图中 45° 的虚线表明决策者的效用函数为风险中性。

实际上, Goferbroke 公司的所有者可能是风险追求型的。然而, 所有者想解决的公司困难的财务环境, 强迫他采取相对风险回避型的态度来制订当前的决策。

评估 $U(M)$ 的另一个方法

上面建立 $U(M)$ 的过程让决策者反复地进行一个困难的决策, 决定什么样的概率让他觉得两个方案没有差别。制订这样的决策让许多人感觉很不舒服。因此, 有时用替代方法来评估现金的效用函数。

这个方法假设效用函数有一个确定的数学形式, 然后调整这个形式来尽可能适应决策者对于风险的态度。例如, 一个特定的通用的形式是(由于相对简化)指数效用函数

$$U(M) = R(1 - e^{-\frac{M}{R}})$$

这里, R 是决策者的风险限度。效用函数有一个对于现金的递减的边际效用, 因此它用于风险回避类型的个人。较大的风险回避程度对应较小的 R 值(引起效用函数曲线剧烈的弯曲), 较小的风险回避程度对应较大的 R 值(引起效用曲线缓慢的弯曲)。

由于 Goferbroke 公司的所有者有相对较小的风险回避程度, 图 15.19 的效用函数曲线弯曲得较缓慢, 对接近图 15.19 右端的大 M 值弯曲更为缓慢。所以在这个区域内的 R 值接近 $R=2000$ 。然而, 当由于有破产的风险而出现巨大损失时, 公司所有者变为更趋风险回避。所以当 M 值出现很大负值时, 效用函数变得更为弯曲, 由此相应的 R 值要小得多。在这个区域内, 大致为 $R=500$ 。

不幸的是, 对于相同的效用函数使用不同的 R 值是不可能的。指数效用函数的缺点就是给定了常数的风险回避(一个固定的 R 值), 不管决策制订者当前有多少钱。这不符合 Goferbroke 公司的情况, 由于当前现金的短缺, 使所有者比往常更担心产生大的损失。

在其他情况下, 潜在损失的结果不很严重, 假设指数效用函数可能提供一个合理的近

似。在那样的情况下,有一个评估 R 值的容易方法(有一点近似)。决策者将被要求选择 R 的值,使他对下面两个方案感到无差异:

A_1 : 一个 50 比 50 的赌博,将给出以概率 0.5 获得 R 美元,以概率 0.5 失去 $R/2$ 美元的结果。

A_2 : 既不失去也不获得任何东西。

TreePlan 包括使用指数效用函数的选项。首先你的值需要记载在电子表格中,包含这个值的单元需要给出一个范围名 RT(TreePlan 将这一术语称为风险容忍度)。然后单击 TreePlan 中对话框的 Option 按钮,并选择“应用指数效用函数”(Use Exponential Utility Function)方案。点击 OK,然后修改决策时,使其同对数效用函数结合。

使用带有效用的决策树分析 Goferbroke 公司问题

现在 Goferbroke 公司所有者的效用函数已经获得如表 15.7(和图 15.19 所示)的信息。这一信息可用于下面概括的决策树。

除了使用效用替代现金收益以外,使用决策树分析问题的过程和前面所描述的过程相同。因此,被获得用于评估树的每一个分支的值是期望效用而不是期望(现金)收益。结果,贝叶斯决策准则选择的最优决策最大化了整个问题的期望效用。

因此,最终的决策树如图 15.20 所示,与 15.4 节给出的图 15.6 十分相似。节点和分支都是相同的,从节点分出的分支的概率也是一样的。为了报告的目的,全部的现金收益

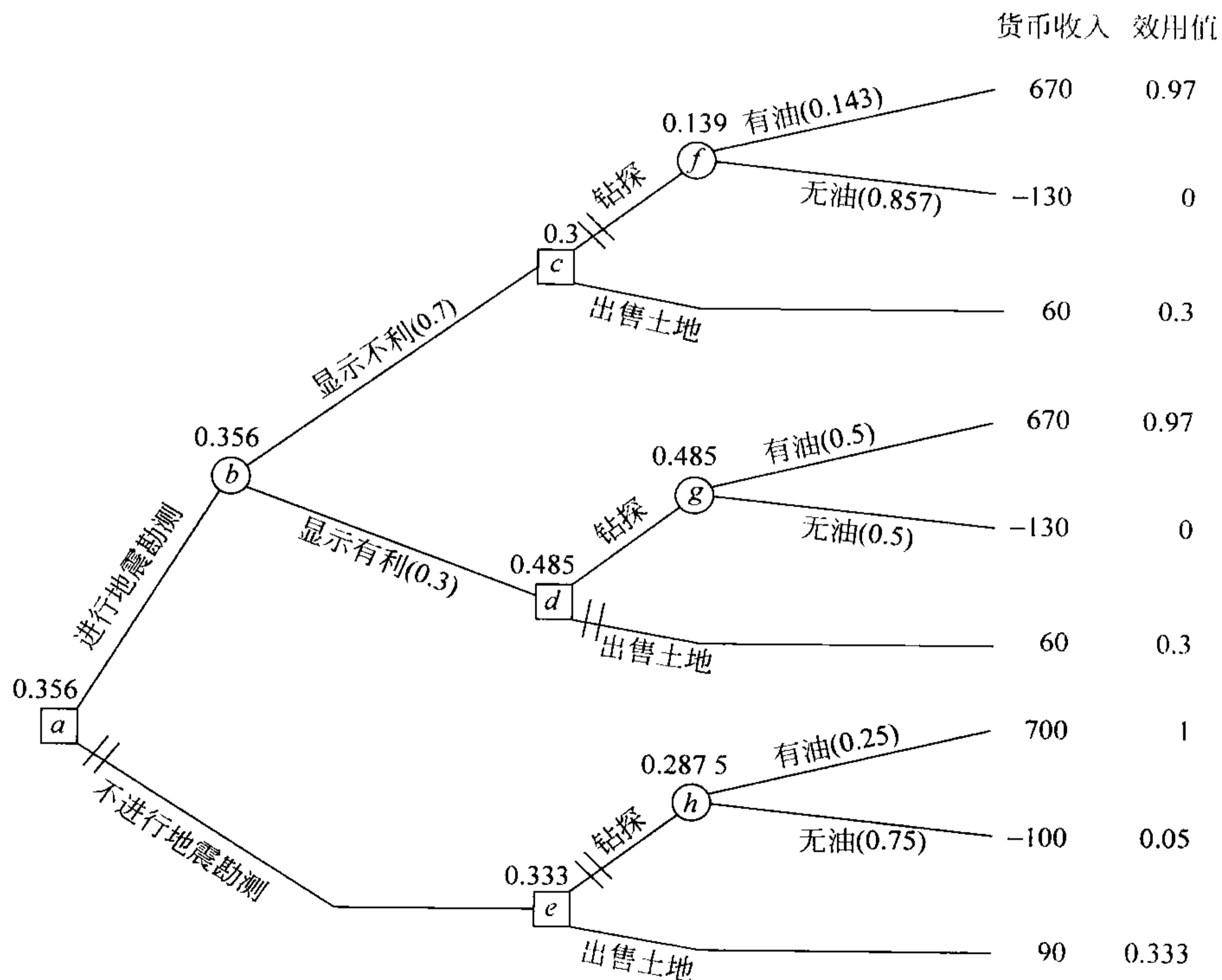


图 15.20 Goferbroke 公司完整问题的最终决策树,使用所有者的效用函数来最大化期望效用

仍然在最终分支的右侧给出(但是我们不再在分支附近给出单个的收益)。然而,我们已经在右边添加了效用。这些数被用来计算所有给出的临近节点的期望效用。

这些期望效用在节点 a, c 和 d 产生了同样的决策,如图 15.6 所示。但是在节点 e 的决策转向销售,而不是开采。然而,后退归纳过程仍然保留节点 e 在一个封闭的路径上。因此,总的最优策略仍然与 15.4 节末尾给出的一样(进行地质勘察:如果结果是不利的,则出售;如果结果是有利的,则开采)。

前面各节所使用的最大化期望现金收益数量的方法假设决策制订者是风险中性的。因此 $U(M) = M$ 。通过使用效用理论,现在最优解反映了决策制订者对风险的态度。因为 Goferbroke 公司的所有者仅仅采用适当的风险回避政策,最优策略与此前相比没有变化。对于有些更加害怕风险的所有者,最优解将变成立即卖掉土地的更加保守的方法(不进行地质勘察)(见习题 15.6-1)。

当前的所有者被推荐在问题的决策分析方法中使用效用理论。效用理论提供了面对不确定情况的理性的决策制订方法。然而,许多决策制订者对使用这个完全抽象的效用概念或者使用概率建立效用函数来应用这个方法感觉不舒服。结果,效用理论在实际中仍然没有被广泛使用。



15.7 决策分析的实际应用

总而言之,本章的原型实例(Goferbroke 公司问题)是决策分析的典型应用。像其他应用一样,管理者面对较大的不确定情况需要制订一些决策(是否进行地质勘察? 开采石油还是卖掉土地?)。制订这些决策是困难的,因为它们的收益是不可预知的,结果依赖于管理者掌控以外的因素(土地蕴藏石油还是无油)。因此,在这种不确定的环境中,管理者需要制订一个理性决策框架和方法。这些是决策分析应用的常见特征。

然而,在其他方面,Goferbroke 公司问题不是一个典型的应用。它过于简单,仅仅包括两个自然状态(有油和无油),而实际上可能有很多种差别很大的可能性。例如,实际的状态可能是无油、有少量的油、中等数量的油、大量的油和巨大数量的油,加上关于蕴藏石油的深度的不同概率,都会影响开采成本的条件。管理者仅仅考虑两个决策中的每一个的两个方案。真实的应用包含更多的决策、更多的方案,每一个都需要考虑,还有更多的可能的自然状态。

当处理较大的问题时,决策树的规模可能是巨大的,可能有几千个最终的分支。在这种情况下,手工建立决策树以及计算后验概率,计算不同节点的期望收益(或者效用),然后求解最优的决策显然是不可行的。幸运的是,一些优秀的软件包(主要用于个人计算机),可专门做这个工作。而且,专门的代数技术发展起来,并包括在计算机求解工具中用于处理较大的问题。^①

^① 例如,可参见 C. W. Kirkwood, "An Algebraic Approach to Formulating and Solving Large Models for Sequential Decisions under Uncertainty", *Management Science*, . 39: 900-913, July 1993.

对于大规模问题,敏感性分析也可能变得笨拙。尽管它有计算机软件的支持,产生数据的数量仍很容易超过分析工具和决策制订者的能力。因此,已经开发了一些图形技术,如 tornado charts 用于以一种可理解的方式组织数据。^①

在描述和求解决策分析问题,其他种类的图形技术也可用于建立决策树。一种十分流行的技术被称为影响图,研究者还在继续开发其他工具。^②

许多商务战略决策通过管理层的几个人员集体制订。一种群体决策制订技术称为决策会议,即一个群体在分析人员和决策辅助者的帮助下聚集在决策会议上一起讨论。决策辅助者直接与群体一起工作帮助建立和集中讨论,有创造性地思考问题,带来一些简单的假设,说明问题所涉及的整个范围等。分析人员使用决策分析帮助群体探究不同决策方案的含义。凭借计算机化群体决策支持系统的帮助,分析人员建立和求解现场模型,然后执行敏感性分析,从群体中回答“*What-if*”类型的问题。^③

决策分析的应用通常包括管理决策制订者(单个或者是群体)和分析人员(单个或者小组)之间的运筹学培训。有些公司并没有符合条件的组织成员来担任专业分析人员。因此,大量管理咨询公司专门从事决策分析。

如果你想查阅更多关于决策分析的实际应用,一个好的开始将是 1992 年 10-12 月的《界面》期刊。这一期全部是决策分析和风险分析的相关内容,包括许多有意义的文章,如基本方法的描述、敏感性分析、决策会议,也包括应用的文章。对决策分析实际应用的更新展望建议你阅读参考文献 8。这是《决策分析》(*Decision Analysis*)杂志创刊第 1 期的开篇文章。《决策分析》刊物侧重决策分析的应用研究,该篇文章给出了对决策分析目前应用方面的各类出版物的详细讨论。



15.8 结论

决策分析已经变成一个面对不确定情况的重要的决策工具。它以列举所有可能的行动方案、识别所有可能结果的收益、量化所有可能随机事件的主观概率为特征。当这些数据可用时,决策分析成为决定一个最优行动方案的强有力的工具。

决策分析中包括的一个选项是进行试验获得自然状态的概率估计。决策树是有用的、可视化的、用来分析这些选项或者一系列决策的工具。

效用理论提供了一个在分析过程中包含决策者对于风险态度的方法。

好的软件(包括在 OR Courseware 中的 TreePlan 和 SensIt)被广泛地用于执行决策分析。(参考文献 9 提供了对这类软件的一个调查。)

^① 进一步信息可参阅 T. G. Eschenbach, "Spiderplots versus Tornado Diagrams for Sensitivity Analysis." *Interfaces*, 22: 40-46, Nov. -Dec. 1992.

^② 例如,可参见 C. Bielza and P. P. Shenoy, "A Comparison of Graphical Techniques for Asymmetric Decision Problems," *Management Science*, 45(11): 1552-1569, Nov. 1999.

^③ 进一步信息可参阅 the two articles on decision conferencing in the November-December 1992 issue of *Interfaces*, where one describes an application in Australia and the other summarizes the experience of 26 decision conferences in Hungary.

参考文献

1. Bleichrodt, H., J. M. Abellan-Perpiñan, J. L. Pinto-Prades, and I. Mendez-Martinez: "Resolving Inconsistencies in Utility Measurement Under Risk: Tests of Generalizations of Expected Utility," *Management Science*, **53**(3): 469–482, March 2007.
2. Clemen, R. T.: *Making Hard Decisions: Introduction to Decision Analysis (with CD-ROM)*, 3rd ed., Duxbury Press, Pacific Grove, CA, 2006.
3. Fishburn, P. C.: "Foundations of Decision Analysis: Along the Way," *Management Science*, **35**: 387–405, 1989.
4. Fishburn, P. C.: *Nonlinear Preference and Utility Theory*, The Johns Hopkins Press, Baltimore, MD, 1988.
5. Goodwin, P., and G. Wright: *Decision Analysis for Management Judgment*, 3rd ed., Wiley, New York, 2004.
6. Hammond, J. S., R. L. Keeney, and H. Raiffa: *Smart Choices: A Practical Guide to Making Better Decisions*, Harvard Business School Press, Cambridge, MA, 1999.
7. Hillier, F. S., and M. S. Hillier: *Introduction to Management Science: A Modeling and Case Studies Approach with Spreadsheets*, 3rd ed., McGraw-Hill/Irwin, Burr Ridge, IL, 2008, chap. 9.
8. Keefer, D. L., C. W. Kirkwood, and J. L. Corner: "Perspective on Decision Analysis Applications," *Decision Analysis*, **1**(1): 4–22, 2004.
9. Maxwell, D. T.: "Software Survey: Decision Analysis," *OR/MS Today*, **33**(6): 51–61, Dec. 2006.
10. Smith, J. E., and R. L. Keeney: "Your Money or Your Life: A Prescriptive Model for Health, Safety, and Consumption Decisions," *Management Science*, **51**(9): 1309–1325, Sept. 2005.
11. Smith, J. E., and R. L. Winkler: "The Optimizer's Curse: Skepticism and Postdecision Surprise in Decision Analysis," *Management Science*, **52**(3): 311–322, March 2006.
12. Smith, J. E., and D. von Winterfeldt: "Decision Analysis in *Management Science*," *Management Science*, **50**(5): 561–574, May 2004.

习题

一些习题左边的符号(或者它们的一部分)有下面的含义:

T: 上面所列的有帮助的 Excel 模板。

A: 上面所列的可用的相应的 Excel 附加项。

习题上有一个星号表示书后至少给出该题的一部分答案。

15.2-1 阅读 15.2 节应用案例中概要叙述并在其参考文献的论文中详述的运筹学的研究。简要描述决策分析如何在该项研究中应用的,然后列出由其带来的财务与非财务的效益。

15.2-2* Silicon Dynamics 开发了一个计算机芯片,从而能够生产和销售个人计算机。它可以将计算机芯片的专利权销售 1 500 万美元,这是一个替代方案。如果公司选择制造计算机,可能的收入取决于公司在第一年销售计算机的能力。公司完全有能力保证有销售 10 000 台计算机的渠道。另外,如果这种计算机流行,计算机公司可销售 100 000 台机器。这两种销售情况被当作计算机销售的两个可能结果,但是不清楚先验概率是多少。建立生产线的成本是 600 万美元。每一台计算机的销售价格和可变成本的差是 600 美元。

- (a) 通过识别决策方案、自然状态和收益表建立这个问题的决策分析公式。
- (b) 画一个图形, 标明对应销售 10 000 台计算机先验概率的每一个决策方案的期望收益。
- (c) 参考(b)中所绘的图形, 使用代数法求解交叉点, 解释这个点的含义。
- A(d) 画一个图形标明对应销售 10 000 台计算机的先验概率的每一个决策方案的期望收益(使用贝叶斯决策准则)。
- (e) 假设这两种销售情况的先验概率都是 0.5, 应该选择哪一个决策方案?

15.2-3 Jean Clark 是 Midtown Saveway 食品杂货店的管理者。她现在需要补充草莓的供应。往常的供应者能够提供她所需要的数量。然而, 因为这些草莓已经十分成熟了, 需要明天就卖掉它们, 没有卖掉的将被扔掉。Jean 估计明天可能的销售境况将是 12 箱、13 箱、14 箱、15 箱四种。它能够在每一种情况下, 以 3 美元每单位买入, 以 8 美元每单位出售。Jean 需要决策应购买多少。

Jean 已经检查了商店每天草莓的销售记录, 在这个基础上, 明天销售草莓 12 箱、13 箱、14 箱、15 箱等每一情况的先验概率分别是 0.1、0.3、0.4、0.2。

- (a) 通过识别决策方案、自然状态和收益表建立这个问题的决策分析公式。
- (b) 如果 Jean 使用小中取大收益准则, 应该购买多少草莓?
- (c) 根据最大可能准则, Jean 应该购买多少草莓?
- (d) 根据贝叶斯决策准则, Jean 应该购买多少草莓?
- (e) Jean 认为她有正确的销售 10 箱和 13 箱情况的先验概率, 但是对于如何区分 11 箱和 12 箱的先验概率是不确定的, 当 11 箱和 12 箱的先验概率分别是 (i) 0.2 和 0.5, (ii) 0.3 和 0.4, (iii) 0.5 和 0.2 时, 再应用贝叶斯决策准则。

15.2-4* Warren Buffy 是一位大的财产投资者。他凭借自己的投资天赋积累了自己的财富。当前有三种主要的投资, 他将选择一个。第一个是保守的投资, 在经济状况下将运行良好, 在坏的经济状况下将损失很小; 第二个是投机性的投资, 在好的经济状况下将运行极好, 在坏的经济状况下将损失很大; 第三个是一个反周期的投资, 在好的经济状况下有少许损失, 在坏的经济状况下运行良好。

Warren 相信在投资周期中, 有三种可能的情况: ①运行良好的经济状况; ②稳定的经济状况; ③差的经济状况。他对经济前景是悲观的, 因此分别对三种情况赋予先验概率 0.1、0.5 和 0.4。他估计三种情况下各自的收益如下表所示。

	良好经济	稳定经济	差的经济
保守投资/美元	30 000 000	5 000 000	-10 000 000
投机投资/美元	40 000 000	10 000 000	-30 000 000
反周期投资/美元	-10 000 000	0	15 000 000
先验概率	0.1	0.5	0.4

在下面每一个决策准则下, Warren 应该做出什么决策准则?

- (a) 小中取大收益准则;
- (b) 最大可能性准则;
- (c) 贝叶斯决策准则。

- 15.2-5 再考虑习题 15.2-4。Warren Buffy 认为贝叶斯决策准则是最可靠的决策准则。他确信良好经济状况下的先验概率是 0.1, 但是不确定稳定经济情况和差的经济情况的先验概率的大小该如何分配, 因此, 他希望对后两个先验概率作敏感性分析。
- (a) 在经济稳定和差的情况下先验概率分别是 0.3 和 0.6 的时候, 再应用贝叶斯决策准则分析。
- (b) 在经济稳定和差的情况下先验概率分别是 0.7 和 0.2 的时候, 再应用贝叶斯决策准则分析。
- (c) 用图形表示对于稳定经济状态下先验概率的三种投资方案的收益(良好经济状态的先验概率固定为 0.1)。使用这个图形识别从一个方案到另一个方案的交点。
- (d) 使用代数法求解(c)中找到的交点。
- (e) 画出稳定经济状态先验概率下的期望收益的图形(使用贝叶斯决策准则)。

15.2-6 给定决策分析问题的收益表。

方 案	状 态		
	S_1	S_2	S_3
A_1 /千美元	220	170	110
A_2 /千美元	200	180	150
先验概率	0.6	0.3	0.1

- (a) 小中取大收益准则下, 应该选择哪一种方案?
- (b) 最大可能准则下, 应该选择哪一种方案?
- (c) 贝叶斯决策准则下, 应该选择哪一种方案?
- (d) 使用贝叶斯决策准则, 对应状态 S_1 和 S_2 先验概率(不改变状态 S_3 的先验概率)进行图形化的敏感性分析, 来决定从一个方案转向另一个方案的交点, 然后使用代数法计算该交点。
- (e) 对状态 S_1 和 S_3 先验概率重复(d)。
- (f) 对状态 S_2 和 S_3 先验概率重复(d)。
- (g) 如果你感觉自然状态的真实概率在给定概率的 10% 以内, 应该选择哪一个方案?

15.2-7 Dwight Moody 是拥有 1 000 亩可耕种土地的大农场的管理者。为了保持高效, Dwight 的农场在一段时期内一直种植一种作物。他现在需要制订决策, 决定在将来一季种植四种作物中的哪一种。对于这些作物中的一种, Dwight 已经获得了不同天气条件下每蒲式耳作物的产量估计和净收益估计, 如下表所示。

天 气	期望产出			
	作物 1	作物 2	作物 3	作物 4
干旱/(蒲式耳/英亩)	30	25	40	60
适中/(蒲式耳/英亩)	50	30	35	60
潮湿/(蒲式耳/英亩)	60	40	35	60
每蒲式耳的净收入/美元	3.00	4.5	3.00	1.5

参考了历史气象记录之后, Dwight 也估计了下一季天气先验概率如下。

干旱	0.2
适中	0.5
潮湿	0.3

- (a) 通过识别决策方案、自然状态和收益表建立这个问题的决策分析公式。
 (b) 使用贝叶斯决策准则决定种植哪一种作物。
 (c) 使用贝叶斯决策准则,各自对中等天气和潮湿天气的先验概率进行敏感性分析(不改变干燥天气的先验概率)。再求解中等天气先验概率分别为 0.2、0.3、0.4 和 0.6 的情况。

15.2-8* 空军部门采购了一种新型的飞机,必须决策备用发动机的订购数量。空军部门以 5 个为一批来订购发动机,将在 15 订购数量、20 订购数量、25 订购数量中选择订购。有两个工厂供应这种备件,在知道使用哪一个工厂前必须做出订购决策。然而,空军部门从过去的经验知道所有类型的发动机的 $2/3$ 在工厂 A 生产,只有 $1/3$ 在工厂 B 生产。空军部门也知道在工厂 A 生产备用发动机近似服从 $\theta=21$ 的泊松分布,然而在工厂 B 生产备用发动机近似服从 $\theta=24$ 的泊松分布。现在备用发动机的采购成本是 40 万美元,然而更晚一些日期购买发动机的成本将是 900 000 美元。如果要求备件必须一直供应,飞机荒废备件将丢弃,持有成本和利息被忽略。根据这些数据,总成本计算如下(负收益)。

方 案	状 态	
	$\theta=21$	$\theta=24$
订购 15	1.155×10^7	1.414×10^7
订购 20	1.012×10^7	1.207×10^7
订购 25	1.047×10^7	1.135×10^7

在贝叶斯决策准则下决定最优方案。

15.3-1 阅读 15.3 节应用案例中概述描述并在其参考文献论文中详述的运筹学的研究。先简要说明决策分析在该项研究中是如何应用的,再列出研究带来的各类财务与非财务效益。

15.3-2* 再考虑习题 15.2-2。Silicon Dynamics 的管理层现在考虑进行全面成熟的市场调查,以 1 000 000 美元的成本,预测两种级别的需求将发生哪一个。以前的经验表明,这样的市场调查有 $2/3$ 是正确的。

- (a) 求解这个问题的 EVPI。
 (b) (a) 中的答案表明值得进行这样的市场调查吗?
 (c) 建立一个概率树以获得市场研究可能结果的每一种需求级别的后验概率。
 (d) 使用相应的 Excel 模板检验你在(c)中得到的结果。
 (e) 求解 EVE。值得进行市场调研吗?

15.3-3 给定决策分析问题的收益表。

方 案	状 态		
	S_1	S_2	S_3
A_1 /千美元	6	1	1
A_2 /千美元	1	3	0
A_3 /千美元	4	1	2
后验概率	0.3	0.4	0.3

- (a) 根据贝叶斯决策准则,应该选择哪一个决策方案?
 (b) 求解 EVPI。
 (c) 给你一个机会,花费 1 000 美元获得可能发生哪一种状态的更多信息,给定(b)中的答案,这个花费值得吗?

15.3-4* Betsy Pitzer 根据贝叶斯决策准则制订决策。对于她当前的问题,Betsy 已经建立了下面的收益表。

方 案	状 态		
	S_1	S_2	S_3
A_1 /美元	50	100	-100
A_2 /美元	0	10	-10
A_3 /美元	20	40	-40
后验概率	0.5	0.3	0.2

- (a) Betsy 应该选择哪一种方案?
 (b) 求解 EVPI。
 (c) 要想获得自然状态将发生的更多信息,Betsy 最能接受的花费是多少?

15.3-5 使用贝叶斯决策准则,考虑决策分析问题的收益表。

方 案	状 态		
	S_1	S_2	S_3
A_1 /千美元	-20	3	25
A_2 /千美元	-3	5	10
A_3 /千美元	4	2	15
后验概率	0.3	0.3	0.4

- (a) 应该选择哪一种方案? 最终期望收益是多少?
 (b) 现在你有机会获得自然状态 S_1 将发生的确定信息,你愿意最大付出多少来获得信息? 假设你愿意获得信息,你将怎样使用信息来选择方案? 期望收益是多少(不包括报酬)?
 (c) 当提供的信息是关于 S_2 而不是 S_1 的,重复(b)。
 (d) 当提供的信息是关于 S_3 而不是 S_1 的,重复(b)。
 (e) 现在你有机会获得将发生哪一个自然状态的确定信息,你愿意最大付出多少来获得信息? 假设你愿意获得信息,你将怎样使用信息来选择方案? 期望收益是

多少(不包括报酬)?

(f) 如果你有机会做一些试验来获得一些关于自然状态的部分附加信息(不是完美信息),你最多愿意付出多少来获得信息?

15.3-6 再考虑 Goferbroke 公司的原型实例,包括 15.3 节的分析。在咨询地理学家的帮助下,已经得到的历史数据提供了更精确的信息,使得在相似的土地上增加了有利勘察的可能性。特别的,当土地蕴藏石油时,有 80% 的可能获得有利的勘察结果;当土地不蕴含石油时,概率将降低到 40%。

(a) 重新修改图 15.2,求解最新的后验概率。

T(b) 使用相应的 Excel 模板检验(a)中的答案。

(c) 最终的最优策略是什么?

15.3-7 给定下面的收益表。

方 案	状 态	
	S_1	S_2
A_1 /美元	400	-100
A_2 /美元	0	100
后验概率	0.4	0.6

你有一个选择,即付出 100 美元进行研究,更准确地预测自然状态的发生。当真实的自然状态是 S_1 时,研究准确预测 S_1 的可能性为 60% (40% 的可能性将不准确预测 S_2); 当真实的自然状态是 S_2 时,研究准确预测 S_2 的可能性为 80% (20% 的可能性将不准确预测 S_1)。

(a) 假定没有进行研究,使用贝叶斯决策准则决定选择哪一种决策方案。

(b) 求解 EVPI。这个结果表明值得进行研究吗?

(c) 假设进行研究,求解下面成对结果的联合概率: (i) 自然状态是 S_1 , 研究预测也是 S_1 ; (ii) 自然状态是 S_1 , 研究预测是 S_2 ; (iii) 自然状态是 S_2 , 研究预测是 S_1 ; (iv) 自然状态是 S_2 , 研究预测也是 S_2 。

(d) 求解研究预测 S_1 的无条件概率并研究预测 S_2 的无条件概率。

(e) 假设进行研究,使用你在(c)、(d)中得到的答案求解两种可能研究预测中每一个自然状态的后验概率。

T(f) 使用相应的 Excel 模板检验你在(e)中得到的答案。

(g) 假定研究预测为 S_1 , 使用贝叶斯决策准则决策应该选择哪一种决策方案及其最终的期望收益。

(h) 当研究预测为 S_2 时,重复(g)。

(i) 假设研究已完成,应用贝叶斯决策准则求期望收益。

(j) 使用前述的结果决定是否进行研究,并决定决策方案选择的最优策略。

15.3-8* 再考虑习题 15.2-7。假设现在空军部门知道一种相似类型的发动机被生产用于这种飞机的早期型号,这种飞机在当前考虑范围之内。对于早期型号订购的数量与当前类型相同。而且,给定产品生产的工厂,对于发动机需求的数量的概率分布,

认为早期型号的飞机与当前的一样。当前订购的发动机将在与以前一样的工厂生产,尽管空军部门不知道是两个工厂中的哪一个。空军部门已经得到了所需要的老型号的备件数量的数据,但供应商没有说明生产地点。

(a) 值得花费多少来得到那些反映哪一个工厂生产产品的全部信息?

(b) 假设关于老的飞机模型的数据成本是免费的,需要 30 个备用件。给定 30 个备用件的概率,给定泊松分布,当 $\theta=21$ 时,等于 0.013; 当 $\theta=24$ 时,等于 0.036。求解贝叶斯决策准则下的最优行动。

15.3-9* Vincent Cuomo 是 Fine Fabrics Mill 的信托管理者。他当前需要决定是否扩大 100 000 美元的信贷给一个潜在的新顾客,这个新顾客是一个服装制造商。Vincent 有三种类型的公司信贷: 低风险、一般风险和高风险,但是不知道哪一种类型适合潜在的顾客。经验表明,与该公司相似的公司有 20% 是低风险的、50% 是一般风险的、30% 是高风险的。如果扩大信贷,低风险期望收益是 -15 000 美元、一般风险的期望收益是 10 000 美元、高风险的收益是 20 000 美元。如果不扩大信贷,服装制造商将转向其他工厂。Vincent 可以花费 5 000 美元向信贷比例咨询公司咨询评估。对于公司的信贷记录属于这三种类型的公司,下表给出了信贷咨询公司评估的三种类型各自的百分比。

信用评估	实际信用记录			%
	差	一般	好	
差	50	40	20	
一般	40	50	40	
好	10	10	40	

(a) 当不向信贷咨询公司咨询时,通过识别决策方案、自然状态和收益表建立这个问题的决策分析公式。

(b) 当不向信贷咨询公司咨询时,使用贝叶斯决策准则,应该选择哪一个决策方案?

(c) 求解 EVPI。这个答案有没有显示应该考虑向信贷咨询公司咨询?

(d) 假设向信贷咨询公司咨询,建立概率树图求解现在顾客的三种可能评估的各个自然状态的后验概率。

T(e) 使用相应的 Excel 模板求解(d)中的答案。

(f) 求解 Vincent 的最优策略。

15.3-10 一个运动团体对运动员进行药物测试,运动员 15% 使用药物。然而,这个测试只有 97% 的可靠性。也就是说,一个药物使用者将以 0.97 的概率测试为阳性,0.03 的概率测试为阴性。一个非药物使用者将以 0.97 的概率测试为阴性,以 0.03 的概率测试为阳性。

建立概率树图,求解测试运动员的下列结果的后验概率。

(a) 给定测试结果是阳性,运动员是药物使用者。

(b) 给定测试结果是阳性,运动员不是药物使用者。

(c) 给定测试结果是阴性,运动员是药物使用者。

(d) 给定测试结果是阴性,运动员不是药物使用者。

T(e) 使用相应的 Excel 模板检验前述各部分的答案。

15.3-11 Telemore 公司的管理层正考虑开发和营销一种新产品,据评估,产品成功的可能是不成功的两倍。如果成功,期望收益将是 1 500 000 美元。如果不成功,期望损失将是 1 800 000 美元,可进行市场调查,预测产品是否会成功,其成本是 300 000 美元。过去这样的市场调查表明成功的产品有 80% 的可能被预测为成功,然而,不成功的产品有 70% 的可能被预测为不成功。

(a) 当不进行市场调查时,通过识别决策方案、自然状态和收益表建立这个问题的决策分析公式。

(b) 当不进行市场调查时,使用贝叶斯决策准则,应该选择哪一个决策方案?

(c) 求解 EVPI。这个答案是否显示应该进行市场调查?

T(d) 假设进行市场调查,求解市场调查两种可能评估的各个状态的后验概率。

(e) 求解是否进行市场调查以及是否开发和销售新产品的最优策略。

15.3-12 Hit-and-Miss 制造公司生产的产品有缺陷的概率是 p 。这些产品每批生产 150。过去的经验表明, p 是 0.05 或者 0.25。而且,对于这些产品有 80% 的可能 $p=0.05$ (有 20% 的可能 $p=0.25$)。这些产品然后用于集装,产品的数量在最终集装离开工厂前决定。起初,公司以 10 美元的成本遴选产品,然后挑出有缺陷的产品,或者不遴选就直接使用它们。如果后一种方案被选择,对于每一种有缺陷的产品再次工作的成本是 100 美元。因为遴选需要检查和装配的计划,遴选或者不遴选的决策需要在进行遴选两天之前确定。然而,产品可以送到实验室检查,在遴选或者不遴选的决策制订前它的质量(有缺陷或者无缺陷)可以报告出来。最初检验的成本是 125 美元。

(a) 当不对单个产品进行提前检验时,通过识别决策方案、自然状态和收益表建立这个问题的决策分析公式。

(b) 当不对单个产品进行提前检验时,使用贝叶斯决策准则,应该选择哪一个决策方案?

(c) 求解 EVPI。这个答案是否显示应该对单个产品进行提前检验?

T(d) 假设对单个产品进行提前检验,求解检验的两种可能评估结果的各个状态的后验概率。

(e) 求解 EVE,值得对单个的产品进行检验吗?

(f) 求解最优策略。

T 15.3-13* 考虑两枚硬币。硬币 1 有 0.3 的概率正面朝上,硬币 2 有 0.6 的概率正面朝上。一枚硬币投掷一次,硬币 1 被投掷的概率是 0.6,硬币 2 被投掷的概率是 0.4。决策制订者使用贝叶斯决策准则决定投掷的硬币。收益表如下。

方 案	状 态	
	投掷硬币 1 时的收益	投掷硬币 2 时的收益
认为投掷的是硬币 1	0	-1
认为投掷的是硬币 2	-1	0
后验概率	0.6	0.4

- (a) 在投掷硬币前,最优方案是什么?
 (b) 投掷硬币后如果正面朝上,最优方案是什么? 如果反面朝上呢?

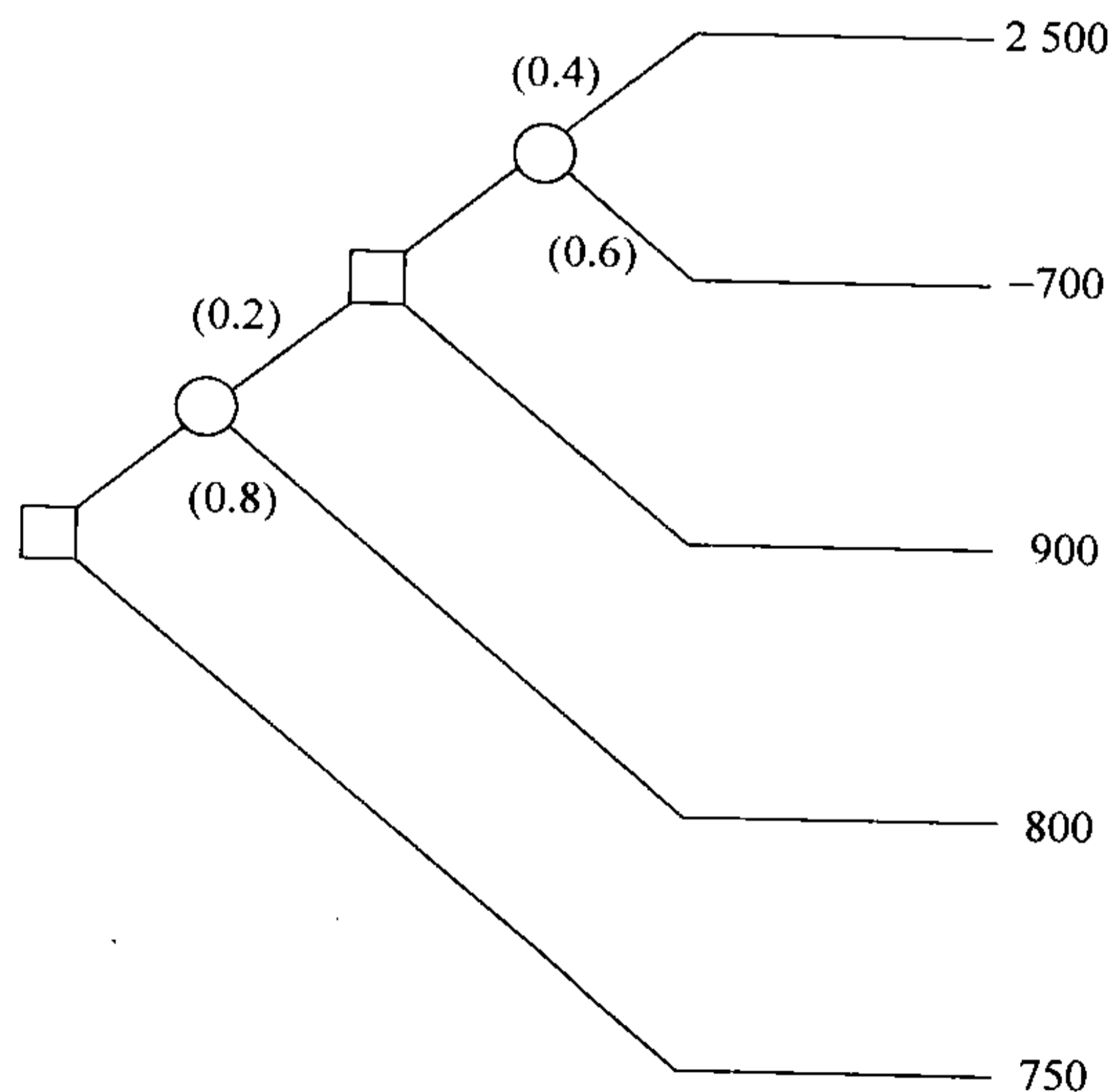
15.3-14 两枚有偏的硬币分别以概率 0.8 和 0.4 正面朝上,每枚硬币以随机(各以 1/2 概率)选择投掷两次。如果你正确预测两次投掷中有多少正面朝上你将得到 250 美元。

- (a) 应用贝叶斯决策,最优预测是什么? 相应的期望收益是多少?
 (b) 假设在预测前你可以观察一次实际的投掷,使用相应的 Excel 模板求解所投掷硬币的后验概率。
 (c) 观察实际预测后,决定你的最优预测。期望收益是多少?
 (d) 求解观察实际投掷的 EVE,如果你必须支付 30 美元来观察投掷,最优策略是什么?

15.4-1 阅读 15.4 节应用案例中概要描述并在其参考文献的论文中详细阐明的运筹学的研究。先简要说明决策分析在该项研究中是如何应用的,然后列出由此带来的各类财务与非财务的效益。

15.4-2* 再考虑习题 15.3-2。Silicon Dynamics 现在想得到显示全部问题的决策树。手工建立和求解这个决策树。

15.4-3 给定下面的决策树,括号内的数是概率,右边终点的数是收益。分析此决策树获得最优策略。



15.4-4* Leland 大学体育系正在考虑下一年是否扩大运动会规模来为新的体育场筹集资金。这一活动很大程度上取决于足球队能否赢得秋季赛事。在过去,足球队已经赢了本赛季的 60%。如果足球队赢了本赛季(W),学校的男女生将进行捐献,活动将筹集 3 000 000 美元。如果足球队输了这个赛季(L),很少有人捐献,活动将损失 2 000 000 美元。如果不进行活动,则不发生成本。9 月 1 日,在足球赛季开始前,体育系开始制订决策决定是否举办下一年的活动。

(a) 通过分析决策方案、自然状态和收益表建立这个问题的决策分析公式。

(b) 使用贝叶斯决策准则,应该选择哪一个决策方案?

(c) EVPI 是多少?

(d) 著名的足球领袖 William Walsh 来帮助评估足球队能否赢得该赛季。为了 100 000 美元,他将通过整个春季的实际情况和整个季前的测试来仔细地评估球队。William 将在 9 月 1 日给出对球队赛季的预测,W 或者 L。在相同的情况下,过去在评估球队时,有 50%的机会赢,这时预测的正确性是 75%。考虑到球队曾经赢过,如果 William 预测会赢得赛季,球队赢的后验概率是多少? 球队输的后验概率是多少? 如果 William 预测会输,赢的后验概率是多少? 输的后验概率是多少? 说明怎样从概率树图中获得这些答案。

T(e) 使用相应的 Excel 模板求解(d)中的答案。

(f) 手工画出整个问题的决策树。分析决策树求解关于是否雇用 William 和是否开展活动的最优策略。

15.4-5 Macrosoft 公司的审计员有 1 亿美元资金用于投资。她被指示在第一年将全部的投资投于股票或者证券(但不是两者都投),然后于第二年将全部投资投于股票或者证券。目标是在第二年年末最大化期望的现金值。

在这些投资上的年回报率取决于经济环境。如下表所示。

经济环境	回报率/%	
	股票	债券
增长	20	5
衰退	-10	10
萧条	-50	20

第一年经济增长、后退和萧条的概率分别为 0.7、0.3、0。如果第一年发生增长,接下来第二年经济情况仍然是这些概率。然而,如果发生萧条,在第二年经济情况的相应概率分别变为 0.2、0.7、0.1。

(a) 手工建立这个问题的决策树。

(b) 分析决策树得到最优策略。

15.4-6 周一,某支股票以 1 美元/股收盘。周二,你期望股票每股收于 9 美元、10 美元、11 美元的概率分别为 0.3、0.3、0.4。在周三,你期望股票比周二以降低 10%收盘、不变或者增加 10%收盘 相应概率如下。

当天收盘价/美元	股价升降概率		
	下降 10%	不变	上升 10%
9	0.4	0.3	0.3
10	0.2	0.2	0.6
11	0.1	0.2	0.7

在周二,即在周四之前你被指导去买 100 股股票。在这一天末,以当天已知的收盘价购买所有的股票,因此你的唯一选择就是在周二或者周三末购买股票。给定周二的价格,你希望进行最优决策,决定在周二还是周三买,以最小化期望购买股价。手工建立和评估一个决策树来决策最优策略。

15.4-7 使用习题 15.3-9 给定的情境。

(a) 正确画出和标注决策树,包括除了概率以外的所有收益。

T(b) 求解从事件节点分出的分支的概率。

(c) 应用后退归纳过程,求解最优策略。

15.4-8 使用习题 15.3-11 给定的情境。

(a) 正确画出和标注决策树,包括除了概率以外的所有收益。

T(b) 求解从事件节点分出的分支的概率。

(c) 应用后退归纳过程,求解最优策略。

15.4-9 使用习题 15.3-12 给定的情境。

(a) 正确画出和标注决策树,包括除了概率以外的所有收益。

T(b) 求解从事件节点分出的分支的概率。

(c) 应用后退归纳过程,求解最优策略。

15.4-10 使用习题 15.3-13 给定的情境。

(a) 正确画出和标注决策树,包括除了概率以外的所有收益。

T(b) 求解从事件节点分出的分支的概率。

(c) 应用后退归纳过程,求解最优策略。

A 15.4-11 Headhunters 公司为 Western Bank 所做的寻找管理人才的工作很可能大有收获。要填补的职位很重要——信息规划副总裁,他将负责建立先进的管理信息系统,以便将 Western 的许多分支联系在一起。Headhunters 觉得已经发现了适当的人选,Matthew Fenton。他在纽约一家中等规模的银行的类似职位上工作得很出色。一轮面试之后,Western 的主席相信 Matthew 有 0.75 的概率做到成功设计管理信息系统。如果 Matthew 成功,公司将得到 4 000 000 美元的利润(减去 Matthew 的薪水、培训、招募成本和花费后的净额)。如果不成功,公司将会有 900 000 美元的损失。

若再花费 35 000 美元,Headhunters 将提供详细的调查过程(包括扩大的背景调查、一系列学术和心理测试等),从而进一步揭示 Matthew 的成功潜力。这个调查过程有 90% 的可靠性。即调查表明一个能成功设计信息系统的候选人将以 0.9 的概

率通过测试。而调查表明一个不能成功设计信息系统的人将以 0.9 的概率测试失败。

Western 的高层管理者需要决定是否雇用 Matthew, 并决定在决策前是否让 Headhunters 公司进行详细的调查。

(a) 建立这个问题的决策树。

T(b) 求解从事件节点分出的分支的概率。

(c) 分析决策树, 求解最优策略。

(d) 现在假设 Headhunters 公司进行详细调查的费用是可以协商的。Western Bank 最多应为此付出多少?

A 15.5-1 再考虑习题 15.2-2 描述的 Silicon Dynamics 问题的原始版本。

(a) 假设销售的两个水平的先验概率都是 0.5。使用 TreePlan 建立和求解这个问题的决策树。根据这个分析, 应选择哪一个决策方案?

(b) 使用 SensIt 绘制对应销售 10 000 台计算机的先验概率的期望收益的图形(使用贝叶斯决策准则)。

A 15.5-2 再考虑习题 15.2-2 和 15.4-2 描述的 Silicon Dynamics 问题的扩展版本。

(a) 使用 TreePlan 建立和求解这个问题的决策树。

(b) 15.2-2 中描述的财务数据有一些不确定性(分别为 15 000 000 美元、6 000 000 美元和 600 美元)。每一个能够以基准值为基础变化 10%。对于每一个值(其他的两个值不变化), 进行敏感性分析, 通过相应地调节数据单元的值, 找出此值在变化范围的两端将发生什么。然后对这 8 种情况的所有数据的两端或者其他部分进行敏感性分析。

(c) 由于(b)部分描述的不确定性, 使用 SensIt 绘制一张图, 描述每一个财务数据变化范围内的期望收益(不改变其他两个变量)。

(d) 绘制相应的 Spider 图和 Tornado 图。

A 15.5-3 再考虑习题 15.4-3 描述的决策树, 使用 TreePlan 建立和求解问题的决策树。

A 15.5-4 再考虑习题 15.4-5 描述的问题, 使用 TreePlan 建立和求解问题的决策树。

A 15.5-5 再考虑习题 15.4-6 描述的问题, 使用 TreePlan 建立和求解问题的决策树。

A 15.5-6 Jose Morales 在加利福尼亚圣何塞的一个略显贫瘠的地区经营一个大型户外水果摊。为了补充供应, Jose 每天从圣何塞的南部供应者购买成箱的水果, 大约 85% 的水果箱的质量都令人满意, 但是另外的 15% 则不令人满意。每箱包含 90% 的优质水果将为 Jose 挣 600 美元的利润。包含 40% 的优质水果则将使 Jose 失去 2 000 美元。在 Jose 决定接受水果之前, 将对水果箱取样测试它是否优质。基于这样的取样, 他有拒收不付报酬的选择。Jose 想知道: (1) 是否应该继续向该供应者购买? (2) 如果购买, 是否值得进行从一箱水果中抽一个水果的抽样? (3) 如果购买, 基于这个抽样结果, 他是否应该购买这箱水果。

使用 TreePlan(和后验概率的 Excel 模板)建立和求解这个问题的决策树。

A 15.5-7* Morton Ward 公司正考虑引进一个新产品,相信有 50% 的机会成功。一个选择是在制订引进决策前在市场上试销,成本为 5 000 000 美元。过去的经验表明成功的产品在试销市场上成功的概率是 80%,不成功的产品在市场试销的成功概率是 25%。如果产品成功,公司的净收益是 40 000 000 美元;如果不成功,损失 15 000 000 美元。

(a) 不考虑产品的试销,通过问题的决策方案、自然状态、收益表建立这个问题的描述公式,然后应用贝叶斯决策准则求解最优解。

(b) 求解 EVPI。

A(c) 考虑试销,使用 TreePlan(和后验概率的 Excel 模板)建立和求解这个问题的决策树。

A(d) 关于利润和损失有一些不确定性(40 000 000 美元和 15 000 000 美元),围绕基础值上下 25% 变化。使用 SensIt 产生在变化范围内的期望收益图形。

A(e) 由于(d)中描述的不确定性,使用 SensIt 产生两个财务数据中每一个在变化范围内的期望收益图形(不改变另一个的数据)。

A(f) 绘制相应的 Spider 和 Tornado 图,并解释。

A 15.5-8 Chelsea Bush 是她所在党派任命的热门美国总统候选人。她正在考虑是否进行一个高风险的候选人提名会 Super Tuesday。如果进行 Super Tuesday(S. T.),她的顾问相信做得好(第一和第二)和做得坏(第三和更坏)的概率分别是 0.4 和 0.6。做得好,将赢得大约 16 000 000 美元的参选捐款;坏的表现将意味着 10 000 000 美元的巨额电视广告的损失。另外,她也可以不参加 Super Tuesday,不用付出成本。

Chelsea 的顾问意识到她在 Super Tuesday 成功的可能性将受到在 Super Tuesday 之前三周举行的规模较小的 New Hampshire(N. H.) 候选人提名会的影响。政治分析人士认为,New Hampshire(N. H.) 候选人提名会有 2/3 的概率正确预测 Super Tuesday 候选人提名会的结果。在 Chelsea 顾问中有一名决策分析专家使用这些信息得出下面的概率:

$$P\{\text{假定在 N. H. 做得好,Chelsea 在 S. T. 做得好}\} = 4/7$$

$$P\{\text{假定在 N. H. 做得不好,Chelsea 在 S. T. 做得好}\} = 1/4$$

$$P\{\text{Chelsea 在 N. H. 做得好}\} = 7/15$$

估计参加 New Hampshire(N. H.) 候选人提名会的成本是 1 600 000 美元。

Chelsea 觉得成功赢得任命的机会取决于在 Super Tuesday 候选人提名会后有足够的可用资金进行其余部分的一个有活力的竞选运动。因此,她想选择策略(是否参加 New Hampshire(N. H.) 候选人提名会,是否参加 Super Tuesday 候选人提名会)以最大化这些活动后募集的资金。

(a) 建立和求解这个问题的决策树。

(b) 对 16 000 000 美元收益和 10 000 000 美元损失的评估存在一些不确定性,这取决于 Super Tuesday 候选人提名会的表现。两个值将在这个评估上下 25% 变化。对于这两个财务数据中的每一个,进行敏感性分析来检验在这个变化范围两端(a)中的结果如何变化(另一个财务数据不变化时),然后对两个财务数据分别在

两端的四种情况进行敏感性分析。

A (c) 由于(b)中描述的不确定性,使用 SensIT 生成在这些活动后 Chelsea 预期将获资金的图,图中应表明两个财务数据各自的变化范围(假定其他数据均不变化)。

A (d) 建立相应的 Spider 和 Tornado 图,并解释。

15.6-1 再考虑 Goferbroke 公司问题的原型实例,包括 15.6 节效用的应用。所有者已经假设公司的警戒的财务状况,他需要对这个问题采取风险回避的方法。因此修订表 15.7 的效用如下: $U(-130)=0, U(-100)=-0.1, U(60)=0.4, U(90)=0.45, U(670)=0.985$,和 $U(700)=1$ 。

(a) 手工修改对应的图 15.21 的决策树,并求解新的最优策略。

A (b) 使用 TreePlan 建立和求解此决策树。

15.6-2* 你居住在一个有发生大规模地震的可能性的区域。因此你在考虑为房屋购买地震保险,每一年 180 美元。一年间地震毁坏你的房屋的概率是 0.001。如果发生这种情况,毁坏的成本是(地震险全部覆盖)160 000 美元。你的全部资产(包括房屋)价值 250 000 美元。

(a) 应用贝叶斯决策准则决定选择一个方案,使得你的期望资产最大化(是否购买保险)。

(b) 你现在已经建立一个效用函数用于度量你的全部资产的价值 x 美元($x \geq 0$),效用函数是 $U(x) = \sqrt{x}$ 。比较下一年购买地震险的成本使你的总资产风险减少的效用和不购买地震险的期望效用。你应该购买保险吗?

15.6-3 你即将从大学毕业,你的父亲提供给你两个选择方案:一个是给你 19 000 美元,另一个是以你的名义进行投资。该投资可能很快有下面两个结果:

结 果	概 率
获得 10 000 美元	0.3
获得 30 000 美元	0.7

你收到 M 千美元的效用函数是 $U(M) = \sqrt{M+6}$,为了最大化期望收益,你将做出什么选择?

15.6-4* 再考虑习题 15.6-3。你现在对于你的效用函数是不确定的,因此建立效用函数。你已经发现 $U(19)=16.7, U(30)=20$ 分别是收到 19 000 美元和 30 000 美元的效用。你已经得到结论:对于父母提供的两个方案感到没有差异。使用这个信息求解 $U(10)$ 。

15.6-5 你希望建立个人的效用函数,即你收到 M 千美元的效用函数。设置 $U(0)=0$ 后,接下来当你收到 1 000 美元时,设置 $U(1)=1$ 。你想得到 $U(10)$ 和 $U(5)$ 。

(a) 你提供给自己下面两个假设方案。

A_1 : 以概率 p 获得 10 000 美元。

以概率 $1-p$ 获得 0 美元。

A_2 : 确定地获得 1 000 美元。

然后问自己这样的问题: p 的什么值, 让你觉得这两个方案没有差别? 你的答案是 0.125, 求解 $U(10)$ 。

(b) 除了改变第二个方案为确定获得 5 000 美元以外, 重复(a)。使你觉得两个方案无差异的 $p=0.5625$, 求解 $U(5)$ 。

(c) 使用你自己选择的 p 值重复(a)和(b)。

15.6-6 给定下面的收益表:

方 案	状 态	
	S_1	S_2
A_1	36	49
A_2	144	0
A_3	0	81
后验概率	p	$1-p$

(a) 假设你的收益的效用函数是 $U(x) = \sqrt{x}$, 在同一个图中画出每一个方案相对 p 的期望效用。对于每一个方案找出最大化期望效用的 p 值范围。

A(b) 现在假设你的收益的效用函数是风险容限 $R=5$ 的指数函数, 在 $p=0.25$, $p=0.5$, $p=0.75$ 情况下, 分别使用 TreePlan 建立和求解最终的决策树。

15.6-7 Switzer 医生有一个重症患者, 但是在诊断疾病的原因时遇到了麻烦。医生已经将原因缩小为两种可能: 疾病 A 和疾病 B。基于上面的证据, 这两个原因的可能性相等。除了已经做出的测试, 没有测试可用于决策是不是疾病 B。一个测试可用于疾病 A, 但有两个主要的问题: 第一, 它是非常昂贵的; 第二, 有一些不可靠, 仅有 80% 可能给出精确结果。能对疾病 A 的患者以 80% 的概率给出正的结果(疾病 A), 然而, 可能对疾病 B 的患者以 20% 的概率给出正的结果。

疾病 B 是无法医治的疾病, 有时候是致命的, 即使活着, 也会饱受健康状况很糟和生活质量低劣之苦。疾病 A 的受害者如果不治疗, 预计后果是相似的。消除疾病 A 的方法费用昂贵, 可以让他们恢复健康。不幸的是, 如果患者得的是疾病 B, 则进行这一治疗将导致患者死亡。

每种情况下, 患者被给予的后果的概率分布如下表, 列头给出了患者的疾病:

结果	后 果 概 率			
	不 治 疗		对 疾 病 A 进 行 治 疗	
	A	B	A	B
死亡	0.2	0.5	0	1.0
以低劣的生活质量活着	0.8	0.5	0.5	0
恢复良好的健康状况	0	0	0.5	0

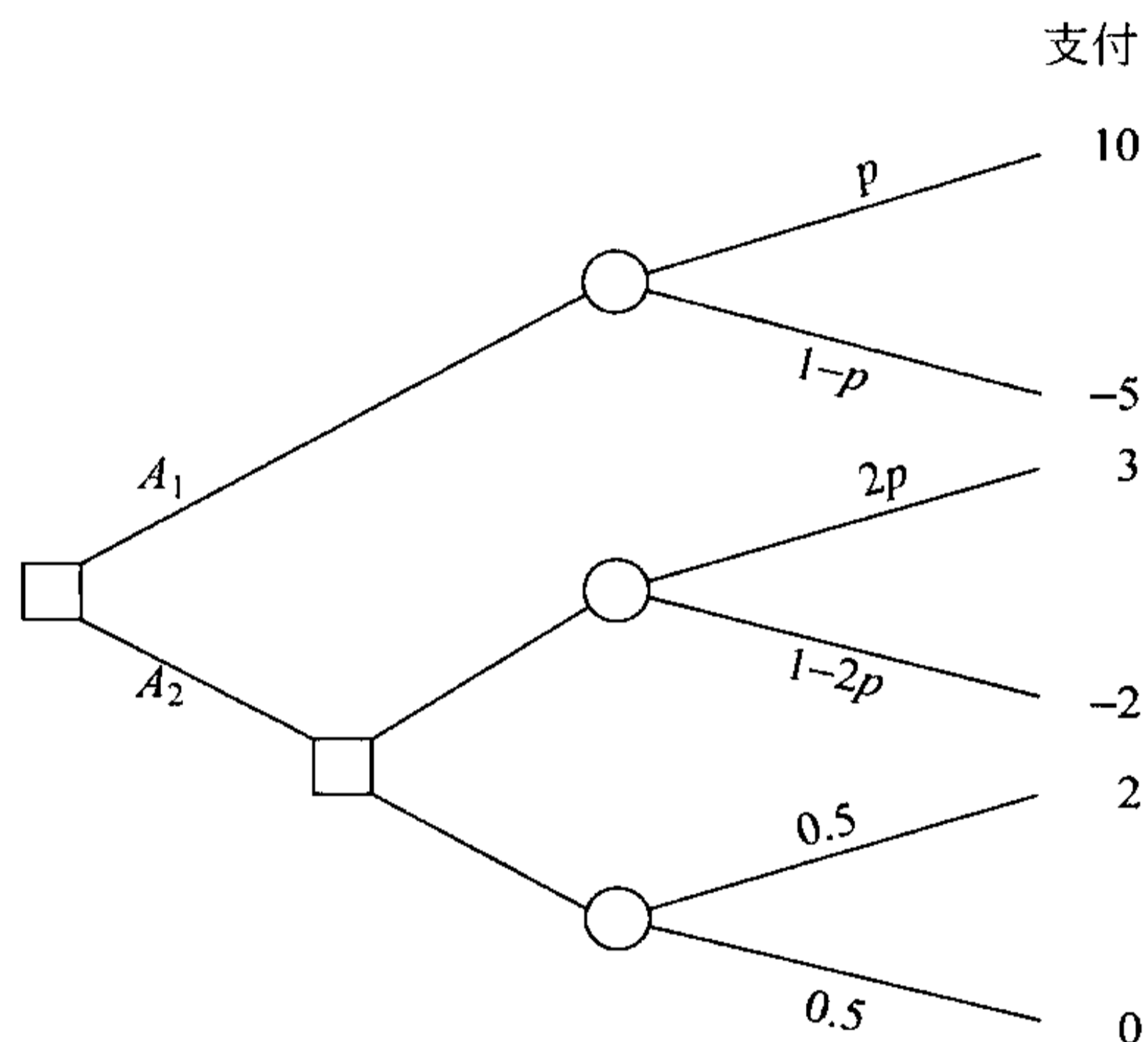
患者已经得到下列可能结果的效用:

结 果	效用
死亡	0
以低劣的生活质量活着	10
恢复良好的健康状况	30

另外,如果患者承担测试疾病 A 的成本,效用将增加-2,如果患者承担治疗疾病 A 的成本,效用将增加-1。

使用带有完整决策树的决策分析决定患者是否应该进行疾病 A 的测试,然后确定怎样处理(是否进行疾病 A 的治疗?)才能最大化患者的期望效用。

15.6-8 你需要决策选择在下面决策树中的方案 A_1 和 A_2 ,但是对于概率 p 的值是不确定的,你也需要对 p 进行敏感性分析。



你的货币的效用函数(支付的收入)如下:

$$U(M) = \begin{cases} M^2, & M \geq 0 \\ M, & M < 0 \end{cases}$$

- (a) 对于 $p=0.25$,在最大化期望收益的效用下,决策最优方案。
 (b) 在同样的方案保持最优的情况下,决策概率 p 值的范围($0 \leq p \leq 0.5$)。



案例 智能商务

当厄尔尼诺造成在南加州降雨时,Cerebrosoft 的 CEO、主要股东和建立者 Charlotte Rothstein 坐在办公室里,考虑公司最新推出的产品——Brainet 的相关决策。这是一个特别艰难的决策。Brainet 可能流行并卖得很好。然而,Charlotte 正在考虑其中涉及的风险。在这个竞争的市场上,销售 Brainet 也可能导致巨大的损失。应该开始和进行营销活动吗?还是应该放弃这个产品?或者在决策是否销售产品前从当地的市场调研公司购买另外的市场信息。她不得不很快地做出决策。她慢慢地喝着玻璃杯里高蛋白多维生

素的果汁,回想着过去几年的一些往事。

Cerebrosoft 是 Charlotte 和她的两个朋友从商学院毕业后建立的。公司位于硅谷的中心区。Charlotte 和两个朋友在开业后的第二年开始赚钱,并在以后持续盈利。Cerebrosoft 是通过互联网销售软件的大公司之一,多媒体部门开发了以 PC 为基础的软件工具。Audiatur 和 Videatur 这两个产品的收入构成公司收入的 80%。上一年每一种产品销售超过 100 000 单位。生意是通过网络完成的:顾客可以下载软件的试用版本,如果经过测试他们对产品满意,将购买。两个产品都是 75.95 美元,专门通过网络销售。

尽管互联网上的计算机类型不一样,运行不同类型的软件,但在计算机之间有一个标准的协议使它们能够相互通信。使用者可以在网上冲浪,在几千公里外观察和获得有用的信息。使用者也可以在网上制作文件,产生关于 Cerebrosoft 的销售情况。通过网络销售软件消除了许多额外的消费产品的成本因素:包装、存储、分销、销售人员等。而其潜在的顾客可以下载试用版本,在试用版本过期之前决定是否购买。而且,Cerebrosoft 能够一直制作可用于顾客的大部分最近的文件,避免在分销渠道中有过期的软件。

Charlotte 的思绪被 Jeannie Korn 的到来打断。Korn 掌管产品的在线营销,从一开始 Brainet 就引起了她的注意。她准备向 Charlotte 提供她要求的建议:“Charlotte,我想我们应该推出 Brainet,软件工程师已经向我保证当前的版本是完善的,应尽快推向市场。根据过去两年的产品计划,我们能够可靠地评估市场对新产品的反应,你不这么想吗?”她拿出了一些陈述幻灯片,“在此期间,我们推出了 12 种新产品,其中 4 种在最初的 6 个月销售超过 30 000 单位,甚至更好,最后两种在最初的两季里甚至销售超过 40 000 个单位”。Charlotte 也知道 Jeannie 提供的这些数据。毕竟,这两个产品是她亲自帮助开发的。但是她觉得这个特殊产品的上市是不容易的。公司在过去的三年里已经迅速地成长,财务能力也已经扩大。产品 Brainet 的上市如果失败,将花费公司许多资金,而由于 Charlotte 最近的大笔投资,这是公司目前所无法承受的。

在下午早些时候,Charlotte 接见了 Reggie Ruffin。他是位万能博士和产品管理者,Reggie 有他的领域的固定追踪记录,Charlotte 想听听他的意见。

“Charlotte,坦率地说,这个项目的成败取决于三个主要的因素:竞争、销售量、成本,当然还有我们的价格。你有没有决定产品的价格?”

“我正在考虑三种战略哪一种对我们更有利,卖 50 美元以最大化收入,卖 30 美元以最大化市场份额,当然,还有第三个方案,两者兼顾卖 40 美元。”

此时,Reggie Ruffin 指着在面前的纸张的注脚:“我仍然认为销售 40 美元的单价方案是最好的。考虑成本后,我检验了记录,基本上,我们不得不分期偿还 Brainet 的开发成本。我们已经花费了 800 000 美元,每一年期望花费 50 000 美元支持和运输 CDs 给那些需要下载软件拷贝的人。”Reggie 接着拿出一份报告给 Charlotte:“这里有一些关于工业的数据,我昨天刚刚收到的。让我们看一看我们能从这些数据中了解到什么。”他给 Charlotte 指出了一些重点。Reggie 同意将报告中最相关的信息整理后在第二天早上给 Charlotte。他花了一个晚上从报告中收集信息。在他做出的三个表格的结尾,给出了每一个方案的价格策略。每一个表格给出了对应其他公司开发竞争水平(高、中、低)的不同销售量的概率。

表 1 假设高价格(50 美元)条件下的销售概率分布

销售量	竞争程度		
	高	中	低
50 000 单位	0.20	0.25	0.30
30 000 单位	0.25	0.30	0.35
20 000 单位	0.55	0.45	0.35

表 2 假设中等价格(40 美元)条件下的销售概率分布

销售量	竞争程度		
	高	中	低
50 000 单位	0.25	0.3	0.40
30 000 单位	0.35	0.40	0.50
20 000 单位	0.40	0.30	0.10

表 3 假设低价格(30 美元)条件下的销售概率分布

销售量	竞争程度		
	高	中	低
50 000 单位	0.35	0.40	0.50
30 000 单位	0.40	0.50	0.45
20 000 单位	0.25	0.10	0.05

第二天早晨,Charlotte 正在喝着营养饮料。Jeannie 和 Reggie 很快会来她的办公室。她将在他们的帮助下决策怎样处理 Brainet。应该上市新产品吗?如果是,价格是多少?

Jeannie 和 Reggie 一进入办公室,Jeannie 就立即喊道:“伙计们,我刚和一家营销研究公司谈过。这家公司可以帮我们做一个关于 Brainet 上市的竞争情况的研究,并在一周内给我们结果。”

“他们做这个研究要价多少?”

“我知道你会问这个,Reggie,他们要求 10 000 美元,我觉得这个价钱很公道。”

此时,Charlotte 加入对话:“我们了解这家市场研究公司的资质吗?”

“是的,我这里有一些报告,分析之后,我得出结论,市场调研公司在预测中等价格和低价格的竞争环境方面表现不是很好,因此如果我们决定采用这两种策略,则不应该让他们为我们做这个研究。然而,在高价的情况下,他们做得很好。假定竞争评估为高竞争,预测有 80%是正确的,他们有 15%的可能预测为中等竞争。假定竞争是中等的,15%的可能预测为高竞争,80%的可能预测为中等竞争。最后,对于低竞争的情况,有 90%的可能做出正确的预测,7%预测为中等竞争,3%预测为高竞争。”

Charlotte 觉得所有这些数据对她来说太烦琐了:“难道对于市场怎么反映就没有一个简单的评估吗?”

“你是说一些先验概率?是的,根据我们过去的经验,面对高竞争的可能性是 20%,中等竞争是 70%,低竞争是 10%。”Jeannie 总是能拿出所需的数据。

现在需要做的就是坐下来,弄清楚这一切的含义……

(a) 对于最初的分析,不考虑通过雇用市场调研公司获得更多信息的机会。获得行动方案、自然状态,建立收益表。然后建立问题的决策树,清楚地区别决策和事件节点以及所有的相关数据。

(b) 如果使用最大可能准则,Charlotte 的决策是什么? 小中取大准则呢?

(c) 如果使用贝叶斯决策准则,Charlotte 的决策是什么?

(d) 现在考虑做市场研究的可能性。建立相应的决策树,计算相关概率和分析决策树。Cerebrosoft 应该支付 10 000 美元做市场调研吗? 总的最优策略是什么?

矩阵和矩阵运算

一个矩阵是一组数字的长方形阵列。例如

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

是一个 3×2 的矩阵(这里 3×2 读做“3 乘 2”),因为它是一个有三行和两列数字的长方形阵列(矩阵在本书中用黑体大写字母表示)。在长方形阵列的数字称为矩阵的元素。例如

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2.4 & 0 & \sqrt{3} \\ -4 & 2 & -1 & 15 \end{bmatrix}$$

是一个 2×4 矩阵,它是元素是 $1, 2.4, 0, \sqrt{3}, -4, 2, -1$ 和 15 。由此,用更一般的术语

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \| a_{ij} \|$$

是一个 $m \times n$ 矩阵,这里 a_{11}, \dots, a_{mn} 为数字,它们是这个矩阵的元素。 $\| a_{ij} \|$ 是上面矩阵的简写,该矩阵的第 i 行第 j 列元素为 $a_{ij}, i=1, 2, \dots, m$ 和 $j=1, 2, \dots, n$ 。

矩阵运算

因为矩阵本身不具有数值,所以它们不能如同单个数字那样相加或相乘。但是,有时可以对数字阵列进行某些操作。因此,人们对矩阵的运算制订了一些类似算术运算的规则。作为描述,令 $\mathbf{A} = \| a_{ij} \|$ 和 $\mathbf{B} = \| b_{ij} \|$ 为具有相同行和列的两个矩阵(后面在讨论矩阵乘法时将改变上述限制)。

当且仅当上述两个矩阵中所有对应元素均相等(对于所有 i 和 $j, a_{ij} = b_{ij}$)时,称矩阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 相等($\mathbf{A} = \mathbf{B}$)。

矩阵乘以一个数字(将该数字记为 k),结果为矩阵的每个元素乘以 k ,所以有

$$k\mathbf{A} = \| ka_{ij} \|$$

例如

$$3 \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 5 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 15 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

矩阵 A 和 B 相加, 只要简单地将对应元素相加, 所以

$$A + B = \| a_{ij} + b_{ij} \|$$

作为说明

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

类似的, 减法运算如下:

$$A - B = A + (-1)B$$

所以

$$A - B = \| a_{ij} - b_{ij} \|$$

例如

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

注意, 除了矩阵乘以一个数字, 上述所有运算均规定两个矩阵具有相同的行和相同的列。但上述运算都简明直观, 因为它们只对矩阵对应的元素进行比较和算术运算。

还有另外一种, 尚未定义的初等运算——矩阵相乘, 它相对较为复杂。为了找出矩阵 A 乘以矩阵 B 之后新矩阵的第 i 行第 j 列的元素, 需要将矩阵 A 中第 i 行的每个元素乘以矩阵 B 中第 j 列的相应元素, 并将其乘积相加。为了进行元素之间的相乘, 需要对矩阵 A 和 B 的行列数进行下列限制:

只有当矩阵 A 的列数等于矩阵 B 的行数时, 两个矩阵才能相乘得 AB 。

由此假定 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times s$ 矩阵, 因此它们的乘积为

$$AB = \left\| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right\|$$

这里, 其乘积为 $m \times s$ 矩阵。但是当 A 是一个 $m \times n$ 矩阵, B 是一个 $r \times s$ 矩阵时, AB 就不能定义。

为了说明矩阵相乘

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(3) + 2(2) & 1(1) + 2(5) \\ 4(3) + 0(2) & 4(1) + 0(5) \\ 2(3) + 3(2) & 2(1) + 3(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 12 & 4 \\ 12 & 17 \end{bmatrix}$$

相反, 若将相乘的两个矩阵交换位置, 其乘积

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

不能被定义。

即使 AB 和 BA 均被定义, 但通常

$AB \neq BA$

由此,矩阵相乘被看作是一种特别设计的运算,它的特征与算术的相乘完全不同。为了理解为什么要采用上述特别的定义,考虑以下方程组:

$$2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 20$$

$$x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 30$$

$$3x_1 + x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 20$$

与其写出上述方程组,它们可以更简明地写成矩阵形式

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

这里

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -6 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 20 \end{bmatrix}$$

这是矩阵乘法设计所依据的乘法类型。

注意,矩阵的除法没有被定义。

虽然这里描述的矩阵运算并不都具有算术运算的某些特征,但它们都满足下述规则

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$$

上述表达式中矩阵的行列形式都必须符合上述运算的定义。

另一种矩阵运算为**转置运算**,它不涉及相似的算术运算。这种运算只是将矩阵的行和列进行交换,并无其他含义,只是在乘法运算根据需要时频繁应用。对矩阵 $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|$, 它的转置 \mathbf{A}^T 为

$$\mathbf{A}^T = \|a_{ji}\|$$

举例如下,如有

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

则

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵的特殊类型

在算术中,0 和 1 具有特殊作用。在矩阵理论中存在起到类似作用的特殊的矩阵。特别是类似 1 的单位矩阵 \mathbf{I} ,它是一个方阵,它的元素除在主对角线上为 1 外,其余为 0,即

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵 \mathbf{I} 的行数和列数可按需要设定。与算术中的 1 类似, 对任何矩阵 \mathbf{A} , 有

$$\mathbf{IA} = \mathbf{A} = \mathbf{AI}$$

这里 \mathbf{I} 的行数和列数按定义的乘法运算确定。

类似的, 类同于算术中 0 的矩阵称为零矩阵, 表示为 $\mathbf{0}$, 无论矩阵的规模有多大, 其全部元素为 0, 即

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

所以对任何矩阵 \mathbf{A} , 有

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad \text{和} \quad \mathbf{0A} = \mathbf{0} = \mathbf{A0}$$

这里 $\mathbf{0}$ 的行列数符合运算定义规定的要求。

在某些场合下, 可以将矩阵分割成若干个较小的矩阵, 称为子矩阵。例如对下列 3×4 矩阵的一种可能分割为

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

这里

$$\mathbf{A}_{12} = [a_{12}, a_{13}, a_{14}], \quad \mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

均为子矩阵。与其对子矩阵的各个元素间进行运算, 我们可以依据子矩阵进行运算, 运算规则与前面定义的一样。例如, \mathbf{B} 是一个被分割的 4×1 矩阵

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}$$

于是有

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11}b_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_2 \\ \mathbf{A}_{21}b_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_2 \end{bmatrix}$$

向量

在矩阵理论中起重要作用的一种特殊类型的矩阵具有一行或一列, 这类矩阵通常称

为向量,例如

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$$

为一个行向量。

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

是一个列向量(向量在本书中用带下标的黑体字表示)。这些向量有时也称为 n 维向量,表明有 n 个元素。例如

$$\mathbf{x} = \left\{ 1, 4, -2, \frac{1}{3}, 7 \right\}$$

是一个 5 维向量。

一个零向量 $\mathbf{0}$ 可以是行向量或列向量,它的元素均为 $\mathbf{0}$,即

$$\mathbf{0} = [0, 0, \dots, 0] \quad \text{或} \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

(虽然相同的符号 $\mathbf{0}$ 可用于或表示零向量,或表示零矩阵,但具体应根据它所处位置来确定。)

在矩阵理论中向量起重要作用的一个原因是,任何 $m \times n$ 矩阵可以分割为 m 个行向量或 n 个列向量,并且可以依据这些向量来分析矩阵的重要性质。为了详细说明,考虑一组 n 维向量 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ 具有相同形式(即或均为行向量,或均为列向量)。

定义: 一个向量集合 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ 线性相关,若存在 m 个数(用 c_1, c_2, \dots, c_m 表示),使有

$$c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \dots + c_m \mathbf{x}_m = \mathbf{0}$$

其中至少有一个 $C_i (i=1, \dots, m)$ 不为零,否则称这个集合线性独立。

作为解释,若 $m=3$ 和

$$\mathbf{x}_1 = [1, 1, 1], \quad \mathbf{x}_2 = [0, 1, 1], \quad \mathbf{x}_3 = [2, 5, 5]$$

因为存在三个数 $C_1=2, C_2=3$ 和 $C_3=-1$, 并且有

$$2\mathbf{x}_1 + 3\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3 = [2, 2, 2] + [0, 3, 3] - [2, 5, 5] = [0, 0, 0]$$

所以 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ 线性相关。注意要表明上述向量集合线性相关,需要找出三个特别的数字(C_1, C_2, C_3)使其有 $c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + c_3 \mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$, 这做起来并不容易。同样,注意这个方程意味着

$$\mathbf{x}_3 = 2\mathbf{x}_1 + 3\mathbf{x}_2$$

由此 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ 被解释为线性相关是因为它们中的一个可表示为其他两个向量的线性组合。但如果 \mathbf{x}_3 变为

$$\mathbf{x}_3 = [2, 5, 6]$$

则 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ 为线性独立,因为不可能将这些向量中的一个(如 \mathbf{x}_3)表达为其他两个的线性

组合。

定义：一组向量的秩是该组向量中线性独立向量的最大个数。

继续上述例子，我们看到向量组 x_1, x_2, x_3 的秩为 2（任意一对向量线性独立），但当 x_3 变换后，这组向量的秩变为 3。

定义：向量组的一个基是该组向量中线性独立向量的一个集合，使该组向量中的其他每一个向量均可表示为该集合的线性组合（即向量组中其他每一个向量均可表示为该集合的某个乘数和）。

上述例子中向量对 x_1, x_2 组成向量 x_1, x_2, x_3 的一个基。当 x_3 改变后，基变换为含 x_1, x_2, x_3 三个向量。

定理 A4.1： 当且仅当向量组的秩为 r 时，从该向量组可找出 r 个线性独立的向量集合。

矩阵的若干性质

给出了有关向量的上述结果，现在可以表述有关矩阵的一些重要概念。

定义：一个矩阵的行秩是其行向量集合的秩，一个矩阵的列秩是其列向量集合的秩。

例如，有矩阵 A 为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

由上面线性相关的例子可知 A 的行秩为 2。 A 的列秩同样为 2（前两个列向量线性独立，但第 2 个列向量减去第 3 个等于 0 ）。矩阵中列的秩和行的秩相同这一点并非巧合，如下面的定理所述。

定理 A4.2： 矩阵的行秩和列秩相等。

因此只需要称之为矩阵的秩。

最后要讨论的一个概念是矩阵的逆。对任何非零的数 k ，存在一个倒数或逆 $k^{-1} = 1/k$ ，有

$$kk^{-1} = 1 = k^{-1}k$$

在矩阵理论中是否存在类似概念？换句话说，对给定的非奇异的矩阵，是否存在一个矩阵 A^{-1} ，使得有

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A?$$

假如 A 不是一个方阵（即 A 的行数和列数不一样），其答案是否定的，因为对定义的乘法矩阵的乘积将具有不同的行数（所以列和行对等的运算将无法定义）。但假如 A 是一个方阵，答案就是肯定的，如同下面的定义和定理 A4.3 所描述的。

定义：一个矩阵称为非奇异的或满秩的，假如它的秩等于它的行数或列数。否则该矩阵是奇异的或退化的。

因此只有方阵才能是非奇异的。测试一个方阵是否奇异的一个有效方法是假如它的行列式为非零，则它是非奇异的。

定理 A4.3：

(a) 假如 A 是非奇异的，则存在唯一的非奇异矩阵 A^{-1} ，称为 A 的逆，且有 $AA^{-1} =$

$I = A^{-1}A$ 。

(b) 假如 A 是非奇异的, B 是一个矩阵或 $AB = I$ 或 $BA = I$, 则 $B = A^{-1}$ 。

(c) 只有非奇异矩阵存在逆。

为说明矩阵的逆, 考虑矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

注意 A 是一个非奇异矩阵, 因为它的行列式 $5(-1) - 1(-4) = -1$ 为非零。所以 A 有一个具有以下未知数的逆:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

为了推导出 A^{-1} , 利用下面的性质

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 5a - 4c & 5b - 4d \\ a - c & b - d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由此

$$\begin{aligned} 5a - 4c &= 1 & 5b - 4d &= 0 \\ a - c &= 0 & b - d &= 1 \end{aligned}$$

求解上述两对联立方程, 得 $a=1, c=1$ 和 $b=-4, d=-5$, 所以

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

由此

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

和

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

正态分布表

$$P\{\text{标准正态分布} > K_\alpha\} = \int_{K_\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \alpha$$

表 5.1 正态分布曲线 K_α 到 ∞ 下的积

K_α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.500 0	0.496 0	0.492 0	0.488 0	0.484 0	0.480 1	0.476 1	0.472 1	0.468 1	0.464 1
0.1	0.460 2	0.456 2	0.452 2	0.448 3	0.444 3	0.440 4	0.436 4	0.432 5	0.428 6	0.424 7
0.2	0.420 7	0.416 8	0.412 9	0.409 0	0.405 2	0.401 3	0.397 4	0.393 6	0.389 7	0.385 9
0.3	0.382 1	0.378 3	0.374 5	0.370 7	0.366 9	0.363 2	0.359 4	0.355 7	0.352 0	0.348 3
0.4	0.344 6	0.340 9	0.337 2	0.333 6	0.330 0	0.326 4	0.322 8	0.319 2	0.315 6	0.312 1
0.5	0.308 5	0.305 0	0.301 5	0.298 1	0.294 6	0.291 2	0.287 7	0.284 3	0.281 0	0.277 6
0.6	0.274 3	0.270 9	0.267 6	0.264 3	0.261 1	0.257 8	0.254 6	0.251 4	0.248 3	0.245 1
0.7	0.242 0	0.238 9	0.235 8	0.232 7	0.229 6	0.226 6	0.223 6	0.220 6	0.217 7	0.214 8
0.8	0.211 9	0.209 0	0.206 1	0.203 3	0.200 5	0.197 7	0.194 9	0.192 2	0.189 4	0.186 7
0.9	0.184 1	0.181 4	0.178 8	0.176 2	0.173 6	0.171 1	0.168 5	0.166 0	0.163 5	0.161 1
1.0	0.158 7	0.156 2	0.153 9	0.151 5	0.149 2	0.146 9	0.144 6	0.142 3	0.140 1	0.137 9
1.1	0.135 7	0.133 5	0.131 4	0.129 2	0.127 1	0.125 1	0.123 0	0.121 0	0.119 0	0.117 0
1.2	0.115 1	0.113 1	0.111 2	0.109 3	0.107 5	0.105 6	0.103 8	0.102 0	0.100 3	0.098 5
1.3	0.096 8	0.095 1	0.093 4	0.091 8	0.090 1	0.088 5	0.086 9	0.085 3	0.083 8	0.082 3
1.4	0.080 8	0.079 3	0.077 8	0.076 4	0.074 9	0.073 5	0.072 1	0.070 8	0.069 4	0.068 1
1.5	0.066 8	0.065 5	0.064 3	0.063 0	0.061 8	0.060 6	0.059 4	0.058 2	0.057 1	0.055 9
1.6	0.054 8	0.053 7	0.052 6	0.051 6	0.050 5	0.049 5	0.048 5	0.047 5	0.046 5	0.045 5
1.7	0.044 6	0.043 6	0.042 7	0.041 8	0.040 9	0.040 1	0.039 2	0.038 4	0.037 5	0.036 7
1.8	0.035 9	0.035 1	0.034 4	0.033 6	0.032 9	0.032 2	0.031 4	0.030 7	0.030 1	0.029 4
1.9	0.028 7	0.028 1	0.027 4	0.026 8	0.026 2	0.025 6	0.025 0	0.024 4	0.023 9	0.023 3
2.0	0.022 8	0.022 2	0.021 7	0.021 2	0.020 7	0.020 2	0.019 7	0.019 2	0.018 8	0.018 3
2.1	0.017 9	0.017 4	0.017 0	0.016 6	0.016 2	0.015 8	0.015 4	0.015 0	0.014 6	0.014 3
2.2	0.013 9	0.013 6	0.013 2	0.012 9	0.012 5	0.012 2	0.011 9	0.011 6	0.011 3	0.011 0

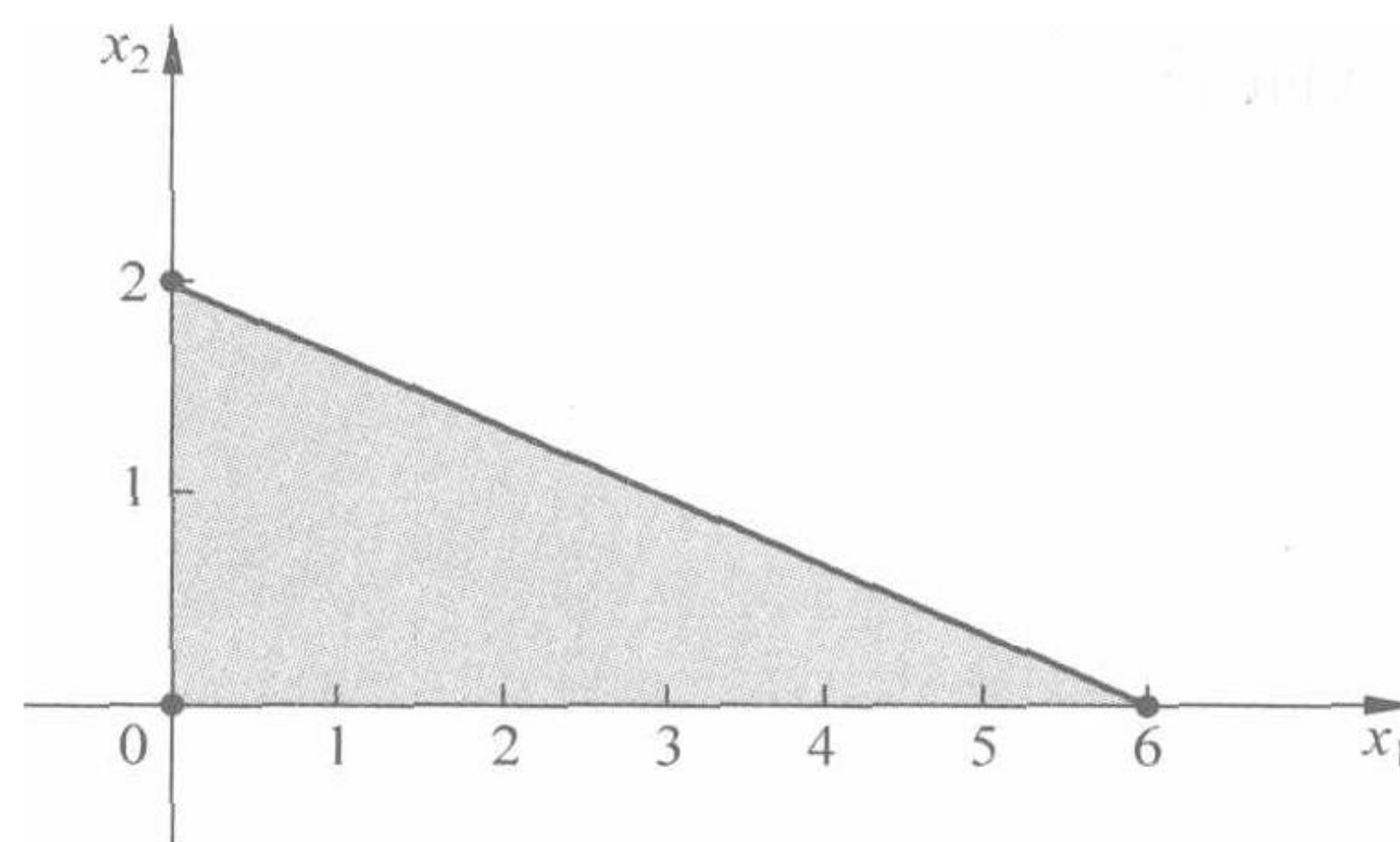
续表

K_{α}	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.3	0.010 7	0.010 4	0.010 2	0.009 90	0.009 64	0.009 39	0.009 14	0.008 89	0.008 66	0.008 42
2.4	0.008 20	0.007 98	0.007 76	0.007 55	0.007 34	0.007 14	0.006 95	0.006 76	0.006 57	0.006 39
2.5	0.006 21	0.006 04	0.005 87	0.005 70	0.005 54	0.005 39	0.005 23	0.005 08	0.004 94	0.004 80
2.6	0.004 66	0.004 53	0.004 40	0.004 27	0.004 15	0.004 02	0.003 91	0.003 79	0.003 68	0.003 57
2.7	0.003 47	0.003 36	0.003 26	0.003 17	0.003 07	0.002 98	0.002 89	0.002 80	0.002 72	0.002 64
2.8	0.002 56	0.002 48	0.002 40	0.002 33	0.002 26	0.002 19	0.002 12	0.002 05	0.001 99	0.001 93
2.9	0.001 87	0.001 81	0.001 75	0.001 69	0.001 64	0.001 59	0.001 54	0.001 49	0.001 44	0.001 39
3	0.001 35	0.0 ³ 968	0.0 ³ 687	0.0 ³ 483	0.0 ³ 337	0.0 ³ 233	0.0 ³ 159	0.0 ³ 108	0.0 ⁴ 723	0.0 ⁴ 481
4	0.0 ⁴ 317	0.0 ⁴ 207	0.0 ⁴ 133	0.0 ⁵ 854	0.0 ⁵ 541	0.0 ⁵ 340	0.0 ⁵ 211	0.0 ⁵ 130	0.0 ⁶ 793	0.0 ⁶ 479
5	0.0 ⁶ 287	0.0 ⁶ 170	0.0 ⁷ 996	0.0 ⁷ 579	0.0 ⁷ 333	0.0 ⁷ 190	0.0 ⁷ 107	0.0 ⁸ 599	0.0 ⁸ 332	0.0 ⁸ 182
6	0.0 ⁹ 987	0.0 ⁹ 530	0.0 ⁹ 282	0.0 ⁹ 149	0.0 ¹⁰ 777	0.0 ¹⁰ 402	0.0 ¹⁰ 206	0.0 ¹⁰ 104	0.0 ¹¹ 523	0.0 ¹¹ 260

资料来源: F. E. Croxton, *Tables of Areas in Two Tails and in One Tail of the Normal Curve*. Copyright 1949 by Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ.

第 3 章

3.1-2(a)

3.1-5 $(x_1, x_2) = (13, 5); Z = 31$ 3.1-11(b) $(x_1, x_2, x_3) = (26.19, 54.76, 20); Z = 2\,904.76$

$$\begin{aligned}
 3.2-3(b) \quad & \max \quad Z = 4\,500x_1 + 4\,500x_2 \\
 & \text{s. t.} \quad x_1 \leq 1 \\
 & \quad \quad x_2 \leq 1 \\
 & \quad \quad 5\,000x_1 + 4\,000x_2 \leq 6\,000 \\
 & \quad \quad 400x_1 + 500x_2 \leq 600 \\
 & \quad \quad \text{且} \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

3.4-3(a) 比例性：符合，因为在一个给定区域的某个局部点吸收的辐射剂量具有固定的比例。

叠加性：符合，因为吸收的不同波束强度可以叠加。

可分性：符合，因为波束的强度可以为任意的比例水平。

确定性：在进行复杂性分析时需要估测各种不同组织辐射吸收的数据，这些数据有相当程度的不确定性，故需进行灵敏度分析。

3.4-12(b) 从工厂 1，运送 200 单位至客户 2 和 200 单位至客户 3。

从工厂 2，运送 300 单位至客户 1 和 200 单位至客户 3。

3.4-13(c) $Z = 152\,880$ 美元； $A_1 = 60\,000$ ； $A_3 = 84\,000$ ； $D_5 = 117\,600$ 。所有其他决策变量均为 0。

3.4-15(b) 每个最优解有 $Z=13\ 330$ 美元。

3.5-2(c,e)

资源	每单位作业消耗的资源量		总量	可用资源量	
	作业 1	作业 2			
1	2	1	10	\leq	10
2	3	3	20	\leq	20
3	2	4	20	\leq	20
单位利润	20	30	\$166.67		
解	3.333	3.333			

3.5-5(a) $\min Z=84C+72T+60A$
s. t. $90C+20T+40A \geq 200$
 $30C+80T+60A \geq 180$
 $10C+20T+60A \geq 150$
且 $C \geq 0, T \geq 0, A \geq 0$

第 4 章

4.1-4(a) 顶点解中可行的解为 $(0,0)$ 、 $(0,1)$ 、 $(\frac{1}{4},1)$ 、 $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ 、 $(1,\frac{1}{4})$ 和 $(1,0)$ 。

4.3-4 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 10, 6\frac{2}{3})$; $Z=70$

4.6-1(a,c) $(x_1, x_2) = (2, 1)$; $Z=7$

4.6-3(a,c,e) $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{4}{5}, \frac{9}{5}, 0)$; $Z=7$

4.6-9(a,b,d) $(x_1, x_2, x_3) = (0, 15, 15)$; $Z=90$

(c) 无论对大 M 法或两阶段法, 只有最终表为真实问题的可行解。

4.6-13(a,c) $(x_1, x_2) = (-\frac{8}{7}, \frac{18}{7})$; $Z=\frac{80}{7}$

4.7-5(a) $(x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 3)$; $Z=7$

(b) $y_1^* = \frac{1}{2}, y_2^* = \frac{5}{2}, y_3^* = 0$ 。它们分别为资源 1、资源 2 和资源 3 的边际值。

第 5 章

5.1-1(a) $(x_1, x_2) = (2, 2)$ 为最优。其他基可行解有 $(0,0)$ 、 $(3,0)$ 和 $(0,3)$ 。

5.1-12 $(x_1, x_2, x_3) = (0, 15, 15)$ 为最优。

5.2-2 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 5, 0, \frac{5}{2}, 0)$; $Z=50$

5.3-1(a) 右端项为 $Z=8, x_2=14, x_6=5, x_3=11$

(b) $x_1=0, 2x_1-2x_2+3x_3=5, x_1+x_2-x_3=3$

第 6 章

$$\begin{aligned}
 6.1-1(a) \quad & \min \quad W = 15y_1 + 12y_2 + 45y_3 \\
 & \text{s. t.} \quad -y_1 + y_2 + 5y_3 \geq 10 \\
 & \quad \quad 2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 20 \\
 & \text{且} \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

6.3-1(c)

互补的基解				
原问题		Z=W	对偶问题	
可行解	可行解?		可行解?	基本解
(0,0,20,10)	是	0	否	(0,0,-6,-8)
(4,0,0,6)	是	24	否	$(1\frac{1}{5}, 0, 0, -5\frac{3}{5})$
(0,5,10,0)	是	40	否	(0,4,-2,0)
$(2\frac{1}{2}, 3\frac{3}{4}, 0, 0)$	是,且为最优	45	是,且为最优	$(\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 0, 0)$
(10,0,-30,0)	否	60	是	(0,6,0,4)
(0,10,0,-10)	否	80	是	(4,0,14,0)

6.3-7(c) 基变量为 x_1 和 x_2 。其他为非基变量。

$$\begin{aligned}
 (e) \quad & x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 6, \quad 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + x_5 = 15, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \\
 & x_5 = 0 \text{ 最优基可行解为 } (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0, 0, 0\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6.4-3 \quad & \max \quad W = 8y_1 + 6y_2 \\
 & \text{s. t.} \quad y_1 + 3y_2 \leq 2 \\
 & \quad \quad 4y_1 + 2y_2 \leq 3 \\
 & \quad \quad 2y_1 \leq 1 \\
 & \text{且} \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6.4-8(a) \quad & \min \quad W = 120y_1 + 80y_2 + 100y_3 \\
 & \text{s. t.} \quad y_2 - 3y_3 = -1 \\
 & \quad \quad 3y_1 - y_2 + y_3 = 2 \\
 & \quad \quad y_1 - 4y_2 + 2y_3 = 1 \\
 & \text{且} \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

6.6-1(d) 非最优,因为 $2y_1 + 3y_2 \geq 3$ 不满足,对 $y_1^* = \frac{1}{5}, y_2^* = \frac{3}{5}$ (f) 非最优,因为 $3y_1 + 2y_2 \geq 2$ 不满足,对 $y_1^* = \frac{1}{5}, y_2^* = \frac{3}{5}$

6.7-2

部分	新的基能 (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)	可行解?	最优解?
(a)	(0, 30, 0, 0, -30)	否	否
(b)	(0, 20, 0, 0, -10)	否	否
(c)	(0, 10, 0, 0, 60)	是	是
(d)	(0, 20, 0, 0, 10)	是	是
(e)	(0, 20, 0, 0, 10)	是	是
(f)	(0, 10, 0, 0, 40)	是	否
(g)	(0, 20, 0, 0, 10)	是	是
(h)	(0, 20, 0, 0, 10, $x_6 = -10$)	否	否
(i)	(0, 20, 0, 0, 0)	是	是

6.7-3 $-10 \leq \theta \leq \frac{10}{9}$

6.7-12 (a) $b_1 \geq 2, 6 \leq b_2 \leq 18, 12 \leq b_3 \leq 24$

(b) $0 \leq c_1 \leq \frac{15}{2}, c_2 \geq 2$

6.8-4(f) 生产玩具的单位利润的允许最优值范围为 2.50~5.00 美元, 相应的生产部件的范围为 -3.00~-1.50 美元。

6.8-6(f) 对(a), 使最优解不变时允许的增加值在 10 美元之内。对(b), 因变化值超出允许减少 5 美元的范围, 故最优解将变化。对(c), 允许变化的百分比之和为 250%, 所以对与目标函数系数同时变化的百分比规则, 最优解将变化。

第 7 章

7.1-2 $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{2}{3}, 2, 0\right)$ 且 $Z = \frac{22}{3}$ 为最优。

7.1-6(a) 新的最优解为 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 9, 3, 0)$ 并有 $Z = 117$ 。

7.2-1(a, b)

θ 的范围	最优解	$Z(\theta)$
$0 \leq \theta \leq 2$	$(x_1, x_2) = (0, 5)$	$120 - 10\theta$
$2 \leq \theta \leq 8$	$(x_1, x_2) = \left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right)$	$\frac{320 - 10\theta}{3}$
$8 \leq \theta$	$(x_1, x_2) = (5, 0)$	$40 + 5\theta$

7.2-4

θ 的范围	最优解		$Z(\theta)$
	x_1	x_2	
$0 \leq \theta \leq 1$	$10 + 2\theta$	$10 + 2\theta$	$30 + 6\theta$
$1 \leq \theta \leq 5$	$10 + 2\theta$	$15 - 3\theta$	$35 + \theta$
$5 \leq \theta \leq 25$	$25 - \theta$	0	$50 - 2\theta$

7.3-3 $(x_1, x_2, x_3) = (1, 3, 1)$ 时 $Z=8$ 为最优。

第 8 章

8.1-3(b)

		目的地			供应量
		今天	明天	虚设	
产地	Dick	3.0	2.7	0	5
	Harry	2.9	2.8	0	
需求量		3	4	2	

8.2-2(a) 基变量 $x_{11}=4, x_{12}=0, x_{22}=4, x_{23}=2, x_{24}=0, x_{34}=5, x_{35}=1, x_{45}=0$; $Z=53$

(b) 基变量: $x_{11}=4, x_{23}=2, x_{25}=4, x_{31}=0, x_{32}=0, x_{34}=5, x_{35}=1, x_{42}=4$; $Z=45$

(c) 基变量: $x_{11}=4, x_{23}=2, x_{25}=4, x_{32}=0, x_{34}=5, x_{35}=1, x_{41}=0, x_{42}=4$; $Z=45$

8.2-7(a) $x_{11}=3, x_{12}=2, x_{22}=1, x_{23}=1, x_{33}=1, x_{34}=2$; 经三次迭代达到最优。

(b, c) $x_{11}=3, x_{12}=0, x_{13}=0, x_{14}=2, x_{23}=2, x_{32}=3$; 已达到最优。

8.2-10 $x_{11}=10, x_{12}=15, x_{22}=0, x_{23}=5, x_{25}=30, x_{33}=20, x_{34}=10, x_{44}=10$; 成本 = 77.30 美元。还有其他相持的最优解。

8.2-11(b) 用 x_{ij} 表示从工厂 i 到分配中心 j 的运量, 于是有 $x_{13}=2, x_{14}=10, x_{22}=9, x_{23}=8, x_{31}=10, x_{32}=1$; 成本 = 20 200 美元。

8.3-4(a)

		任 务				
		仰泳	蛙泳	蝶泳	自由泳	虚设
人员分配	Carl	37.7	43.4	33.3	29.2	0
	Chris	32.9	33.1	28.5	26.4	0
	David	33.8	42.2	38.9	29.6	0
	Tony	37.0	34.7	30.4	28.5	0
	Ken	35.4	41.8	33.6	31.1	0

第 9 章

9.3-3(a) $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$ 或 $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow T$, 总长度 = 16

9.4-1(a) $\{(O, A); (A, B); (B, C); (B, E); (E, D); (D, T)\}$, 总长度 = 18

9.5-1

弧	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,5)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(4,6)	(5,7)	(6,7)
流量	4	4	1	4	1	0	3	2	4	5

9.8-3(a) 关键路线: 从 $\rightarrow A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow$ 结束

总用时 = 12 周

(b) 新计划

作业	用时/周	成本/美元
A	3	54 000
B	3	65 000
C	3	68 666
D	2	41 500
E	2	80 000

通过赶工安排可节省 7 834 美元。

第 10 章

10.3-2

	零售店		
	1	2	3
分配方案	1	2	2
	3	2	0

10.3-7(a)

阶段	(a)	(b)
1	2M	2.945M
2	1M	1.055M
3	1M	0
市场份额	6%	6.302%

10.3-11 $x_1 = -2 + \sqrt{13} \approx 1.6056, x_2 = 5 - \sqrt{13} \approx 1.3944; Z = 98.233$

10.4-3 在第一生产周期生产 2 件, 假如均不被接受, 第二生产周期生产 3 件。期望成本 = 573 美元。

第 11 章

11.1-2(a) $\min Z = 4.5x_{em} + 7.8x_{ec} + 3.6x_{ed} + 2.9x_{el} + 4.9x_{sm} + 7.2x_{sc} + 4.3x_{sd} + 3.1x_{sl}$

s. t.

$$x_{em} + x_{ec} + x_{ed} + x_{el} = 2$$

$$x_{sm} + x_{sc} + x_{sd} + x_{sl} = 2$$

$$x_{em} + x_{sm} = 1$$

$$x_{ec} + x_{sc} = 1$$

$$x_{ed} + x_{sd} = 1$$

$$x_{el} + x_{sl} = 1$$

所有 x_{ij} 为变量

11.3-1(b)

约束	产品 1	产品 2	产品 3	产品 4	总和	修改后 右端项	原右端项
第一个	5	3	6	4	$6\,000 \leq$	6 000	6 000
第二个	4	6	3	5	$12\,000 \leq$	105 999	6 000
边际收益/美元	70	60	90	80	80 000		
解	0	2 000	0	0			
	\leq	\leq	\leq	\leq			
	0	9 999	0	0			
是否生产?	0	1	0	0	$1 \leq$	2	
启动费用/美元	50 000	40 000	70 000	60 000			

有选择的约束

产品 3:	0	\leq	1	产品 1 或 2
产品 4:	0	\leq	1	产品 1 或 2

选哪一个约束(0=第一个,1=第二个): 0

11.3-5(b,d) (长期,中期,短期)=(14,0,16),利润 9 560 万美元

11.4-3(b)

约束	产品 1	产品 2	产品 3	总和	右端项
铣床	9	3	5	$498 \leq$	500
车床	5	4	0	$349 \leq$	350
磨床	3	0	2	$135 \leq$	150
销售潜力	0	0	1	$0 \leq$	20
单位利润	50	20	25	2 870 美元	
解	45	31	0		
	\leq	\leq	\leq		
	999	999	0		
生产否?	1	1	0	$2 \leq$	2

11.4-5(a) 令 $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{假如弧 } i \rightarrow j \text{ 被包含在最短路径中} \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$

互斥的方案选择,对弧的每一列,恰好只有一条弧被包含在最短路径中。可能的决策是:最短路径进入节点 i ,才会离开节点 i 。

11.5-2(a) $(x_1, x_2) = (2, 3)$ 为最优。

(b) 所有可行的凑整合的解都不是整数规划问题的最优解。

11.6-1 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 1, 1, 1), Z = 6$

11.6-7(b)

任务	1	2	3	4	5
人员分配	1	3	2	4	5

11.6-9 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 1, 0), Z = 36$

11.7-2(a, b) $(x_1, x_2) = (2, 1)$ 为最优

11.8-1(a) $x_1 = 0, x_3 = 0$

第 15 章

15.2-2(a)

方案	自然状态	
	售出 10 000 台	售出 100 000 台
生产计算机	0	54
出让专利	15	15

(c) 令 $p =$ 售出 10 000 台的先验概率, 当 $p \leq 0.722$ 时应生产计算机, 当 $p > 0.722$ 时应出让专利。

15.2-4(c) Warren 应选择周期性账户投资

15.2-8 订 25 台。

15.3-2(a) $EVPI = EP(\text{具有完美信息}) - EP(\text{不具有更多信息}) = 34.5 - 27 = 7.5$ (百万美元)

(d)

数据		$P(\text{结局} \text{状态})$	
		结局	
自然状态	先验概率	售出 10 000	售出 100 000
售出 10 000	0.5	0.666 666 667	0.333 333 333
售出 100 000	0.5	0.333 333 333	0.666 666 667

后验概率		$P(\text{状态} \text{结局})$	
		自然状态	
结局	$P(\text{结局})$	售出 10 000	售出 100 000
售出 10 000	0.5	0.666 666 667	0.333 333 333
售出 100 000	0.5	0.333 333 333	0.666 666 667

15.3-4(b) $EVPI = EP(\text{具有完美信息}) - EP(\text{无更多信息}) = 53 - 35 = 18$ (美元)

(c) Betsy 为获得更多信息最多可支付 18 美元。

15.3-8(a) 最多不超过 230 000 美元

(b) 订购 25

15.3-9(a)

方案	自然状态		
	风险高	中等风险	风险小
延长信贷	-15 000	10 000	20 000
不延长	0	0	0
先验概率	0.2	0.5	0.3

(c) $EVPI = EP(\text{具有完美信息}) - EP(\text{无更多信息}) = 11\ 000 - 8\ 000 = 3\ 000$ (美元), 这说明信贷评级组织不应被利用。

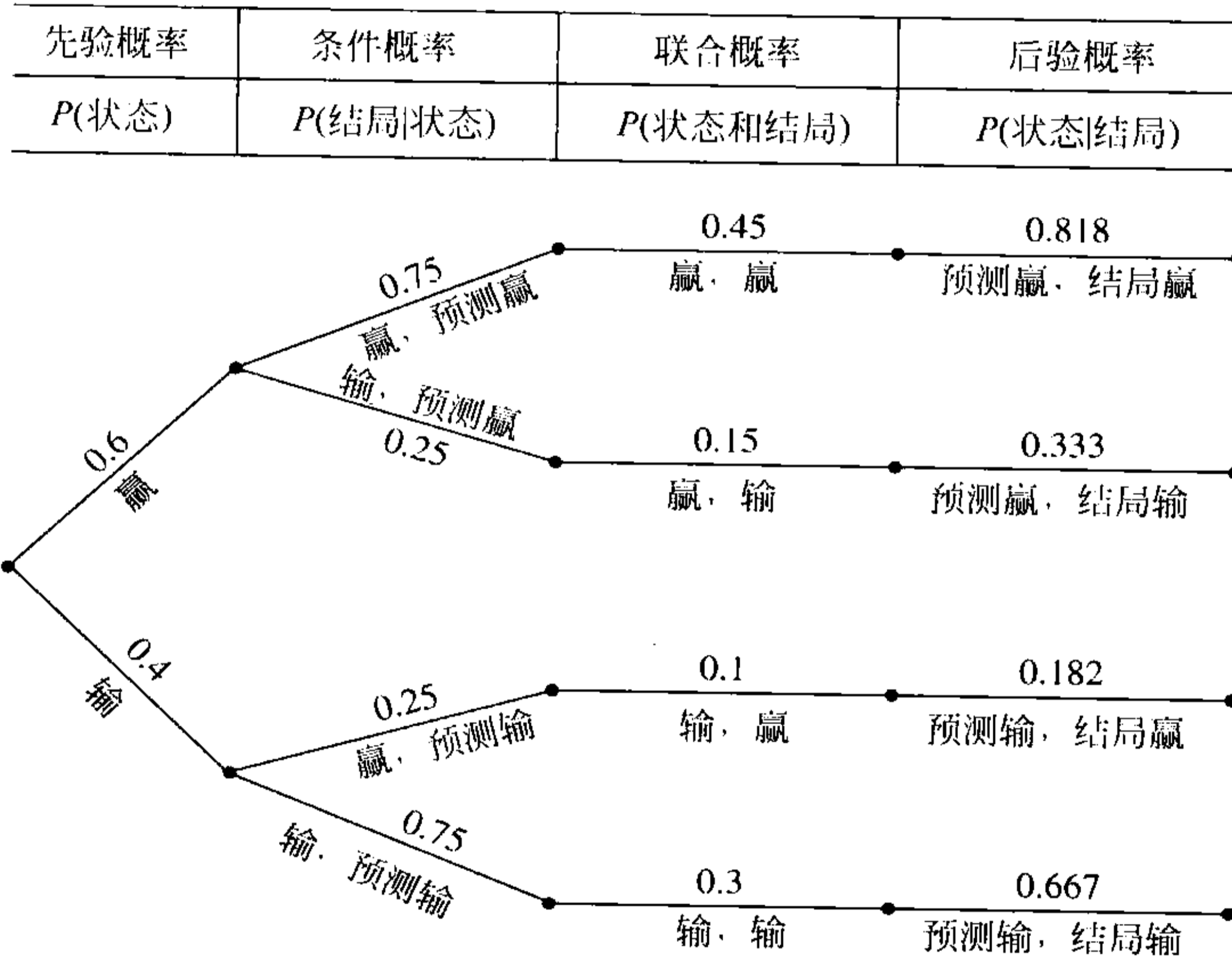
15.3-13(a) 猜硬币 1

(b) 正面: 硬币 2; 反面: 硬币 1

15.4-2 最优策略为不进行市场研究, 而生产计算机。

15.4-4(c) $EVPI = EP(\text{具有完美信息}) - EP(\text{无更多信息}) = 180\ \text{万美元} - 100\ \text{万美元} = 800\ 000$ (美元)

(d)



(f) Leland 大学应雇用 William. 假如他预测是一个获胜的季度, 就应举办募捐活动; 假如预测为输的季节, 则不应举办募捐活动。

15.5-7(a) 选择引进新产品(期望的报酬为 1 250 万美元)。

(b) 750 万美元。

(c) 最优策略为不试验, 但引进新产品。

(f) 两张图均表明期望的报酬对两个参数都敏感, 但利润值在成功时的变化较之不成功时的变化要略微敏感些。

15.6-2(a) 选择不购买保险(期望支付为 249 840 美元)

(b) $u(\text{保险}) = 499.82$

$u(\text{不保险}) = 499.8$

最优策略为购买保险。

15.6-4 $u(10) = 9$

教师反馈表

McGraw-Hill Education, 麦格劳-希尔教育出版公司, 美国著名教育图书出版与教育服务机构, 以出版经典、高质量的理工科、经济管理、计算机、生命科学以及人文社科类高校教材享誉全球, 更以丰富的网络化、数字化教学辅助资源深受高校教师的欢迎。

为了更好地服务于中国教育界, 提升教学质量, 2003 年麦格劳-希尔教师服务中心在北京成立。在您确认将本书作为指定教材后, 请您填好以下表格并经系主任签字盖章后寄回, 麦格劳-希尔教师服务中心将免费向您提供相应教学课件或网络化课程管理资源。如果您需要订购或参阅本书的英文原版, 我们也会竭诚为您服务。

书名:			
所需要的教学资料:			
您的姓名:			
系:			
院/校:			
您所讲授的课程名称:			
每学期学生人数:	_____ 人 _____ 年级	学时:	
您目前采用的教材:	作者: _____ 出版社: _____ 书名: _____		
您准备何时用此书授课:			
您的联系地址:			
邮政编码:		联系电话	
E-mail: (必填)			
您对本书的建议:			系主任签字: 盖章



清华大学出版社经管事业部
北京海淀区学研大厦 A603
邮编: 100084
电话: 010-62770175-4506
传真: 010-62770175-4506
电子邮件: xuyy@tup.tsinghua.edu.cn



麦格劳-希尔教育出版公司教师服务中心
北京-清华科技园创业大厦 907 室
北京 100084
电话: 010-62790299
传真: 010-62790292
教师服务热线: 800-810-1936
教师服务信箱: Instructor_cn@mcgraw-hill.com
网址: <http://www.mcgraw-hill.com.cn>